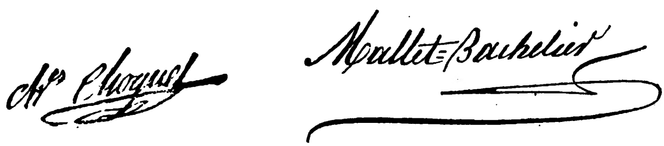
TRAITÉ

D'ALGÈBRE.



PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

0

TRAITÉ

D'ALGÈBRE,

Charles

PAR CHOQUET,

Docteur ès Sciences, ancien Répétiteur à l'École d'Artillerie de la Flèche,
Professeur de Mathématiques.

3+ PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

—

1856

PRÉFACE.

Les changements apportés aux Programmes de l'enseignement scientifique, pour l'obtention des grades universitaires et l'admission aux écoles du Gouvernement, expliquent pourquoi je publie aujourd'hui un Traité différent de celui dont j'ai fait paraître trois éditions en communauté avec M. Mayer, et deux autres depuis sa mort, en 1845 et 1849, avec de nombreuses additions et plusieurs modifications.

J'ai reproduit, dans le présent Traité, l'opuscule que j'avais publié postérieurement à la dernière édition mentionnée ci-dessus pour lui servir de complément. Je continue ainsi d'exposer la résolution des équations par la méthode des différences, en prenant pour exemple une équation du cinquième degré dont on ne connaît pas *à priori* le nombre des racines réelles. On est mis par là à même d'apprécier que cette méthode peut être employée dans tous les cas, sans qu'il y ait lieu de craindre aucune incertitude ; et qu'elle est préférable, pour la recherche des résultats numériques, aux méthodes fondées sur des principes théoriquement plus satisfaisants, mais qui occasionneraient un travail beaucoup plus considérable. Les exemples de la méthode des approximations successives ont été conservés ; et j'ajouterai ici, pour le cas de deux équations du second degré à deux inconnues, que, lorsqu'il est nécessaire d'obtenir les solutions avec un grand degré d'approximation, on n'est pas dis-

pensé de recourir à cette méthode, après l'emploi de celle qui fait dépendre l'opération de la résolution d'une équation du troisième degré.

J'ai introduit dans les autres parties de l'ouvrage tout ce qui est exigé par les nouveaux Programmes. Mais je ne me suis pas renfermé exclusivement dans les limites qu'ils tracent, et j'ai cru devoir conserver tout ce que l'on comprenait auparavant dans l'enseignement, et les théorèmes remarquables dont Sturm et M. Cauchy ont enrichi l'analyse des équations. J'ai seulement restreint le nombre des exemples et les détails d'une importance secondaire.

Les lecteurs qui voudront se borner aux matières exigées, pourront omettre les chap. VI, VII, VIII, XVII, XVIII et XIX, sauf à recourir, au besoin, à quelques-unes des explications contenues dans les deux premiers. Ils pourront omettre aussi, dans les chap. III et XI, le n° **118** et ceux de **127** à **130**, de **337** à **339** et de **348** à **363**.

Je terminerai en sollicitant, pour ce nouveau Traité, l'attention bienveillante de MM. les Professeurs; et je leur serai reconnaissant des observations qu'ils voudront bien me transmettre.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV. — RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS LITTÉRALES. — CALCUL DES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE V. — ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE VI. — DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. — RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

CHAPITRE VII. — PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES. — FRACTIONS CONTINUES.

CHAPITRE VIII. — ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

ERRATUM. — Page 347, ligne 9, *au lieu de* : Règles des signes, *lisez* : Règle.

PROGRAMMES OFFICIELS

AVEC L'INDICATION DES NUMÉROS QUI S'Y RAPPORTENT.

CONNAISSANCES EXIGÉES POUR LE BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

Calcul algébrique. — Emploi des lettres et des signes comme moyen d'abréviation et de généralisation. — Termes semblables. — Addition et soustraction [nos 1 à 24].

Multiplication. — Règle des signes. — Division des monômes. — Exposant zéro. — Exposé sommaire de la division des polynômes [nos 25 à 49].

Équations du premier degré. — Résolution des équations numériques du premier degré à une ou plusieurs inconnues, par la méthode dite de *substitution*. = Interprétation des valeurs négatives dans les problèmes. — Usage et calcul des quantités négatives. = Des cas d'impossibilité et d'indétermination. = Formules générales pour la résolution d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues. — Discussion complète de ces formules [nos 88 à 114 et 119 à 126].

Équations du second degré à une inconnue. — Résolution. — Double solution — Valeurs imaginaires. = Décomposition du trinôme x^2+px+q en facteurs du premier degré. — Relations entre les coefficients et les racines de l'équation $x^2+px+q=0$ [nos 165 à 171 et 184 à 189].

Des questions de maximum et de minimum qui peuvent se résoudre par les équations du second degré [nos 199 à 203].

Principales propriétés des progressions arithmétiques et des progressions géométriques. = Des logarithmes. — Chaque terme d'une progression arithmétique commençant par zéro est dit le *logarithme* du terme qui occupe le même rang dans une progression géométrique commençant par l'unité. = Si l'on conçoit que l'excès de la raison de la progression par quotient sur l'unité décroisse de plus en plus, les termes de cette progression croîtront par degrés aussi rapprochés que l'on voudra. Étant donné un nombre plus grand que *un*, il existera toujours un terme de la progression, dont la différence avec ce nombre sera moindre que toute quantité donnée. = Le logarithme

d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes des facteurs. — Corollaires relatifs à la division, à l'élévation aux puissances, à l'extraction des racines [nos **268** à **286**].

Logarithmes dont la base est 10. — Tables. — Règle des parties proportionnelles. — De la caractéristique. — Changement qu'elle éprouve quand on multiplie ou quand on divise un nombre par une puissance de 10. — Usage des caractéristiques négatives. = Application des logarithmes aux questions d'intérêts composés et aux annuités [nos **287** à **304**].

ENSEIGNEMENT COMPLÉMENTAIRE, POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Complément des éléments d'algèbre. = Notions sur les nombres incommensurables [nos **226** à **228**]. = Division des polynômes. = Résolution des équations générales du premier degré à plusieurs inconnues. On développera les calculs relatifs au cas de deux équations et à celui de trois équations. On fera connaître la règle générale pour former le dénominateur commun et pour en déduire les numérateurs [nos **115** à **117**]. — Discussion complète des formules générales propres au cas de deux équations. = Lorsque dans l'équation $ax^2+bx+c=0$, a tend vers zéro, l'une des racines croît indéfiniment. — Calcul numérique des deux racines quand a est très-petit [nos **172** à **183**]. = Equations réductibles au second degré [nos **190** à **193**]. = Calcul des valeurs *arithmétiques* des radicaux. = Exposants fractionnaires. — Exposants incommensurables. — Exposants négatifs [nos **308** à **313** et **318** à **320**].

Des progressions et des séries en général. = Progressions arithmétiques et géométriques. — Sommation des termes. = Ce qu'on appelle série. — Convergence et divergence. — Les termes d'une série peuvent décroître indéfiniment sans que la série soit convergente. = Une progression géométrique est convergente si la raison est plus petite que l'unité; divergente, si la raison est plus grande que l'unité. = Une série est convergente lorsque, à partir d'un certain terme, la valeur absolue du rapport d'un terme au précédent est constamment inférieure à un nombre déterminé plus petit que l'unité. = Lorsque les termes d'une série décroissent indéfiniment, et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente [nos **366** à **376**].

Formule du binôme et ses applications. = Arrangements, permutations et combinaisons. = Développement des puissances entières et positives d'un binôme. — Terme général. — Développement de $(a+b\sqrt{-1})^m$ [nos **329** à **336** et **340** à **347**]. = Limite vers la-

quelle tend $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m croît au delà de toute limite [nos 377 et 378]. = Sommation des piles de boulets [364 et 365].

Des logarithmes et de leurs usages. = En formant toutes les puissances d'un nombre quelconque positif, plus grand ou plus petit que 1, on peut reproduire tous les nombres. = Propriétés générales des logarithmes. = Lorsque des nombres sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression arithmétique. = Comment on passe d'un système de logarithmes à un autre système. — Logarithmes Népériens. — Logarithmes vulgaires. — Ce qu'on appelle module d'un système de logarithmes. = Usage des logarithmes vulgaires. — Caractéristiques. — Caractéristiques négatives. Un nombre étant donné, trouver son logarithme par le moyen des Tables de Callet. Un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient. — Usage des parties proportionnelles. = Usage de la règle à calcul. = Résolution des équations exponentielles au moyen des logarithmes. = Intérêts composés. — Annuités [nos 321 à 328].

Des fonctions dérivées. = Développement d'une fonction entière $f(x)$ suivant les puissances croissantes de h, quand on remplace x par $x+h$. — Dérivée d'une fonction entière. = La dérivée d'une fonction quelconque est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, lorsque celui-ci tend vers zéro. = Dérivée d'une fonction de fonction. = Règles pour trouver la dérivée d'une somme, d'un produit, d'une puissance, d'un quotient de fonctions dont les dérivées sont connues. = Dérivées des fonctions circulaires directes et inverses. = Dérivées de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique. = Une fonction est croissante ou décroissante, suivant que sa dérivée est positive ou négative. = Deux fonctions qui ont des dérivées égales ne peuvent différer que par une constante. — Revenir de la dérivée à la fonction primitive, dans les cas où cette opération peut se faire *immédiatement* [nos 379 à 399]. = Application de la théorie des dérivées au développement des fonctions $l(1+x)$ et arc tang x en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de x, lorsque cette variable reste comprise entre -1 et $+1$. = Calcul des logarithmes au moyen de la série qui donne le logarithme de $n+1$, quand on connaît celui de n. — Calcul des logarithmes Népériens. Valeur du module des logarithmes vulgaires. — Calcul des logarithmes vulgaires [nos 400 à 408]. = Calcul du rapport de la circonférence au diamètre d'après la série arc tang x.

Théorie des équations. = Comment varie une fonction entière $f(x)$

quand x varie d'une manière continue entre $-\infty$ et $+\infty$. = Lorsque deux nombres a et b substitués dans une fonction entière $f(x)$ donnent des résultats de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle comprise entre a et b. Toute fonction $f(x)$ qui reste continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, jouit de cette propriété. = Une équation algébrique de degré impair a au moins une racine réelle. — Une équation algébrique de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles [n^{os} 412 à 421]. = Toute équation algébrique $f(x) = 0$, à coefficients réels ou imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, a une racine réelle ou imaginaire de la même forme [n° 423]. (On ne demandera pas à l'examen la démonstration de ce théorème.) = Si a est racine d'une équation algébrique, le premier membre est divisible par $x - a$. Une équation algébrique du degré m a toujours m racines réelles ou imaginaires, et elle ne peut en avoir davantage. — Décomposition du premier membre en facteurs du premier degré. — Relations entre les coefficients d'une équation algébrique et les racines. = Lorsqu'une équation algébrique, dont les coefficients sont réels, a une racine imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, elle a aussi pour racine l'expression conjuguée $a - b\sqrt{-1}$ [n^{os} 424 à 429, 431 et 432]. = Dans une équation algébrique, complète ou incomplète, le nombre des racines positives ne peut pas surpasser le nombre des variations; conséquence relative au nombre des racines négatives [n^{os} 439 à 442]. (On ne demandera à l'examen que la démonstration de ce théorème de Descartes.) = Recherche du produit des facteurs du premier degré communs à deux fonctions entières de x. — Recherche des racines communes à deux équations dont les premiers membres sont des fonctions entières de l'inconnue [n° 450]. = Comment on reconnaît qu'une équation algébrique a des racines égales, et comment alors on ramène sa résolution à celle d'autres équations de degré moindre dont les racines sont inégales [n^{os} 460 à 467]. = Recherche des racines commensurables d'une équation algébrique à coefficients commensurables [n^{os} 484 à 489].

Des différences. = Différence des divers ordres. = Etant donnés $m+1$ nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$, trouver : 1° l'expression du terme général u_n en fonction du premier terme u_0 et de ses différences successives; 2° l'expression de $\Delta^n u_0$ en fonction des nombres proposés. = La différence de l'ordre m d'une fonction entière du degré m est constante si la différence de la variable est elle-même constante. = Connaissant les résultats de la substitution de m nombres entiers consécutifs dans une fonction entière du degré m, on obtient facilement,

au moyen des différences, les résultats de la substitution de tous les autres nombres entiers positifs ou négatifs. — Application au cas d'une fonction entière du troisième degré dont on connaît les valeurs correspondantes aux valeurs $-1, 0, +1$, de la variable. = Formules d'interpolation. — Application de la méthode d'interpolation de Newton à la représentation exacte d'une fonction entière $f(x)$ du degré m dont on connaît les valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots u_m$ correspondantes aux valeurs de x, x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h, \ldots x_0 + mh$. Si la différence h et les quantités u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots \Delta^m u_0$ sont positives, $x_0 + (m - 1)h$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ [n^os^ **468** à **476** et **528** à **533**].

Application de la théorie des différences à la résolution numérique des équations. = Séparation des racines d'une équation algébrique par la substitution de différents nombres à l'inconnue. — Étude spéciale du cas d'une équation du troisième degré. Substitution de nombres entiers par le moyen des différences. Substitution de nombres équidistants d'*un dixième* entre deux nombres entiers consécutifs; de nombres équidistants d'*un centième* entre deux nombres consécutifs de dixièmes, etc., soit pour séparer les racines, soit pour en approcher. Ces dernières substitutions s'effectuent au moyen de nouvelles différences, déduites des premières [nos **477** à **485**]. — Usage des constructions graphiques dans l'application de la méthode précédente. = Recherche des racines d'une équation transcendante. Lorsqu'on a substitué des nombres équidistants et assez voisins pour que les différences des résultats puissent être considérées comme égales entre elles à partir d'un certain ordre, on continue l'opération comme s'il s'agissait d'une équation algébrique [nos **521** à **523**]. = Ayant obtenu, avec un certain degré d'approximation, une racine d'une équation algébrique ou transcendante, en approcher davantage par la méthode de Newton [nos **497** à **511**]. Usage des constructions graphiques pour l'application de cette méthode.

Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. = Toute fraction rationnelle $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ est décomposable en une partie entière et en diverses fractions simples. — La décomposition ne peut se faire que d'une seule manière. — Moyens de l'effectuer quand on connaît les facteurs binômes qui divisent le dénominateur $f(x)$ [nos **512** à **520**].

Calcul des solutions réelles de deux équations du second degré à deux inconnues [nos **524** à **527**].

TRAITÉ

D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

Signes algébriques. — Emploi des lettres comme moyen d'abréviation et de généralisation.

1. L'objet que l'on a principalement en vue dans l'Algèbre, est d'établir des méthodes par lesquelles on puisse découvrir les opérations qu'il faut exécuter sur des nombres donnés, afin d'obtenir d'autres nombres inconnus qui dépendent des premiers suivant des conditions déterminées.

2. Supposons que l'on ait à résoudre la question suivante : *Partager* 890 *francs entre trois personnes, de telle sorte, que la seconde ait* 115 *francs de plus que la première, et la troisième* 180 *francs de plus que la seconde.*

Si l'on connaissait une des parts, la première par exemple, on obtiendrait aisément les deux autres.

Or, la seconde part devant être égale à la première augmentée de 115 francs, la troisième part, qui doit être égale à la seconde augmentée de 180 francs, sera égale à la première augmentée de 115 francs plus 180 francs, ou à la première augmentée de 295 francs.

Donc la somme des trois parts sera formée de trois fois la première part plus 115 francs, plus encore 295 francs : ce qui est la même chose que trois fois la première part plus 410 francs.

Cette somme doit être égale au nombre à partager.

Donc trois fois la première part plus 410 francs doivent égaler 890 francs.

Donc trois fois la première part égaleront 890 francs moins 410 francs, ou 480 francs.

Donc la première part égalera le tiers de 480 francs, ou 160 francs.

Puisque la première personne a 160 francs, la seconde aura 160 francs plus 115 francs, ou 275 francs; et la troisième aura 275 francs plus 180 francs, ou 455 francs. Ces trois sommes réunies font 890 francs; ce qui prouve l'exactitude de la solution.

3. Cet exemple donne un aperçu des raisonnements propres à conduire à la résolution des questions que l'on peut se proposer à l'égard des nombres, et il montre que ces raisonnements ne peuvent être exprimés sans la répétition fréquente de certains termes qui indiquent ou les nombres que l'on cherche, comme ces mots plusieurs fois répétés dans la question ci-dessus, *première part*, *seconde part*, *etc.*; ou les relations qui existent entre les quantités que l'on considère, et les opérations par lesquelles elles se déduisent les unes des autres, comme ces mots *égale à*, *plus* ou *augmenté de*, *moins* ou *diminué de*, *etc.* On s'est donc trouvé naturellement conduit à adopter des signes particuliers pour représenter d'une manière abrégée ces sortes d'expressions.

4. On indique l'addition par le signe $+$ qu'on prononce *plus*. Ainsi, $31+12+8$ signifie qu'on doit faire la somme des trois nombres 31, 12 et 8.

La soustraction s'indique par le signe $-$ qu'on prononce *moins*. Ainsi, $31-12$ signifie que l'on doit soustraire 12 de 31.

On exprime la multiplication par le signe $\times$ qu'on lit *multiplié par*, ou en mettant un point entre les facteurs. Ainsi, pour indiquer le produit des deux nombres 31 et 5, on écrit 31×5, ou 31.5. Pareillement, pour indiquer le produit des nombres 31, 5, 8 et 11, c'est-à-dire le résultat qu'on obtiendra en multipliant successivement 31 par 5, le produit par 8 et le nouveau produit par 11, on écrit $31 \times 5 \times 8 \times 11$, ou $31.5.8.11$.

Pour exprimer qu'un nombre doit être divisé par un autre,

on écrit celui-ci au-dessous du premier, et on les sépare par une barre, ou bien on écrit le diviseur à la suite du dividende, en les séparant par deux points. Ainsi, pour indiquer le quotient de 8 divisé par 6, on écrit $\frac{8}{6}$, ou $8:6$.

On exprime l'égalité de deux quantités par le signe $=$ qui se prononce *égale*. Ainsi, $3+5-2=6$ signifie 3 plus 5 moins 2 égale 6.

Les mots *plus grand, plus petit,* s'indiquent par le signe $>$, l'ouverture de ce signe étant tournée vers la plus grande quantité. Ainsi, pour exprimer l'inégalité des deux fractions $\frac{7}{9}$ et $\frac{11}{14}$, dont la seconde est plus grande que la première, on écrit $\frac{11}{14}>\frac{7}{9}$, ou $\frac{7}{9}<\frac{11}{14}$.

Pour représenter un nombre inconnu qu'il s'agit de déterminer, on emploie une des dernières lettres de l'alphabet, x, y, z, *etc.*

Quand un nombre qu'on a désigné par une lettre doit être multiplié par un autre nombre connu, on se contente de placer ce nombre devant la lettre. Ainsi, pour marquer qu'un nombre qu'on a représenté par x doit être multiplié par 5, on écrit $5x$; si le nombre x doit être multiplié par $\frac{3}{4}$, le produit s'exprime par $\frac{3}{4}x$.

5. Au moyen de ces conventions, on écrit les raisonnements du n° 2 comme on le voit ci-après :

La première part étant................	x,
la seconde part sera.....................	$x+115$,
et la troisième, $x+115+180$, ou........	$x+295$.
Il suit de là que la somme des trois parts sera...	$3x+115+295$,
ou simplement..............................	$3x+410$;
donc..	$3x+410=890$.
Donc..	$3x=890-410$,
ou, ce qui revient au même...............	$3x=480$.
Donc..	$x=\frac{480}{3}$,
et, en effectuant la division...............	$x=160$.

De cette manière on substitue à l'écriture ordinaire une écriture plus rapide, qui permet mieux de voir à chaque instant, et d'un seul coup d'œil, le point où la question a été amenée; et la solution est ainsi rendue à la fois plus prompte et plus facile.

6. On a obtenu la première part, qui avait été désignée par x, en retranchant de 890, qui est le nombre à partager, la somme 410 formée de l'excès 115 de la seconde part sur la première et de ce nombre 115 augmenté de l'excès 180 de la troisième part sur la seconde, et en divisant le reste par 3.

Si les nombres donnés 890, 115 et 180 étaient remplacés par d'autres, on serait conduit à des opérations exactement semblables.

Ainsi, que 1250 soit le nombre à partager, 170 l'excès de la seconde part sur la première, et 220 l'excès de la troisième sur la seconde; on fera la somme de 170 et 220, et l'on ajoutera 170 à cette somme : ce qui revient à faire la somme de deux fois 170 et 220; on soustraira cette somme 560 de 1250; enfin on divisera le reste 690 par 3. Le quotient, qui est 230, sera la valeur de la plus petite part. Les deux autres parts seront $230 + 170$, ou 400, et $400 + 220$, ou 620. La somme de ces trois nombres est 1250; ce qui prouve l'exactitude de la solution.

7. Il est rare que l'on puisse parvenir à reconnaître d'après un seul exemple par quelles opérations les nombres inconnus dépendent de ceux qui sont donnés. Quand les questions ne sont pas d'une grande simplicité, les nombres connus se confondent par les opérations dans lesquelles ils se trouvent successivement engagés, à mesure que l'on s'approche de la solution; en sorte que les derniers résultats n'en laissent apercevoir aucune trace. A la vérité, il semble que l'on pourrait éviter cette altération des nombres par les opérations, en les laissant toutes indiquées, sans en effectuer aucune; mais on serait ainsi conduit à des écritures dont la complication occasionnerait à l'esprit une trop grand fatigue.

Ces difficultés ont fait naître l'idée de représenter les nombres connus par des lettres, au lieu de leur attribuer des va-

leurs déterminées; et l'on se sert pour cet usage des premières lettres de l'alphabet, a, b, c, *etc.*, afin de distinguer aisément ces nombres, dans tout le cours de la résolution, de ceux que l'on cherche et que l'on désigne par les dernières lettres.

8. Si l'on prend pour exemple de ce moyen de généralisation la question du n° 2, elle sera présentée comme il suit :

Partager un nombre a *en trois parties, de telle sorte, que la seconde surpasse la première de* b, *et que la troisième surpasse la seconde de* c.

La première partie étant.	x,
la seconde sera.	$x+b$,
et la troisième.	$x+b+c$;
donc la somme des trois parties sera.	$3x+2b+c$.

On devra donc avoir l'égalité

$$3x+2b+c=a.$$

On conclut de cette égalité, que la quantité $3x$ doit être égale au nombre a diminué de $2b+c$, ou, ce qui revient au même, à a diminué de $2b$ et diminué encore de c; ainsi

$$3x=a-2b-c,$$

et puisque x est le tiers de $3x$, on obtient enfin

$$x=\frac{a-2b-c}{3}.$$

Le dernier résultat est l'expression abrégée de cette règle :

Retranchez du nombre à partager le double de l'excès de la moyenne partie sur la plus petite, et retranchez du reste l'excès de la plus grande partie sur la moyenne; puis divisez le résultat par 3; *le quotient sera la plus petite partie.*

9. Les égalités qui servent à déterminer des nombres inconnus, comme l'égalité ci-dessus $3x+2b+c=a$, sont appelées *équations;* et les expressions qui indiquent les opérations qu'on doit faire sur les nombres connus afin d'obtenir ceux que l'on cherche, reçoivent le nom de *formules*. Pour appliquer la formule $x=\frac{a-2b-c}{3}$ à l'exemple du n° 2,

on remplace a par 890, b par 115, c par 180, c'est-à-dire que l'on pose $a = 890$, $b = 115$, $c = 180$; on trouve ainsi

$$x = \frac{890 - 2 \times 115 - 180}{3} = 160.$$

10. Supposons que l'on veuille *partager le nombre* a *en quatre parties, de manière que la deuxième surpasse la première de* b, *que la troisième surpasse la seconde de* c, *et la quatrième surpasse la troisième de* d.

La première partie étant........	x,
la seconde sera..................	$x + b$,
la troisième.....................	$x + b + c$,
et la quatrième..................	$x + b + c + d$;
donc la somme des quatre parties sera	$4x + 3b + 2c + d$.

On devra donc avoir l'équation

$$4x + 3b + 2c + d = a,$$

par conséquent,

$$4x = a - 3b - 2c - d,$$

$$x = \frac{a - 3b - 2c - d}{4}.$$

Cette formule exprime que, *Pour obtenir la plus petite partie, il faudra soustraire du nombre à partager* 3 *fois l'excès de la seconde partie sur la première,* 2 *fois l'excès de la troisième sur la seconde, et l'excès de la quatrième sur la troisième; puis diviser le résultat par* 4.

11. Supposons encore que l'on demande de *partager le nombre* a *en cinq parties, de manière que la deuxième surpasse la première de* b, *que la troisième surpasse la deuxième de* c, *la quatrième surpasse la troisième de* d, *et la cinquième surpasse la quatrième de* e.

En raisonnant comme dans les exemples précédents, on parviendra à la formule

$$x = \frac{a - 4b - 3c - 2d - e}{5};$$

c'est-à-dire que, *Pour obtenir la plus petite partie, il faudra soustraire du nombre à partager 4 fois l'excès de la seconde partie sur la première, 3 fois l'excès de la troisième sur la seconde, 2 fois l'excès de la quatrième sur la troisième, et enfin l'excès de la cinquième sur la quatrième; puis diviser le résultat par* 5.

12. L'uniformité des règles auxquelles on parvient dans les différents cas que nous venons de considérer, permet de conclure que, quel que soit le nombre des parties, si chacune d'elles doit surpasser la précédente d'une quantité donnée, il faudra soustraire du nombre à partager l'excès de la seconde partie sur la première, répété autant de fois moins une qu'il doit y avoir de parties; l'excès de la troisième partie sur la seconde, répété autant de fois moins deux qu'il doit y avoir de parties; l'excès de la quatrième sur la troisième, répété autant de fois moins trois qu'il doit y avoir de parties; et ainsi de suite; de sorte que l'on soustraira seulement deux fois l'excès de la pénultième partie sur l'antépénultième, et une seule fois l'excès de la dernière partie sur la pénultième. Le reste divisé par le nombre des parties donnera la valeur de la plus petite partie.

Que le nombre à partager soit représenté par a, l'excès de la seconde partie sur la première par b, l'excès de la troisième sur la seconde par c, l'excès de la quatrième sur la troisième par d, ainsi de suite, enfin l'excès de la pénultième sur l'antépénultième par k, l'excès de la dernière sur la pénultième par l; et désignons le nombre des parties par n.

Pour indiquer que le nombre b doit être répété autant de fois moins une qu'il y a de parties, ou $n-1$ fois, on enferme la quantité $n-1$ entre deux parenthèses, et l'on écrit $(n-1)\times b$, ou plus simplement $(n-1)\,b$. On représente pareillement par $(n-2)\,c$ le produit résultant de l'excès c répété autant de fois qu'il y a de parties moins deux; par $(n-3)\,d$ le produit résultant de l'excès d répété autant de fois qu'il y a de parties moins trois, etc. Alors, en désignant par x la plus petite partie, on écrit la règle qui vient d'être

énoncée, comme on le voit ci-dessous :

$$x = \frac{a-(n-1)b-(n-2)c-(n-3)d\ldots-2k-l}{n}.$$

On doit d'ailleurs entendre par les points placés entre les quantités $(n-3)\,d$ et $2k$, que, pour chaque valeur de n, il faudra écrire entre ces quantités les excès de chaque partie sur la précédente, depuis la cinquième partie jusqu'à l'antépénultième, multipliés, comme les précédents, par des nombres qui décroissent d'une unité à partir de $n-4$.

Cet exemple fait ressortir la simplicité de l'écriture algébrique, et il montre quel degré de généralité on peut faire acquérir à la résolution d'une question, au moyen de cette écriture.

13. Suivant ce qu'on vient de voir dans le dernier article, et ce qui a été dit au n° **4**, pour indiquer un produit dont les facteurs sont représentés par des lettres, on se contente d'écrire ces lettres les unes à côté des autres, sans mettre aucun signe entre elles; de sorte que les expressions ab, abc sont regardées comme équivalentes à celles-ci : $a\times b$, $a\times b\times c$.

Il faut remarquer, en outre, qu'on ne doit pas confondre les expressions $(a+b)\times c$ et $a+b\times c$; dans la première, les parenthèses servent à indiquer que l'addition des nombres a et b doit être effectuée avant qu'on fasse la multiplication; tandis que l'expression $a+b\times c$ signifie que l'on doit ajouter à a le produit $b\times c$, ou bc. Par exemple, si l'on a $a=5$, $b=3$, $c=7$, l'expression $(a+b)\times c$ vaut 8×7, ou 56, et l'expression $a+b\times c$ vaut $5+21$, ou 26.

14. On a souvent à résoudre cette question : *Trouver deux nombres dont on connaît la somme et la différence.* En représentant par a la somme donnée des deux nombres, et par b leur différence, la question revient à partager le nombre a en deux parties telles, que l'une surpasse l'autre de b; elle n'est donc qu'un cas particulier de la question du n° **12**. La plus petite partie, ou le plus petit des deux nombres demandés, est

$$\frac{a-b}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2}-\frac{b}{2}.$$

La plus grande partie est $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$. Or b est la même chose que $\frac{2b}{2}$, et $\frac{2b}{2} - \frac{b}{2}$ équivaut à $\frac{b}{2}$. L'expression de la plus grande partie est donc

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Le plus petit des deux nombres est égal à la moitié de la somme moins la moitié de la différence; et le plus grand est égal à la moitié de la somme plus la moitié de la différence.

Des opérations qui peuvent être faites sur les quantités exprimées au moyen des lettres.

15. Les questions dont nous nous sommes occupés jusqu'ici n'avaient d'autre objet que de faire connaître l'origine et l'utilité des notations algébriques. Nous allons maintenant résoudre un problème qui fera voir à quelles sortes de règles ces notations donnent naissance.

On propose à un marchand un lot de 40 pièces d'étoffe de deux qualités différentes, au prix commun de 32 francs par pièce. Le marchand juge qu'en achetant à ce prix, il pourra faire un bénéfice de 5 francs sur chaque pièce de la qualité supérieure, et il perdra 4 francs sur chacune des autres. Combien doit-il exiger qn'on lui livre de pièces de la meilleure qualité, pour qu'il puisse gagner sur la totalité une somme égale au dixième du prix d'achat?

Représentons par x le nombre des pièces que le marchand vendra avec bénéfice; le nombre de celles qu'il vendra avec perte sera $40 - x$. Le bénéfice produit par la vente de x pièces de la meilleure qualité sera x fois 5 francs, ou $5x$ francs; la perte occasionnée par la vente des pièces de la qualité inférieure sera exprimée par le produit de $40 - x$ par 4, ou $(40 - x) \times 4$; et comme le bénéfice doit excéder la perte de 128 francs, on devra avoir

$$5x - (40 - x) \times 4 = 128.$$

Cette équation présente une complication qui n'existait pas

dans celles des questions précédentes, et qui consiste en ce que le nombre inconnu se trouve engagé dans une soustraction dont le résultat doit être répété quatre fois et soustrait ensuite de la quantité $5x$. Mais avec un peu d'attention, on découvre facilement le moyen de faire disparaître cette complication.

D'abord, on peut obtenir une expression du produit $(40 - x) \times 4$ délivrée de parenthèses. Il est clair, en effet, que ce produit doit être égal à celui de 40 par 4, diminué de celui de x par 4, c'est-à-dire à $160 - 4x$. Pour indiquer que la quantité $160 - 4x$ doit être soustraite de $5x$, il faudrait écrire $5x - (160 - 4x)$. Mais si l'on soustrait d'abord 160 de $5x$, le reste $5x - 160$ sera trop faible de $4x$, puisqu'on aura soustrait une quantité trop forte de $4x$; donc le véritable reste est $5x - 160 + 4x$.

L'équation ci-dessus se change ainsi dans la suivante :

$$5x - 160 + 4x = 128.$$

Or $5x - 160 + 4x$ est évidemment la même chose que $9x - 160$; donc

$$9x - 160 = 128.$$

D'où l'on conclut

$$9x = 128 + 160, \quad \text{ou} \quad 9x = 288,$$

$$x = \frac{288}{9}, \quad \text{ou} \quad x = 32.$$

Il faut donc que le marchand reçoive 32 pièces de la meilleure qualité. En effet, s'il vend 32 pièces avec un bénéfice de 5 francs par pièce, il gagne 160 francs; en vendant les 8 autres pièces à 4 francs de perte, il perd 32 francs; le gain qu'il fait sur la totalité est donc 160 francs moins 32 francs, ou 128 francs.

16. La question que nous venons de traiter peut être généralisée de cette manière :

Partager un nombre a *en deux parties telles, que, le produit de la seconde partie par* c *étant retranché du produit de la première partie par* b, *le reste soit égal à un nombre connu* d.

Nommons x la première partie, la seconde sera $a - x$; et l'énoncé du problème se traduira par l'équation

$$bx - (a - x) \times c = d.$$

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on voit que, au lieu de $(a - x) \times c$, on peut écrire $ac - cx$; et pour exprimer le reste $bx - (ac - cx)$, on peut écrire $bx - ac + cx$. L'équation ci-dessus revient donc à

$$bx - ac + cx = d.$$

La somme $bx + cx$ exprime que x est pris autant de fois qu'il y a d'unités dans la somme $b + c$, ce qui peut aussi s'indiquer par $(b + c)\,x$. On peut donc écrire encore l'équation comme il suit :

$$(b + c)\,x - ac = d;$$

alors on en conclut aisément

$$(b + c)\,x = d + ac,$$

$$x = \frac{d + ac}{b + c}.$$

En mettant dans cette formule, à la place des lettres, les nombres que nous avons d'abord considérés, $a = 40$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 128$, on trouve

$$x = \frac{128 + 40 \times 4}{5 + 4} = \frac{128 + 160}{5 + 4} = \frac{288}{9} = 32.$$

17. En étendant et en généralisant les considérations qui ont amené, pour la résolution de la question précédente, le changement de l'expression $bx - (a - x) \times c$ en $bx - ac + cx$, et de celle-ci en $(b + c)\,x - ac$, on établit, pour les quantités exprimées algébriquement, des opérations qui reçoivent les mêmes noms que celles de l'arithmétique. Il y a seulement cette différence, entre les opérations algébriques et celles de l'arithmétique, que, *Dans l'algèbre*, comme le fait remarquer Lacroix, *les résultats des différentes opérations ne sont encore que des indications de calculs à effectuer, et ne présentent réellement que des transformations des opérations primitivement indiquées en d'autres qui produisent le même*

effet, mais dont l'écriture algébrique est plus simple, ou mieux appropriée aux besoins de la question que l'on traite.

Ces opérations constituent le *calcul algébrique.*

Explication de quelques dénominations. — Réduction des termes semblables.

18. On appelle *quantité algébrique,* ou *quantité littérale,* toute indication d'une quantité au moyen des lettres et des signes des opérations.

On nomme *termes* les parties d'une quantité algébrique qui ont entre elles un des deux signes $+$ et $-$.

On comprend ordinairement dans le terme, avec une de ces parties, le signe qui la précède; et l'on nomme termes *additifs* ou *positifs* ceux dont le signe est $+$, termes *soustractifs* ou *négatifs* ceux dont le signe est $-$.

Une quantité qui n'a qu'un terme est un *monôme;* celle qui en a deux, un *binôme;* celle qui en a trois, un *trinôme.* Celles qui en ont un plus grand nombre reçoivent le nom général de *polynômes.*

Un nombre par lequel une quantité littérale doit être multipliée, se nomme *coefficient.*

On dit que des termes sont *semblables* lorsqu'ils diffèrent seulement par les coefficients et les signes, comme $+3a$, $+2a$, et $-\frac{2}{3}a$.

19. Lorsqu'un polynôme contient des termes semblables, il peut être simplifié. Soit, par exemple, le polynôme

$$5b + 11a - 3b + 8c + 2b - d - 10b.$$

On peut écrire, en rapprochant les termes semblables,

$$11a + 5b + 2b - 3b - 10b + 8c - d.$$

Les deux termes $+5b$ et $+2b$ équivalent à $7b$. Au lieu de retrancher successivement $3b$ et $10b$, il revient au même de retrancher $13b$. Enfin, lorsqu'on ajoute $7b$ à une quantité et qu'on retranche de la somme $13b$, le résultat est le même que si l'on avait seulement retranché $6b$.

Le polynôme proposé revient donc à

$$11a - 6b + 8c - d.$$

L'opération qu'on vient de faire est *la réduction des termes semblables*; elle s'effectue d'après la règle suivante :

On fait la somme des coefficients des termes positifs, celle des coefficients des termes négatifs; on retranche la plus petite de ces deux sommes de la plus grande; on met devant le reste le signe des termes dont les coefficients ont donné la plus grande somme; et l'on écrit à la suite la quantité littérale commune à tous les termes.

Un terme qui n'a pas de coefficient doit être regardé comme ayant pour coefficient l'unité; car la réunion des deux termes $+ 3a$ et $+ a$ équivaut à $4a$; celle des deux termes $+ 3a$ et $- a$ équivaut à $2a$.

20. Le *terme* d'un polynôme écrit le premier sans aucun signe devant lui, doit être considéré comme ayant le signe $+$, puisqu'il fait partie de ceux qui s'ajoutent dans le polynôme. Quand il arrive par les réductions que le premier terme prend le signe $-$, on ne peut pas omettre ce signe, et lorsqu'on veut effectuer les opérations indiquées, il faut changer l'ordre des termes et prendre pour le premier un de ceux qui ont le signe $+$.

Addition et soustraction des monômes et des polynômes.

21. L'addition et la soustraction des monômes dissemblables ne peuvent que s'indiquer. Quand les monômes sont semblables, on fait la réduction selon la règle ci-dessus.

22. Supposons qu'on doive ajouter à une quantité A le polynôme $c - d + f$. Si la quantité A devait être augmentée de c seulement, le résultat serait exprimé par $A + c$; si, au lieu d'ajouter c à A, il faut ajouter à A la quantité c diminuée de d, la somme $A + c$ sera trop forte de d; il faudra donc la diminuer de d, ce qui donnera $A + c - d$; et puisque ce n'est pas $c - d$ que l'on doit ajouter, mais cette quantité augmentée

de f, la somme $A+c-d$ doit être augmentée de f, ce qui donne $A+c-d+f$.

Si la lettre A représente un polynôme, on pourra mettre ce polynôme à la place de A dans la dernière expression, sans que le sens de cette expression soit altéré.

Par conséquent, *On ajoute des polynômes en les écrivant à la suite les uns des autres, et conservant à tous les termes les signes qu'ils ont.*

23. Supposons que l'on ait à soustraire de A le polynôme $c-d+f$. Si l'on devait soustraire c de A, le reste s'exprimerait par $A-c$; si au lieu de c, c'est $c-d$ que l'on doit soustraire, le reste $A-c$ sera trop petit de d; il faudra donc l'augmenter de d, ce qui donnera $A-c+d$; et puisque ce n'est pas $c-d$ qu'il faut soustraire, mais cette quantité augmentée de f, le reste $A-c+d$ doit être diminué de f, ce qui donne $A-c+d-f$.

Il suit de là que, *Pour soustraire un polynôme, il faut l'écrire à la suite de la quantité dont on doit le soustraire, en changeant le signe de chaque terme.*

24. Quand on a effectué l'addition ou la soustraction, comme on vient de l'expliquer, il faut faire, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables; et pour rendre cette dernière partie de l'opération plus facile, on écrit les polynômes au-dessous les uns des autres, comme on le voit dans les exemples qui suivent :

Exemples d'addition.

1°. $$\begin{array}{r} 4a-2b+3c \\ 7b-5a-2c \\ b-3a+2c \\ \hline \end{array}$$

Somme $-4a+6b+3c$.

2°. $$\begin{array}{l} 4a-\frac{3}{5}b+c+\frac{2}{3} \\ 5a-3c+2d-\frac{1}{4} \\ 8b-5f+3 \\ \hline \end{array}$$

Somme $9a+\frac{37}{5}b-2c+2d-5f+\frac{41}{12}$.

Exemples de soustraction.

1°.	De $6a - 2b + 3c$	2°.	De $5a - 2b + 3c$
soustraire	$3a - \frac{2}{3}b + 2c.$	soustraire	$8b - 2c - 5d + 3$
Reste	$6a - 2b + 3c$	Reste	$5a - 2b + 3c$
	$-3a + \frac{2}{3}b - 2c$		$-8b + 2c + 5d - 3$
Reste réduit	$3a - \frac{4}{3}b + c.$	Reste réduit	$5a - 10b + 5c + 5d - 3.$

Multiplication des monômes.

25. Lorsqu'un nombre doit être multiplié successivement par lui-même, on indique le produit en écrivant à la droite de ce nombre et un peu au-dessus, celui qui indique combien de fois il doit être facteur. Cet indicateur reçoit le nom d'*exposant,* et le produit prend celui de *puissance*. Ainsi, au lieu de aaa, on écrit a^3; le nombre 3 est l'exposant, et il marque la puissance *troisième*. La *deuxième* puissance et la *troisième* reçoivent les noms de *carré* et de *cube*.

Le nombre dont on a formé une puissance est la *racine* de cette puissance. Ainsi a est la racine *carrée* ou *deuxième* de a^2, la racine *cubique* ou *troisième* de a^3, la racine *quatrième* de a^4, etc.

26. On démontre dans les Traités d'Arithmétique que le produit de plusieurs nombres est le même dans quelque ordre que l'on fasse les multiplications.

Il résulte de ce principe, que, lorsqu'un nombre doit être multiplié par le produit de plusieurs facteurs, on peut le multiplier successivement par les facteurs; car, si le nombre a est multiplié par le produit bcd, le résultat de l'opération est le même que si l'on multipliait bcd par a; il est donc $bcd \times a$, ou $bcda$, ou $abcd$.

Un produit est multiplié par un nombre quand un des facteurs est multiplié par ce nombre; car, le produit $bcd \times a$ étant équivalent à $cabd$, il est le produit des trois facteurs ca, b et d.

27. Une quantité littérale composée de plusieurs facteurs, mais dans laquelle il n'y a aucune interposition des signes $+$ et $-$, comme $3a^2b^3c$, est un monôme. La quantité $3a^2b - 5abc + 7d^2f$ est un polynôme de trois termes, ou un trinôme.

Un monôme tel que $3a^2b^3c$ pouvant être regardé comme l'indication du produit de a^2b^3c par 3, tout ce qui a été dit précédemment au sujet des termes semblables s'applique à des termes quelconques formés des mêmes lettres avec les mêmes exposants. Ainsi, les termes $5a^2b^3c$ et $3a^2b^3c$ sont semblables; les expressions $5a^2b^3c + 3a^2b^3c$, $5a^2b^3c - 3a^2b^3c$ se réduisent, l'une à $8a^2b^3c$, l'autre à $2a^2b^3c$. Les deux termes $3a^2b$ et $3ab^2$ ne sont pas semblables, et les expressions $3a^2b + 3ab^2$, $3a^2b - 3ab^2$, ne sont pas susceptibles de réduction.

28. Soit à multiplier $5a^3b^2c$ par $3a^2b^4d^2$.

On indiquerait le produit en écrivant ces quantités à la suite l'une de l'autre, et mettant entre elles le signe $\times$ ou un point; on pourrait même ne mettre aucun signe, puisque la multiplication proposée revient à multiplier successivement la première quantité par les facteurs de la seconde, 3, a^2, b^4, d^2. Mais on peut obtenir une expression plus simple; et c'est en cela que consiste *la multiplication des monômes.*

Pour multiplier $5a^3b^2c$ par 3, il suffit de multiplier le facteur 5 par 3, ce qui donne $15a^3b^2c$. On peut multiplier $15a^3b^2c$ par a^2, en multipliant a^3 par a^2. Comme a^3 est l'abréviation de aaa, et a^2 celle de aa, le produit de a^3 par a^2 est $aaaaa$ ou a^5, celui de $15a^3b^2c$ par a^2 est donc $15a^5b^2c$. On voit de même que le produit de $15a^5b^2c$ par b^4 est $15a^5b^6c$; et pour indiquer que ce dernier produit doit être multiplié par d^2, on doit écrire à sa suite le facteur d^2, ce qui donne $15a^5b^6cd^2$.

D'après cet exemple, *Pour faire le produit de deux monômes, on multiplie entre eux les coefficients; on écrit toutes les lettres contenues dans ces monômes, on donne à chaque lettre commune un exposant égal à la somme des exposants qu'elle a dans les deux facteurs, et l'on conserve aux lettres non communes les exposants qu'elles ont.*

Lorsqu'une lettre n'a pas d'exposant, il faut la considérer comme ayant pour exposant l'unité; car le produit de a^3 par a est a^4.

Multiplication des polynômes.

29. Soit à multiplier un polynôme $a + b - c$ par un monôme m.

On indiquerait le produit en écrivant $(a + b - c) \times m$; mais on peut en obtenir une autre expression.

On multipliera la somme $a + b$ par m en multipliant chacune des parties par m, ce qui donne $am + bm$; mais le multiplicande $a + b$ étant trop grand de c, son produit par m sera trop grand de celui de c par m ou cm. Le produit proposé est donc

$$am + bm - cm.$$

30. Considérons actuellement le produit de deux polynômes $a + b - c$ et $m + n - p$, qu'on indique en écrivant $(a + b - c) \times (m + n - p)$.

Si l'on suppose que l'on ait effectué les opérations indiquées dans le premier polynôme, le produit pourra être formé suivant ce que l'on vient de voir pour la multiplication d'un polynôme par un monôme, et il sera

$$m \times (a + b - c) + n \times (a + b - c) - p \times (a + b - c).$$

Mais $m \times (a + b - c) = am + bm - cm$. Les produits suivants sont de même $an + bn - cn$, et $ap + bp - cp$. En faisant l'addition des deux premiers produits partiels et soustrayant le troisième, on a pour le produit demandé

$$am + bm - cm + an + bn - cn - ap - bp + cp.$$

Suivant la dernière expression, *Le produit de la multiplication d'un polynôme par un polynôme est formé de tous les produits partiels qu'on obtient en multipliant tous les termes de l'un des polynômes par tous ceux de l'autre; les produits partiels ayant les signes des termes du multiplicande quand le terme du multiplicateur a le signe +, et les signes contraires à ceux des termes du multiplicande quand le terme du multiplicateur a le signe —.*

31. En développant les différents cas de cette règle relativement aux signes, afin de la rendre plus sensible, on y trouve celles qui suivent :

Un terme qui a le signe $+$, multiplié par un terme qui a le signe $+$, donne un produit qui a aussi le signe $+$;

Un terme qui a le signe $-$, multiplié par un terme qui a le signe $+$, donne un produit qui a le signe $-$;

Un terme qui a le signe $+$, multiplié par un terme qui a le signe $-$, donne un produit qui a le signe $-$;

Un terme qui a le signe $-$, multiplié par un terme qui a le signe $-$, donne un produit qui a le signe $+$.

On exprime abréviativement ces quatre règles en disant que $+$ *par* $+$ *et* $-$ *par* $-$ *donnent* $+$; $+$ *par* $-$ *et* $-$ *par* $+$ *donnent* $-$.

32. Pour la commodité des calculs, on écrit les termes de chacun des facteurs selon l'ordre croissant ou décroissant des exposants d'une lettre : c'est ce qu'on appelle *ordonner* les polynômes. On dispose, en outre, l'opération comme on le voit dans l'exemple ci-dessous :

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Multiplicande} & & 5a^3 & -\ 4a^2b & +\ 5ab^2 & -\ 3b^3 & \\
\text{Multiplicateur} & & 4a^2 & -\ 5ab & +\ 2b^2 & & \\
\hline
 & \left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right. & 20a^5 & -\ 16a^4b & +\ 20a^3b^2 & -\ 12a^2b^3 & \\
\text{Produits partiels} & & & -\ 25a^4b & +\ 20a^3b^2 & -\ 25a^2b^3 & +\ 15ab^4 \\
 & & & & +\ 10a^3b^2 & -\ 8a^2b^3 & +\ 10ab^4 - 6b^5 \\
\hline
\text{Produit total réduit} & & 20a^5 & -\ 41a^4b & +\ 50a^3b^2 & -\ 45a^2b^3 & +\ 25ab^4 - 6b^5.
\end{array}$$

La première ligne des produits partiels contient les produits de tous les termes du multiplicande par le premier terme $4a^2$ du multiplicateur : ce terme étant censé avoir le signe $+$, les produits qu'il donne ont les mêmes signes que les termes du multiplicande. On observe d'ailleurs, pour chacun de ces produits, la règle qui a éte donnée précédemment à l'égard de la multiplication des monômes (n° 28).

La seconde ligne contient les produits de tous les termes du multiplicande par le second terme $-5\,ab$ du multiplicateur; comme ce terme a le signe $-$, tous les produits qu'il donne

ont les signes contraires à ceux des termes correspondants du multiplicande.

La troisième ligne contient les produits de tous les termes du multiplicande par le troisième terme $+ 2b^2$ du multiplicateur; comme ce terme a le signe $+$, tous les produits qu'il donne ont les signes des termes du multiplicande.

On obtient le produit total en réunissant tous les produits partiels et faisant la réduction; et pour faciliter cette dernière partie de l'opération, on a soin d'écrire les produits semblables les uns au-dessous des autres.

33. Voici quelques multiplications par lesquelles on démontre des propositions que l'on a fréquemment occasion d'appliquer :

$$\begin{array}{lll}
a+b & a-b & a+b \\
a+b & a-b & a-b \\
\hline
a^2+ab & a^2-ab & a^2+ab \\
\quad +ab+b^2 & \quad -ab+b^2 & \quad -ab-b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2 & a^2 \qquad -b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a^2+2ab+b^2 \\
a+b \\
\hline
a^3+2a^2b+ab^2 \\
\quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{array}$$

La première opération fait voir que *Le carré de la somme de deux quantités est égal au carré de la première quantité, plus deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

La seconde opération fait voir que *Le carré de la différence de deux quantités est égal au carré de la première quantité, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Par la troisième opération, on apprend que *Le produit de la somme de deux quantités par leur différence est égal à la différence des carrés de ces quantités.*

Enfin, la dernière opération, dans laquelle le carré de $a+b$

a été multiplié par $a+b$, prouve que *Le cube de la somme de deux quantités est égal au cube de la première quantité, plus trois fois le carré de la première multiplié par la seconde, plus trois fois la première multipliée par le carré de la seconde, plus le cube de la seconde.*

34. Nous proposerons comme exercices les opérations suivantes :

1°. Multiplier la quatrième puissance de $2a+3b$ par la quatrième puissance de $2a-3b$;

2°. Faire le carré du trinôme $16a^4-72a^2b^2+81b^4$;

3°. Multiplier le polynôme $2a^3+5a^2b-4ab^2+2b^3$ par le polynôme $2a^3+5a^2b+4ab^2-2b^3$.

Les deux premières opérations devront conduire au même résultat. On peut le démontrer sans faire les calculs, au moyen des propositions qui ont été exposées dans le numéro précédent. La troisième opération peut être abrégée en faisant usage des mêmes propositions.

35. Dans les exemples de multiplication des nos 32 et 33, chaque facteur ne comprend que des termes dans lesquels la somme des exposants est la même. Cette somme constitue ce que l'on appelle le *degré* d'un terme. Quand tous les termes d'un polynôme ont le même degré, on dit que le polynôme est *homogène*, et le degré de chaque terme est aussi celui du polynôme. Un produit des facteurs homogènes est lui-même homogène, et son degré est égal à la somme des degrés des facteurs. Si ces conditions ne sont pas remplies, on doit en conclure qu'on a commis des erreurs.

36. Lorsqu'un polynôme qu'on doit ordonner contient plusieurs termes dans lesquels la lettre d'ordre a le même exposant, on regarde ces termes comme en formant un seul avec un polynôme pour coefficient. Par exemple, si le polynôme proposé contient les trois termes $+2b^2a^3-2ba^3-3a^3$, on écrit $+(2b^2-2b-3)a^3$, et le trinôme $2b^2-2b-3$ est regardé comme le coefficient de a^3. Ce coefficient est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de b. Pour l'ordonner par rapport aux puissances croissantes, on écrirait $+(-3-2b+2b^2)a^3$, ou $-(3+2b-2b^2)a^3$. On

emploie aussi une autre disposition qui est souvent plus commode, et qui est indiquée ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{r} +2b^2 \\ -2b \\ -3 \end{array}\right| a^3 \qquad \text{ou bien} \qquad \left.\begin{array}{r} -3 \\ -2b \\ +2b^2 \end{array}\right| a^3$$

L'exemple suivant présente une multiplication dont les facteurs sont des polynômes ordonnés de cette manière :

Multiplicande	$2b$ -1	$a^2 - 4b^2$ $+2b$ -1	$a + 8b^3$ $-4b^2$	
Multiplicateur	$2b$ $+1$	$a - 4b^2$ $+1$		
Produit du multiplicande par $\left.\begin{array}{r} 2b \\ +1 \end{array}\right\vert a$	$4b^2$ $-2b$ $+2b$ -1	$a^3 - 8b^3$ $+4b^2$ $-2b$ $-4b^2$ $+2b$ -1	$a^2 + 16b^4$ $-8b^3$ $+8b^3$ $-4b^2$	a
Produit du multiplicande par $-4b^2$ $+1$		$-8b^3$ $+4b^2$ $+2b$ -1	$+16b^4$ $-8b^3$ $+4b^2$ $-4b^2$ $+2b$ -1	$-32b^5$ $+16b^4$ $+8b^3$ $-4b^2$
Produit total simplifié	$4b^2$ -1	$a^3 - 16b^3$ $+4b^2$ $+2b$ -2	$a^2 + 32b^4$ $-8b^3$ $-4b^2$ $+2b$ -1	$a - 32b^5$ $+16b^4$ $+8b^3$ $-4b^2$

Division des monômes. — Exposant zéro.

37. Dans la division des quantités algébriques, comme dans celle des nombres, le dividende est un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs.

38. Lorsque le dividende et le diviseur sont des monômes,

le quotient ne peut être qu'un monôme, et en se reportant à la règle du n° 28, on en conclut immédiatement la suivante :

On divise le coefficient du dividende par celui du diviseur, ce qui donne le coefficient du quotient; on écrit toutes les lettres du dividende qui ne se trouvent pas dans le diviseur, en conservant leurs exposants; et l'on donne à chacune des lettres qui sont communes aux deux monômes un exposant égal à celui qu'elle a dans le dividende, diminué de celui qu'elle a dans le diviseur. Les lettres qui ont le même exposant dans les deux monômes n'entrent pas dans le quotient.

Exemples : $$\frac{6a^5b^2}{2a^3b} = 3a^2b, \quad \frac{18a^3b^2c}{6a^2c} = 3ab^2.$$

Si le coefficient du dividende n'est pas divisible par celui du diviseur, ou si le diviseur contient une lettre qui ne se trouve pas dans le dividende, ou une lettre avec un exposant plus grand que celui qu'elle a dans le dividende, la division ne peut pas être effectuée.

39. En considérant la division de a^3 par a^3, si l'on retranche l'exposant du diviseur de celui du dividende, on trouve a^0 pour l'expression du quotient. Or ce quotient est l'unité. On est conduit par là à convenir que le symbole a^0 représente l'unité, quelle que soit la quantité désignée par la lettre a. Cette signification de a^0 résulte, d'ailleurs, aussi de celle de l'exposant quand il est autre que zéro; car a^3, par exemple, est la même chose que $1 \times a \times a \times a$; a^2 équivaut pareillement à $1 \times a \times a$, a ou a^1 équivaut à $1 \times a$; on peut donc admettre par analogie que a^0 exprime le seul facteur 1.

Le symbole a^0 est utile en ce qu'il donne le moyen de conserver dans un calcul la trace d'une lettre que les opérations feraient disparaître, et il permet d'abréger certains énoncés. Ainsi, en considérant une lettre qui n'entre pas dans un monôme comme s'y trouvant avec l'exposant zéro, on pourra dire, pour la multiplication des monômes, que *L'on doit écrire au produit toutes les lettres contenues dans les facteurs, et donner à chacune un exposant égal à la somme de tous ceux qu'elle a*; et pour la division, *On doit écrire au quotient toutes les lettres du dividende, et donner à chacune un exposant*

égal au reste qu'on obtient en soustrayant l'exposant qu'elle a dans le diviseur de celui qu'elle a dans le dividende.

Division des polynômes.

40. Le produit de deux polynômes est la somme des produits de tous les termes de l'un des facteurs par chacun des termes de l'autre facteur. La plupart de ces produits se confondent par la réduction des termes semblables, et il ne serait pas possible de les reconnaître tous immédiatement dans le produit total simplifié. Mais le terme de l'un des polynômes qui contient le plus fort exposant d'une lettre, multiplié par le terme de l'autre polynôme dans lequel la même lettre a le plus fort exposant, donne un produit qui contient cette lettre avec un exposant plus grand que ceux qu'elle a dans tous les autres produits partiels. Ce produit ne peut donc se réduire avec aucun autre, et il se retrouve sans altération dans le produit total.

Il suit de là qu'en choisissant dans le dividende le terme qui contient le plus fort exposant d'une lettre, et en le divisant par le terme du diviseur qui contient le plus fort exposant de la même lettre, on obtiendra un terme du quotient; et ce terme sera celui qui aura, dans le quotient, le plus fort exposant de la même lettre.

En multipliant le diviseur par ce terme, et retranchant le produit du dividende, on aura un reste qui ne contiendra plus que les produits du diviseur par les autres termes du quotient. Ce reste pourra donc être regardé comme un nouveau dividende; et en divisant le terme de ce nouveau dividende qui contiendra le plus fort exposant d'une lettre, par le terme du diviseur affecté du plus fort exposant de la même lettre, on obtiendra un second terme du quotient. Ainsi de suite. Quand on aura trouvé tous les termes du quotient, en soustrayant le produit du diviseur par le dernier terme, on obtiendra un reste nul, puisqu'on aura successivement retranché du dividende le produit du diviseur par tous les termes du quotient, c'est-à-dire tout ce qui compose le dividende.

Au lieu de considérer les termes qui ont les plus forts exposants d'une lettre, on peut considérer ceux qui ont les plus

faibles exposants; car le produit des termes du diviseur et du quotient, dans lesquels une lettre a les plus faibles exposants, a donné sans réduction le terme du dividende dans lequel l'exposant de cette lettre est le plus faible.

On facilitera l'opération en ordonnant les deux polynômes par rapport à une lettre, et en ayant soin que les restes soient ordonnés de la même manière. On obtiendra alors les termes du quotient en divisant le premier terme du dividende, ou du reste auquel on sera parvenu, par le premier terme du diviseur.

41. La règle contenue dans l'explication que nous venons de donner se résume comme il suit :

Ordonnez le dividende et le diviseur par rapport aux puissances décroissantes ou aux puissances croissantes d'une lettre. Divisez le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; le résultat sera le premier terme du quotient. Retranchez du dividende le produit du diviseur par ce terme, et prenez soin que le reste soit ordonné de la même manière que les polynômes proposés. Divisez le premier terme du reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le second terme du quotient. Retranchez du premier reste le produit du diviseur par le second terme du quotient, et divisez le premier terme du nouveau reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le troisième terme du quotient. Ainsi de suite.

La lettre par rapport à laquelle on ordonne est appelée *lettre principale*, ou *lettre d'ordre*, et le plus fort exposant de cette lettre dans chaque polynôme est le *degré* du polynôme par rapport à cette lettre.

42. Il faut joindre à la règle ci-dessus celle qui détermine les signes que l'on doit donner aux termes du quotient. Or, en se rapportant aux règles qui ont été établies pour la multiplication (nº 31), on en conclut immédiatement les suivantes :

Quand le terme que l'on divise a le signe + et le terme du diviseur a aussi le signe +, le quotient doit avoir le signe +.

Quand le terme que l'on divise a le signe + et le terme du diviseur le signe —, le quotient doit avoir le signe —.

Quand le terme que l'on divise a le signe — et le terme du diviseur le signe +, le quotient doit avoir le signe —.

Quand le terme que l'on divise a le signe — et le terme du diviseur a aussi le signe —, le quotient doit avoir le signe +.

On exprime abréviativement ces quatre règles en disant que, pour la division, de même que pour la multiplication, *+ par + et — par — donnent +; + par — et — par + donnent —.*

43. Prenons pour exemple les deux polynômes :

Dividende, $50\,a^3b^2 - 6\,b^5 + 25\,ab^4 - 45\,a^2b^3 - 41\,a^4b + 20\,a^5$.
Diviseur, $5\,ab^2 - 3\,b^3 - 4\,a^2b + 5\,a^3$.

On ordonne ces polynômes, et l'on dispose le calcul comme on le voit ci-dessous :

$$
\begin{array}{l|l}
\phantom{\text{1er reste}}\; 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
\phantom{\text{1er reste}} - 20a^5 + 16a^4b - 20a^3b^2 + 12a^2b^3 & \overline{4a^2 - 5ab + 2b^2} \\
\hline
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste} - 25a^4b + 30a^3b^2 - 33a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & \\
\phantom{\text{1er reste}} + 25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^4 & \\
\hline
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste} \qquad + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 & \\
\phantom{\text{2e reste}} \qquad - 10a^3b^2 + 8a^2b^3 - 10ab^4 + 6b^5 & \\
\hline
\text{3}^{\text{e}}\text{ reste} \qquad 0 &
\end{array}
$$

La division du premier terme $20\,a^5$ du dividende par le premier terme $5\,a^3$ du diviseur donne le premier terme $4\,a^2$ du quotient. On multiplie le diviseur par $4\,a^2$, et l'on soustrait le produit du dividende : à cet effet, on écrit le produit sous le dividende en changeant le signe de chaque terme, puis on fait les réductions; on obtient de cette manière le premier reste. On divise le premier terme $-\,25\,a^4b$ de ce reste par le premier terme $5\,a^3$ du diviseur, ce qui donne le second terme $-\,5\,ab$ du quotient. On multiplie le diviseur par $-\,5\,ab$, et l'on retranche le produit du premier reste, ce qui donne le deuxième reste. On divise le premier terme de ce reste par $5\,a^3$, ce qui donne le troisième terme du quotient. En retranchant du deuxième reste le produit du diviseur par $+\,2\,b^2$, on obtient un reste nul, ce qui annonce que l'opération est terminée.

44. Quand on obtient un reste dont le premier terme n'est

pas divisible par le premier terme du diviseur, la division proposée ne peut pas être effectuée. Le dividende est alors égal au produit du diviseur par la somme des termes qu'on a trouvés, plus le dernier reste; et le quotient se compose de ces termes et d'une expression complémentaire qui se forme en indiquant la division du dernier reste par le diviseur.

Voici un exemple d'une division qui ne peut pas être entièrement effectuée :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 - 4ax^3 & + 6a^2x^2 & - 2a^3x & - a^4 & & x^2 - 2ax + a^2 \\
\cline{6-6}
-x^4 + 2ax^3 & - a^2x^2 & & & & x^2 - 2ax + a^2 \\
\cline{1-4}
-2ax^3 & + 5a^2x^2 & - 2a^3x & - a^4 & & \\
+2ax^3 & - 4a^2x^2 & + 2a^3x & & & \\
\cline{1-4}
& + a^2x^2 & & - a^4 & & \\
& - a^2x^2 & + 2a^3x & - a^4 & & \\
\cline{2-4}
& & + 2a^3x & - 2a^4. & &
\end{array}$$

Après trois divisions partielles, on obtient le reste

$$+ 2a^3x - 2a^4;$$

le premier terme de ce reste contenant la lettre x avec un exposant moindre que celui qu'elle a dans le premier terme du diviseur, l'opération ne peut plus être continuée. On a

$$x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 2a^3x - a^4$$
$$= (x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2ax + a^2) + 2a^3x - 2a^4,$$

et le quotient est

$$x^2 - 2ax + a^2 + \frac{2a^3x - 2a^4}{x^2 - 2ax + a^2}.$$

45. Lorsque les polynômes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes, on parvient nécessairement à un reste nul, ou à un reste dont le premier terme n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur. En effet, chacune des soustractions qui sont successivement effectuées détruisant toujours le premier terme du reste dont on soustrait, le degré de chaque reste est moindre, au moins d'une unité, que le degré du reste précédent. Par conséquent, lorsqu'on a fait, au plus, un nombre de divisions partielles égal à l'excès plus un du degré du dividende sur celui du diviseur, si le reste n'est pas nul,

l'exposant de la lettre d'ordre dans le premier terme de ce reste est moindre que l'exposant qu'elle a dans le premier terme du diviseur, et la division partielle qu'il faudrait exécuter pour continuer les calculs est impossible.

46. Quand on ordonne suivant les puissances croissantes, les cas d'impossibilité n'ont plus nécessairement pour effet de faire rencontrer une division partielle impossible; mais on a pour les reconnaître un autre caractère, qui résulte de ce que, toutes les fois que l'on parvient à un reste nul, le dernier terme du dividende est le produit des derniers termes du diviseur et du quotient. Il suit de là que l'on connaît à l'avance le terme du quotient auquel la division s'arrêtera, lorsqu'elle pourra être faite entièrement; et si l'on obtient un terme avec un exposant de la lettre d'ordre égal à celui qu'elle doit avoir dans le dernier terme, sans que le reste correspondant soit nul, ou si l'on est amené à écrire au quotient un terme avec un exposant qui serait, dans l'ordre adopté, au delà de la limite prévue, l'opération ne peut pas se terminer.

Voici un exemple d'une division ordonnée suivant les puissances croissantes, et dans laquelle les divisions partielles pourraient être continuées indéfiniment :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -4x & +x^2 & +x^3 & & 1-3x+x^2 \\
\cline{6-6}
-1 & +3x & -x^2 & & & 1-x-3x^2-7x^3,\ \text{etc.} \\
\cline{1-4}
 & -x & & +x^3 & & \\
 & +x & -3x^2 & +x^3 & & \\
\cline{2-4}
 & & -3x^2 & +2x^3 & & \\
 & & +3x^2 & -9x^3 & +3x^4 & \\
\cline{3-5}
 & & & -7x^3 & +3x^4 & \\
 & & & \text{etc.} & &
\end{array}
$$

L'opération ne peut pas se terminer, et on en est averti au deuxième reste $-3x^2+2x^3$; car, si elle se terminait, la plus haute puissance de la lettre x dans le quotient proviendrait de la division de x^3 par x^2; elle serait donc x^1.

Le quotient peut être exprimé par

$$1-x+\frac{-3x^2+2x^3}{1-3x+x^2},\quad 1-x-3x^2+\frac{-7x^3+3x^4}{1-3x+x^2},\ \text{etc.}$$

47. Lorsque les polynômes contiennent plusieurs termes dans lesquels la lettre d'ordre a le même exposant, on réunit ces termes comme nous l'avons montré dans le n° 36. On effectue ensuite la division sans qu'il y ait rien de changé à la règle; car ce qui a été dit pour l'explication de cette règle, relativement aux termes qui contiennent les plus hautes puissances d'une lettre, ne cesse pas de subsister quand les coefficients de ces puissances sont des polynômes. Seulement, dans ce cas, on a des divisions séparées à faire pour obtenir les coefficients polynômes du quotient.

Exemple :

$$\text{Divid.}\left\{\begin{array}{r|r|r|r} 4b^2 & a^3-16b^3 & a^2+32b^4 & a-32b^5 \\ -\ c^2 & +\ 4b^2c & -\ 8b^3c & +16b^4c \\ & +\ 2bc^2 & -\ 4b^2c^2 & +\ 8b^3c^2 \\ & -\ 2c^3 & +\ 2bc^3 & -\ 4b^2c^3 \\ & & -\ c^4 & \end{array}\right.
\qquad
\left.\begin{array}{r|r} 2b & a-4b^2 \\ +\ c & +\ c^2 \end{array}\right\}\text{Divis.}$$

$$\left.\begin{array}{r|r|r} 2b & a^2-4b^2 & a+8b^3 \\ -\ c & +2bc & -4b^2c \\ & -\ c^2 & \end{array}\right\}\text{Quot.}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\text{Produit à soustraire.} & \begin{array}{r} +\ 8b^3 \\ -\ 4b^2c \\ -\ 2bc^2 \\ +\ c^3 \end{array} & & \\ \hline
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste ou 2}^{\text{e}}\text{ divid.} & \begin{array}{r} -\ 8b^3 \\ -\ c^3 \end{array} & a^2+\ldots\ldots & \\
\text{Produit à soustraire.} & & \begin{array}{r} -16b^4 \\ +\ 8b^3c \\ -\ 4b^2c^2 \\ +\ 4b^2c^2 \\ -\ 2bc^3 \\ +\ c^4 \end{array} & \\ \hline
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste ou 3}^{\text{e}}\text{ divid.} & & \begin{array}{r} +16b^4 \\ -\ 4b^2c^2 \end{array} & a-\ldots\ldots \\
\text{Produit à soustraire.} & & & \begin{array}{r} +32b^5 \\ -16b^4c \\ -\ 8b^3c^2 \\ +\ 4b^2c^3 \end{array} \\ \hline
\text{3}^{\text{e}}\text{ reste}\ldots\ldots & & & 0
\end{array}$$

1re *division partielle.*

$$\begin{array}{r|l} 4b^2-\ c^2 & 2b+c \\ \cline{2-2} -2bc & 2b-c \\ \hline -2bc-c^2 & \\ +c^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2e *division partielle.*

$$\begin{array}{r|l} -8b^3-\quad c^3 & 2b+c \\ \cline{2-2} +4b^2c & -4b^2+2bc-c^2 \\ \hline +4b^2c-\ c^3 & \\ -2bc^2 & \\ \hline -2bc^2-\ c^3 & \\ +\ c^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3e *division partielle.*

$$\begin{array}{r|l} 16b^4-4b^2c^2 & 2b+c \\ \cline{2-2} -8b^3c & 8b^3-4b^2c \\ \hline -8b^3c-4b^2c^2 & \\ +4b^2c^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On n'écrit point les termes des produits du diviseur par les

quotients partiels, qui doivent détruire la première colonne de chaque dividende partiel; et l'on se dispense aussi d'écrire, dans les dividendes partiels, les colonnes du dividende primitif qui n'ont pas encore été altérées par les réductions.

48. Quand une des lettres du dividende n'est pas contenue dans le diviseur, on peut supposer qu'elle s'y trouve dans tous les termes avec l'exposant zéro; et en la prenant pour lettre d'ordre, on voit que le quotient est formé de toutes les puissances de cette lettre contenues dans le dividende, avec des coefficients qui sont ceux qu'elles ont dans ce polynôme, divisés par le diviseur.

Soient, par exemple, les polynômes :

$$\textit{Divid.}\ (3c-6b)a^2-(c^2-4b^2)a+c^3-6bc^2+12b^2c-8b^3,$$
$$\textit{Diviseur}\ \ c-2b.$$

La division de $3c-6b$ par $c-2b$ donne le quotient 3; le quotient de $(3c-6b)\,a^2$ par $c-2b$ est donc $3a^2$. En retranchant du dividende le produit du diviseur par $3a^2$, on a le reste $-(c^2-4b^2)\,a+c^3-6bc^2+12b^2c-8b^3$. La division de $+c^2-4b^2$ par $c-2b$ donne le quotient $c+2b$; le quotient de $-(c^2-4b^2)\,a$ par $c-2b$ est donc $-(c+2b)a$: c'est le second quotient partiel. Le second reste ne se compose que de la partie du dividende qui ne contient pas la lettre a; et en divisant ce reste par $c-2b$, on obtient un troisième quotient partiel qui est $c^2-4bc+4b^2$. Le quotient total est

$$3a^2-(c+2b)a+c^2-4bc+4b^2.$$

49. Parmi les différents exemples de la division algébrique, il est bon de remarquer le suivant, dans lequel on suppose que m représente un nombre entier :

$$\begin{array}{l|l}
a^m-b^m & a-b \\
\cline{2-2}
-a^m+ba^{m-1} & a^{m-1}+ba^{m-2}+b^2a^{m-3}\ldots+b^{m-1} \\
\cline{1-1}
+ba^{m-1}-b^m & \\
-ba^{m-1}+b^2a^{m-2} & \\
\cline{1-1}
+b^2a^{m-2}-b^m & \\
\quad\vdots & \\
\cline{1-1}
+b^ma^0-b^m &
\end{array}$$

Les dividendes successifs sont des binômes dont le second terme est $-b^m$, et dans le premier terme, l'exposant de a diminue d'une unité à chaque opération, celui de b augmente d'une unité. Le diviseur ne contenant que la première puissance de la lettre a, on peut continuer les opérations jusqu'à ce qu'on obtienne un reste dont le premier terme ne renferme plus cette lettre qu'avec l'exposant zéro; et ce reste est $b^m a^0 - b^m$, ou zéro. Donc $a^m - b^m$ est toujours divisible par $a - b$. Dans les termes du quotient, les exposants de a vont en diminuant d'une unité, ceux de b augmentent d'une unité : le dernier terme est b^{m-1}; car il doit être tel, qu'en le multipliant par le dernier terme du diviseur on retrouve le dernier terme $-b^m$ du dividende.

On démontre de la même manière les trois propositions ci-après :

La division de $a^m - b^m$ par $a + b$ peut être effectuée toutes les fois que m est un nombre pair; le quotient est

$$a^{m-1} - ba^{m-2} + b^2 a^{m-3} \ldots - b^{m-1}.$$

Quand m est un nombre impair, la division n'est pas possible.

La division de $a^m + b^m$ par $a + b$ peut être effectuée toutes les fois que m est un nombre impair; le quotient est

$$a^{m-1} - ba^{m-2} + b^2 a^{m-3} \ldots + b^{m-1}.$$

Quand m est un nombre pair, la division n'est pas possible.

$|-|$ La division de $a^m + b^m$ par $a \cancel{+} b$ ne peut jamais être entièrement effectuée.

Des fractions littérales.

50. L'expression du quotient d'une division qui n'a pas été effectuée prend, comme en arithmétique, le nom de *fraction*. Le dividende est le *numérateur*, et le diviseur est le *dénominateur*; le numérateur et le dénominateur sont appelés collectivement les *deux termes* de la fraction. Les quantités algébriques qui ne contiennent pas de fractions sont appelées *quantités entières*.

Les règles que l'on doit suivre dans les calculs pour les fractions littérales, sont les mêmes que pour les fractions numé-

riques. Mais les explications de ces règles, telles qu'on les voit dans les Traités d'Arithmétique à l'égard des fractions numériques dont les termes sont des nombres entiers, ne conviennent plus quand il s'agit des fractions algébriques dont le numérateur et le dénominateur représentent des nombres qui peuvent être eux-mêmes fractionnaires. C'est ce qui donne lieu aux explications qu'on va lire.

51. Soient a et b deux nombres quelconques, et désignons par q la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire le quotient de la division de a par b. On a ainsi

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{et} \quad a = bq.$$

Si l'on multiplie les quantités égales a et bq par un même nombre m, en observant qu'on multiplie un produit lorsqu'on multiplie un des facteurs, on trouve

$$am = bm \times q\,; \quad \text{donc} \quad \frac{am}{bm} = q, \quad \text{ou} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

La dernière égalité prouve que la valeur d'une fraction ne change pas quand les deux termes sont multipliés ou divisés par le même nombre.

52. Ce principe donne le moyen de simplifier les fractions et de les réduire au même dénominateur.

La réduction d'une fraction s'opère en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur. Lorsque ces deux termes sont des monômes, les facteurs communs sont le plus grand commun diviseur des coefficients numériques, et les facteurs littéraux exprimés par chaque lettre commune avec le plus faible des exposants qu'elle a dans les deux monômes. Soit, par exemple, la fraction $\frac{18a^3b^5c^2d}{48a^7b^2c^2e}$; le plus grand commun diviseur des coefficients 18 et 48 est 6, et les facteurs littéraux communs aux deux termes sont a^3, b^2, c^2. En supprimant ces facteurs, la fraction se réduit à $\frac{3b^3d}{8a^4e}$.

Quand les deux termes sont des polynômes, il faut recou-

rir au procédé du plus grand commun diviseur algébrique, qui sera exposé plus loin. Mais on peut quelquefois découvrir les facteurs communs sans le secours de ce procédé. Soit, par exemple, la fraction $\frac{4x^2 - 12ax + 9a^2}{8x^3 - 27a^3}$. Le numérateur est le carré de $2x - 3a$ (n° 33) ; et comme le dénominateur revient à $(2x)^3 - (3a)^3$, il est divisible par $2x - 3a$ (n° 49). En supprimant ce facteur, la fraction se réduit à $\frac{2x - 3a}{4x^2 + 6ax + 9a^2}$.

53. Pour réduire des fractions au même dénominateur, il suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

Quand les dénominateurs ont des facteurs communs, on détermine le plus simple multiple de tous les dénominateurs, et l'on multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient qu'on obtient en divisant ce plus simple multiple par le dénominateur.

Le plus simple multiple de plusieurs monômes est formé du plus petit multiple des coefficients, et de toutes les lettres qui entrent dans les monômes, chacune d'elles étant prise avec son plus grand exposant.

Soient, par exemple, les trois fractions

$$\frac{m}{6a^3b}, \quad \frac{n}{4a^2b^2}, \quad \frac{p}{18b^2c^2}.$$

Le plus simple multiple des dénominateurs est $36a^3b^2c^2$, et en prenant cette quantité pour dénominateur commun, on obtient les expressions suivantes :

$$\frac{6bc^2m}{36a^3b^2c^2}, \quad \frac{9ac^2n}{36a^3b^2c^2}, \quad \frac{2a^3p}{36a^3b^2c^2}.$$

Pour trouver le plus simple multiple de plusieurs polynômes, il faut, en général, recourir à la théorie du plus grand commun diviseur ; mais on peut quelquefois y parvenir plus simplement, au moyen des propositions qui ont été précédemment exposées.

Supposons, par exemple, que l'on veuille réduire au même

dénominateur les deux fractions

$$\frac{a^2 m}{1-m^2}, \quad \frac{a^2}{1-2m+m^2}.$$

On remarquera que $1-m^2=(1-m)(1+m)$, et $1-2m+m^2=(1-m)^2=(1-m)(1-m)$ (n° 33). On verra ainsi qu'il suffit de multiplier les termes de la première fraction par $1-m$, et ceux de la seconde par $1+m$; ce qui donne les deux expressions

$$\frac{a^2 m-a^2 m^2}{1-m-m^2+m^3}, \quad \frac{a^2+a^2 m}{1-m-m^2+m^3}.$$

54. Soient maintenant trois fractions réduites au même dénominateur, $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, et supposons que l'on doive ajouter la seconde à la première et retrancher la troisième de la somme. Si l'on pose $\frac{a}{m}=q$, $\frac{b}{m}=r$, $\frac{c}{m}=s$, d'où $a=mq$, $b=mr$, $c=ms$, on aura

$$a+b-c=m(q+r-s), \quad \text{d'où} \quad \frac{a+b-c}{m}=q+r-s;$$

donc

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Cette égalité prouve que les fractions littérales qui ont un même dénominateur s'ajoutent ou se retranchent en ajoutant ou en retranchant les numérateurs.

55. Pour la multiplication, posons $\frac{a}{b}=q$, $\frac{c}{d}=r$, d'où $a=bq$, $c=dr$: on aura

$$ac=bq\times dr=bd\times qr, \quad \text{d'où} \quad \frac{ac}{bd}=qr;$$

donc

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Il suit de là qu'on doit multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

56. Enfin, soit à diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$. Si l'on réduit d'abord

ces fractions au même dénominateur, elles deviendront $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$: or le quotient ne sera pas altéré si l'on multiplie le dividende et le diviseur par bd (nº 51); donc

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Il suit de là que l'on doit multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Pour multiplier ou pour diviser une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, ou bien pour ajouter des fractions avec des entiers, on suivra les mêmes règles, en donnant aux entiers l'unité pour dénominateur.

57. Les règles relatives aux fractions sont appliquées dans les exercices suivants, qui offrent des réductions remarquables :

1°. $$\frac{2a}{2b-c} \times \left(\frac{b+c}{3} - \frac{c}{2}\right) = \frac{a}{3}.$$

2°. $$\frac{b}{a - \frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

3°. $$\frac{1 - \frac{a^3}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{a}{x^3}} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2.$$

4°. $$\frac{a + \frac{b-a}{1+ba}}{1 - a \times \frac{b-a}{1+ba}} = b.$$

5°. $$\frac{a - c \times \frac{ae - bd}{ce - bf}}{b} = \frac{cd - af}{ce - bf}.$$

CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

Définitions. — Résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

58. Les relations indiquées par le signe $=$ sont de deux sortes : les *égalités* et les *équations*.

On emploie le premier de ces deux noms quand on peut constater l'égalité en effectuant des calculs indiqués, ou quand elle est la conséquence des hypothèses que l'on a faites dans le but d'établir quelque proposition. Ainsi, le produit des binômes $2x+1$ et $3x-2$ est $6x^2-x-2$; de là une égalité. Si l'on a supposé que a, b, c, d, désignent quatre nombres connus en proportion par quotient, on en conclut $ad=bc$; c'est une égalité.

On se sert du mot *équation* quand on considère deux quantités dépendantes d'une ou de plusieurs inconnues qu'il s'agit de déterminer de manière que ces quantités deviennent égales. Ainsi, il n'y a pas égalité entre le produit $(2x+1)(3x-2)$ et $2x^2-3x+4$; mais on peut attribuer à x une valeur qui rende ces deux quantités égales. Pour indiquer qu'on se propose de trouver cette valeur, on écrit $(2x+1)(3x-2)=2x^2-3x+4$: c'est une équation.

Les deux quantités qui forment une égalité ou une équation en sont les deux *membres*.

Lorsque les deux membres sont les mêmes, l'égalité prend le nom d'*identité*. Ainsi, quand on effectue la multiplication indiquée dans le premier membre de l'égalité $(2x+1)(3x-2)=6x^2-x-2$, elle devient une identité. On emploie aussi quelquefois la dénomination d'identité à la place de celle d'égalité, quand on sait, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer les calculs indiqués, que les deux

3.

membres sont les mêmes. C'est dans ce sens que l'on dit que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ est une identité, parce qu'on sait que la somme de deux nombres multipliée par leur différence donne pour produit la différence des carrés de ces nombres.

59. ***Résoudre*** une équation, c'est chercher quelles valeurs on doit mettre à la place de l'inconnue, ou des inconnues s'il y en a plusieurs, pour que l'équation devienne une identité : chaque valeur de l'inconnue qui jouit de cette propriété, ou chaque système de valeur des inconnues, quand il y en a plusieurs, forme une *solution* de l'équation.

On dit que deux équations sont *équivalentes*, ou qu'elles rentrent l'une dans l'autre, lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

60. *Les solutions d'une équation ne changent pas lorsqu'on ajoute la même quantité aux deux membres, ou lorsqu'on en retranche la même quantité.* Car il est clair que les valeurs des inconnues qui établiront l'égalité des deux membres avant ces opérations, l'établiront pareillement après, et réciproquement.

Par une raison identique, *Les solutions restent aussi les mêmes quand on multiplie ou quand on divise les deux membres par la même quantité* (*).

61. Soit l'équation

$$29x-87=12x+32.$$

On peut supprimer, dans le second membre, le terme $12x$, en retranchant $12x$ du premier membre; on peut aussi supprimer, dans le premier membre, le terme -87, en ajoutant 87 au second membre. L'équation devient ainsi

$$29x-12x=32+87.$$

(*) Cette deuxième proposition cesse d'être exacte lorsque la quantité par laquelle on multiplie ou l'on divise les deux membres renferme les inconnues. Soit, par exemple, l'équation $3x-2=7$; si l'on multipliait les deux membres par $x-1$, il viendrait $(x-1)(3x-2)=7(x-1)$. Or la dernière équation admet la solution $x=1$, et cette solution ne convient pas à l'équation primitive. Il faut aussi que la quantité par laquelle on multiplie ou l'on divise les deux membres ne soit pas nulle. Mais l'examen de ces restrictions ne nous serait point utile dans le cours de ce chapitre, et il trouvera place dans la suite.

En général, *On peut supprimer dans un membre d'une équation un terme quelconque, pourvu qu'en même temps on l'écrive dans l'autre membre avec le signe contraire à celui qu'il avait.* C'est ce qu'on appelle la *transposition des termes*.

62. En réduisant les termes semblables dans la dernière équation, on a

$$17x = 119,$$

et en divisant les deux membres par le coefficient de x,

$$x = 7.$$

Vérification. Pour s'assurer de l'exactitude de cette solution, on remplace l'inconnue x par 7 dans l'équation proposée; il faut que l'on obtienne une égalité. Or cette substitution donne

$$29 \times 7 - 87 = 12 \times 7 + 32,$$

et en effectuant les calculs, on parvient à l'identité $116 = 116$.

63. Prenons en second lieu l'équation

$$\frac{5}{2}x - \frac{4}{3}x - 13 = \frac{5}{8} + \frac{x}{32}.$$

On peut multiplier tous les termes de l'équation par un multiple quelconque des dénominateurs. Pour la simplicité des calculs, on choisit le plus petit multiple, qui est 96. On obtient ainsi une équation équivalente à la proposée, et qui ne contient plus aucun dénominateur,

$$240x - 128x - 1248 = 60 + 3x.$$

En transposant les termes, comme pour l'exemple précédent, on trouve

$$240x - 128x - 3x = 60 + 1248,$$

et, en réduisant,

$$109x = 1308;$$

donc

$$x = \frac{1308}{109}, \quad \text{ou} \quad x = 12.$$

Vérification. En remplaçant x par 12 dans l'équation proposée, on a

$$\frac{5}{2}\times 12-\frac{4}{3}\times 12-13=\frac{5}{8}+\frac{12}{32};$$

et en effectuant les opérations, on parvient à l'identité $1=1$.

64. Soit l'équation

$$4-\frac{x+3}{6}=2+\frac{9-2x}{3}.$$

On multiplie tous les termes par le plus petit multiple des dénominateurs, qui est 6. L'équation devient

$$24-(x+3)=12+2(9-2x).$$

On effectue les calculs indiqués, ce qui donne

$$24-x-3=12+18-4x.$$

On transpose les termes de manière que tous les termes qui contiennent l'inconnue soient dans le premier membre, et tous les termes indépendants de l'inconnue dans le second membre; il vient par là

$$4x-x=12+18+3-24,$$

et, en réduisant,

$$3x=9;\quad \text{donc}\quad x=3.$$

Vérification. En remplaçant x par 3 dans l'équation proposée, on a

$$4-\frac{3+3}{6}=2+\frac{9-2\times 3}{3};$$

et en effectuant les calculs, on parvient à l'identité $3=3$.

65. Considérons encore l'équation

$$\frac{25}{x+3}=\frac{10}{3x-4}.$$

Si l'on réduit les deux fractions au même dénominateur, il faudra que les numérateurs soient égaux; ce qui donne l'équation

$$25(3x-4)=10(x+3).$$

En effectuant les calculs indiqués, il vient

$$75x - 100 = 10x + 30.$$

On tire de là, par la transposition des termes,

$$75x - 10x = 30 + 100, \quad \text{ou} \quad 65x = 130;$$

donc

$$x = \frac{130}{65}, \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Vérification. En remplaçant x par 2 dans l'équation proposée, on a

$$\frac{25}{2+3} = \frac{10}{3 \times 2 - 4};$$

et en effectuant les calculs, on parvient à l'identité $5 = 5$.

66. Les équations que nous venons de considérer sont dites du *premier degré*, parce qu'après l'évanouissement des dénominateurs, la transposition des termes et la réduction, elles ne contiennent que la première puissance de l'inconnue.

Lorsque, après ces opérations, l'inconnue se trouve élevée à diverses puissances, le degré de l'équation est égal à l'exposant de la plus haute puissance. Ainsi l'équation $5x^2 - 3x = 30$ est du second degré.

Quand il y a plusieurs inconnues, le degré est la somme des exposants de toutes les inconnues dans le terme où cette somme est la plus forte. Ainsi l'équation $yx^2 - 5y - 2x = 48$ est du troisième degré, parce que la somme des exposants des inconnues dans le terme yx^2 est égale à 3.

67. Toutes les règles nécessaires pour la résolution des équations du premier degré à une inconnue se trouvent renfermées dans ce qui précède, et elles se résument comme il suit :

Si l'équation contient des dénominateurs, on les fait disparaître en multipliant tous les termes par un multiple des dénominateurs. Il faut avoir soin de choisir le plus petit multiple.

L'équation n'ayant plus de dénominateurs, on effectue les opérations algébriques indiquées.

On réunit dans le premier membre tous les termes qui renferment l'inconnue, et dans le second tous les termes qui ne contiennent que les quantités connues, en ayant soin de changer les signes des termes que l'on fait passer d'un membre dans l'autre.

On réduit ensuite les termes semblables, puis on divise les deux membres par le multiplicateur de l'inconnue. Après cette dernière opération, le second membre exprime la valeur de l'inconnue.

68. Voici un dernier exemple assez compliqué dans lequel on rencontre l'application de toutes ces règles :

$$\frac{(a+b)x}{a} - 3a - \frac{(a-b)^2}{a+b} = \frac{b(2a-b)(x-a)}{a^2-b^2} - 3x.$$

On fait d'abord disparaître les dénominateurs, en observant que l'on peut prendre pour dénominateur commun de tous les termes $a(a^2 - b^2)$, puisque $a^2 - b^2$ est divisible par $a+b$. L'équation proposée se change alors dans la suivante :

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-b^2)x - 3a^2(a^2-b^2) - a(a-b)^3 \\ = ab(2a-b)(x-a) - 3a(a^2-b^2)x.\end{aligned}$$

En effectuant tous les calculs indiqués, transposant les termes et réduisant, on trouve

$$4a^3x - a^2bx - 3ab^2x - b^3x = 4a^4 - 5a^3b + a^2b^2 - ab^3,$$

ce qui revient à

$$(4a^3 - a^2b - 3ab^2 - b^3)x = 4a^4 - 5a^3b + a^2b^2 - ab^3;$$

d'où l'on conclut

$$x = \frac{a(4a^3 - 5a^2b + ab^2 - b^3)}{4a^3 - a^2b - 3ab^2 - b^3}.$$

Des équations du premier degré à plusieurs inconnues. — Résolution de deux équations numériques à deux inconnues.

69. Lorsqu'une équation contient plusieurs inconnues, on peut prendre des nombres arbitraires pour toutes les incon-

nues, hors une; l'équation détermine alors la valeur de la dernière inconnue; cette valeur et celles qui ont été choisies pour les autres inconnues forment une *solution* de l'équation : il y a ainsi un nombre illimité de solutions.

Il faut toujours commencer par simplifier l'équation. Soit, par exemple,

$$\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y - 1 = \frac{4}{3} + y - \frac{x}{3}.$$

On fait disparaître les dénominateurs en multipliant chaque terme par 6, ce qui donne

$$9x - 4y - 6 = 8 + 6y - 2x.$$

Il vient ensuite, par la transposition des termes,

$$9x + 2x - 4y - 6y = 8 + 6;$$

et en réduisant, on obtient enfin

$$11x - 10y = 14.$$

Au moyen de ces simplifications, une équation du premier degré à plusieurs inconnues x, y, z, etc., se trouve ramenée à la forme $ax + by + cz + \ldots = k$, les lettres a, b, c,..., k désignant des quantités connues, littérales ou numériques, et sans dénominateurs.

Maintenant, si dans l'équation ci-dessus $11x - 10y = 14$, on met successivement à la place de y différents nombres pris arbitrairement, par exemple les nombres entiers 1, 2, 3, 4, etc., on obtiendra pour les valeurs correspondantes de x les nombres $\frac{24}{11}$, $\frac{34}{11}$, 4, $\frac{54}{11}$, etc. Chacun de ces couples de valeurs de y et de x est une solution de l'équation.

Au lieu de mettre immédiatement des nombres arbitraires à la place de l'une des inconnues, on peut commencer par résoudre l'équation par rapport à l'une d'elles, comme si l'autre était une quantité connue; on trouve

$$x = \frac{14 + 10y}{11}, \quad \text{ou bien} \quad y = \frac{11x - 14}{10}.$$

Alors, si l'on prend pour l'une des inconnues une valeur arbitraire, et qu'on la substitue à cette inconnue dans l'expression

$\frac{14+10y}{11}$, ou dans l'expression $\frac{11x-14}{10}$, on en conclut la valeur correspondante de l'autre inconnue.

70. Lorsqu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres qui peuvent recevoir des valeurs arbitraires, on dit que la première est une *fonction* des autres. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, l'expression $\frac{14+10y}{11}$ est la valeur de x *exprimée en fonction* de y, et l'expression $\frac{11x-14}{10}$ est la valeur de y exprimée en fonction de x.

71. Supposons actuellement que les inconnues x et y soient assujetties à verifier à la fois les deux équations

$$11x - 10y = 14, \tag{1}$$
$$5x + 7y = 41. \tag{2}$$

En résolvant la première équation par rapport à x, comme si y était une quantité connue, on trouve

$$x = \frac{14+10y}{11}. \tag{3}$$

La substitution de la valeur de x dans l'autre équation donne

$$5 \times \frac{14+10y}{11} + 7y = 41. \tag{4}$$

On déduit de celle-ci la valeur de y; on obtient ensuite celle de x au moyen de l'équation précédente $x = \frac{14+10y}{11}$. On trouve $y = 3$, $x = 4$.

On se rend compte de ces opérations comme il suit : Si l'on conçoit que l'on ait un couple de valeurs de x et de y qui vérifient l'équation (1), il vérifiera aussi l'équation (3); par suite, la substitution de ces valeurs de x et de y dans le premier membre de l'équation (2), donnera le même résultat que la substitution de la valeur de y dans le premier membre de l'équation (4). Donc, premièrement, s'il existe un couple de valeurs de x et de y qui vérifient les deux équations proposées, la valeur de y doit vérifier l'équation (4); et, seconde-

ment, les valeurs de x et de y qui vérifient les équations (4) et (3) vérifient aussi les deux équations proposées.

72. Nous allons exposer une autre méthode. Mais pour la facilité de l'explication, nous considérerons d'abord deux équations dans lesquelles les coefficients d'une des inconnues seront les mêmes, par exemple

$$2x + 3y = 17, \quad 5x - 3y = 11.$$

En les ajoutant membre à membre, on obtient

$$7x = 28; \quad \text{d'où} \quad x = 4.$$

On trouve la valeur de y en mettant le nombre 4 à la place de x dans l'une des équations proposées.

Si l'on a les équations

$$5x - 3y = 19, \quad 5x - 7y = 11,$$

on retranche les deux membres de la seconde de ceux de la première, ce qui donne

$$4y = 8; \quad \text{d'où} \quad y = 2.$$

On a ensuite la valeur de x en mettant le nombre 2 à la place de y dans l'une des équations proposées.

Pour justifier ces opérations, représentons par $A = B$, $A' = B'$, deux équations quelconques. En les ajoutant membre à membre, on obtient $A + A' = B + B'$. Cette troisième équation doit nécessairement être vérifiée par les valeurs des inconnues qui satisfont aux deux premières, et les valeurs qui vérifient cette équation $A + A' = B + B'$, avec l'une des deux premières, par exemple $A = B$, doivent évidemment vérifier aussi l'autre équation $A' = B'$. Les mêmes conclusions subsistent quand, au lieu d'ajouter les deux équations $A = B$, $A' = B'$, on les retranche l'une de l'autre.

Il suit de ces observations que le système des deux équations ci-dessus $2x + 3y = 17$, $5x - 3y = 11$, peut être remplacé par celui des deux équations $2x + 3y = 17$ et $7x = 28$, ou $5x - 3y = 11$ et $7x = 28$; et de même, le système des deux équations $5x - 3y = 19$, $5x - 7y = 11$, peut être remplacé par celui des deux équations $5x - 3y = 19$, $4y = 8$, ou $5x - 7y = 11$, $4y = 8$.

73. Prenons actuellement les deux équations

$$11x - 10y = 14, \quad 5x + 7y = 41.$$

On peut les remplacer par d'autres équivalentes, dans lesquelles les coefficients de l'une des inconnues soient égaux. Il suffit de multiplier les deux membres de la première par le coefficient de cette inconnue dans la seconde, et les deux membres de la seconde par le coefficient de la même inconnue dans la première.

Si l'on veut avoir une équation qui donne immédiatement la valeur de y, on multiplie la première équation par 5 et la seconde par 11; elles deviennent

$$55x - 50y = 70, \quad 55x + 77y = 451.$$

En retranchant la première de la seconde, on trouve

$$127y = 381; \quad \text{d'où} \quad y = 3.$$

En mettant le nombre 3 à la place de y dans l'une des équations proposées, on en déduit la valeur de x.

On peut obtenir la valeur de x en opérant comme on l'a fait pour avoir celle de y; il faut multiplier les deux membres de la première équation par 7, ceux de la seconde par 10; on obtient ainsi

$$77x - 70y = 98, \quad 50x + 70y = 410.$$

En ajoutant membre à membre ces équations, on a

$$127x = 508; \quad \text{d'où} \quad x = 4.$$

74. Soit que l'on opère comme on vient de le voir en dernier lieu, ou comme dans le n° 71, on arrive également à substituer au système des deux équations proposées un système équivalent, formé de l'une d'elles et d'une autre qui ne contient plus une des inconnues; c'est pourquoi on dit que l'on *élimine* une inconnue. Suivant la première méthode, l'élimination est faite *par substitution;* suivant la dernière, elle est faite *par addition* ou *soustraction*, ou bien *par réduction*. Toute la différence qu'il y a entre ces deux procédés consiste en ce que, par le dernier, on prépare les deux équations de manière à éviter qu'après la substitution, dans l'une d'elles,

de la valeur d'une inconnue tirée de l'autre, on ait un dénominateur à faire disparaître; car, lorsqu'on soustrait l'une de l'autre les deux équations $55x+77y=451$, $55x-50y=70$, le résultat est le même que si l'on avait substitué dans l'une d'elles la valeur du terme $55x$ tirée de l'autre.

Résolution d'un nombre quelconque d'équations contenant un nombre égal d'inconnues.

75. Soient les trois équations

$$4x-3y+2z=9,$$
$$2x+5y-3z=4,$$
$$5x+6y-2z=18.$$

On pourra éliminer l'inconnue z entre la première équation et chacune des deux autres : on obtiendra deux équations qui ne contiendront plus que les inconnues x et y; on en déduira les valeurs de ces deux inconnues, et en les substituant dans l'une des équations proposées, on trouvera la valeur de z.

On déduit de la première équation

$$z=\frac{9-4x+3y}{2}.$$

En substituant la valeur de z dans les deux autres équations, on obtient

$$2x+5y-3\times\frac{9-4x+3y}{2}=4,\quad 5x+6y-9+4x-3y=18;$$

d'où, en réduisant,

$$16x+y=35,$$
$$3x+y=9.$$

La résolution des deux dernières équations fait trouver $x=2$, $y=3$; et en substituant ces valeurs dans celle de z exprimée en fonction de x et de y, on en conclut $z=5$.

76. Pour l'élimination par réduction, comme les termes qui contiennent z dans la première équation et dans la dernière, ont des coefficients égaux et des signes contraires, on ajoute ces deux équations. Les termes de celle qui en résulte

sont tous divisibles par 3, et en faisant cette réduction, on a

$$3x + y = 9.$$

Il faut éliminer aussi z entre la seconde équation et l'une des deux autres. A cet effet, on multiplie les deux membres de la seconde équation par 2, ceux de la première par 3, et ensuite on les ajoute; on obtient $16x + y = 35$.

Quand on a trouvé les valeurs de x et de y, par la résolution des deux équations $3x + y = 9$, $16x + y = 35$, on substitue ces valeurs dans l'une des équations proposées, et on en conclut la valeur de la troisième inconnue z.

77. Soient actuellement cinq équations :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 11u - 2t + 4z &= 9, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 2x - 13u &= 5. \end{aligned}$$

Chacune des inconnues z et t se trouve seulement dans deux équations; c'est pourquoi on éliminera d'abord l'une d'elles. Pour éliminer z par réduction, on multiplie la première équation par 4, la troisième par 5, et ensuite on les ajoute; il vient

$$12x - 8y + 55u - 10t = 89.$$

On peut donc considérer, au lieu du système des équations proposées, le système suivant :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 12x - 8y + 55u - 10t &= 89, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 2x - 13u &= 5. \end{aligned}$$

Les quatre dernières équations feront trouver les valeurs des inconnues x, y, t, u; on obtiendra ensuite la valeur de z par la première.

On élimine t entre les deux équations

$$12x - 8y + 55u - 10t = 89 \quad \text{et} \quad 8t - 5y = 25;$$

pour cela, on multiplie la première par 4, la seconde par 5, et ensuite on les ajoute; on obtient ainsi $48x - 57y + 220u = 481$. On peut donc au système précédent substituer celui-ci :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 48x - 57y + 220u &= 481, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 2x - 13n &= 5. \end{aligned}$$

Les trois dernières équations détermineront les valeurs des inconnues x, y, u; on aura ensuite la valeur de t par la seconde équation, et celle de z par la première.

On élimine y entre la troisième équation et la quatrième, en les ajoutant après avoir multiplié les deux membres de la quatrième par 19. On obtient ainsi $143x + 87u = 1374$, et on peut remplacer le système précédent par celui-ci :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 11, \\ 8t - 5y &= 25, \\ 5x + 3y - 7u &= 47, \\ 2x - 13u &= 5, \\ 143x + 87u &= 1374. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations détermineront les valeurs des deux inconnues x et u; on aura ensuite la valeur de y par la troisième équation, celle de t par la deuxième, et celle de z par la première.

En éliminant u entre la quatrième équation et la cinquième, on obtient $2033x = 18297$, d'où .... $x = 9$.
En faisant $x = 9$ dans $2x - 13u = 5$, on en conclut.... $u = 1$.
En faisant $x = 9$, $u = 1$, dans $5x + 3y - 7u = 47$, on trouve $y = 3$.
En faisant $y = 3$ dans $8t - 5y = 25$, on obtient........ $t = 5$.
En faisant $x = 9$, $y = 3$, dans $3x - 2y - 5z = 11$, on obtient $z = 2$.

Pour s'assurer de l'exactitude des opérations, il faut substituer dans les équations proposées les valeurs $x = 9$, $y = 3$, $z = 2$, $t = 5$, $u = 1$, ce qui doit conduire à des identités.

78. Le lecteur pourra s'exercer sur les deux exemples ci-après :

1°.
$$7x + 2y - 3z = 16,$$
$$3y + 5x + 2z = 13,$$
$$17x + 11y - 5z = 45.$$

On trouvera
$$x = 2,\quad y = 1,\quad z = 0.$$

2°.
$$3x - 4y + 5z = 11,$$
$$11t - 8y = 13\tfrac{1}{8},$$
$$16z + 9x = 38,$$
$$16t - 5z = 12.$$

On trouvera
$$x = \frac{2}{3},\quad y = \frac{1}{4},\quad z = 2,\quad t = 1 + \frac{3}{8}.$$

Problèmes qui dépendent des équations du premier degré.

79. La résolution des problèmes qui sont du ressort de l'algèbre comprend deux parties; il faut d'abord parvenir à exprimer les conditions du problème par des équations; c'est ce qu'on appelle *mettre le problème en équation;* on a ensuite à résoudre les équations.

Pour établir les équations d'un problème, on s'applique à reconnaître quelles sont les opérations que l'on devrait effectuer, afin de vérifier les valeurs des inconnues, si elles étaient données, et les égalités qui devraient subsister entre les résultats de ces opérations. Les équations cherchées s'obtiennent en indiquant au moyen des signes algébriques, sur les quantités connues, représentées par des nombres ou par des lettres, et sur les quantités inconnues, représentées toujours par des lettres, ces opérations et ces égalités.

Les exemples qui vont suivre feront comprendre ce précepte général.

80. 1er Problème. — *Une personne qui possédait* 120 000 *francs a employé une partie de cette somme à l'acquisition d'une maison. Elle a placé un tiers de ce qui lui restait à*

raison de 4 pour 100, *les deux autres tiers à raison de* 5 *pour* 100; *et elle tire de ces deux parties un revenu de* 3920 *francs. Quel est le prix de la maison, et quelles sont les sommes qui ont été placées aux taux de* 4 *pour* 100 *et de* 5 *pour* 100?

Désignons par x le prix de la maison. Il restera après le payement de ce prix $120\,000 - x$; en conséquence, la somme placée à 4 pour 100 sera $\frac{120\,000 - x}{3}$, et celle qui a été placée à 5 pour 100 sera $\frac{2(120\,000 - x)}{3}$. Le revenu de la première somme sera $\frac{(120\,000 - x) \times 4}{300}$; le revenu de la seconde sera $\frac{2(120\,000 - x) \times 5}{300}$; et puisque le revenu total est de 3920, il faudra que l'on ait

$$\frac{(120\,000 - x) \times 4}{300} + \frac{2(120\,000 - x) \times 5}{300} = 3920.$$

En chassant les dénominateurs, effectuant les calculs indiqués et transposant les termes, on trouve :

$$480\,000 - 4x + 1\,200\,000 - 10x = 1\,176\,000,$$
$$10x + 4x = 480\,000 + 1\,200\,000 - 1\,176\,000,$$
$$14x = 504\,000,$$
$$x = \frac{504\,000}{14} = 36000.$$

Le prix de la maison étant de 36000 francs, la somme qui reste après le payement de ce prix est 84000 francs. La somme placée à 4 pour 100 est donc le tiers de 84000 francs, ou 28000 francs; et celle qui a été placée à 5 pour 100 est deux fois 28000 francs, ou 56000 francs.

On vérifie l'exactitude de cette solution en calculant le revenu de 28000 francs à 4 pour 100, et celui de 56000 francs à 5 pour 100; en les ajoutant, la somme est 3920 francs, comme l'exige l'énoncé.

81. 2e PROBLÈME. — *Plusieurs négociants avaient formé une société dont la durée a été de trois ans. Ils ont prélevé*

sur la mise sociale, au commencement de la première année, une somme de 45000 francs, pour les frais de premier établissement; et au commencement de chacune des deux années suivantes, ils ont prélevé, pour les frais de loyer et l'entretien du matériel, une somme de 15000 francs. La première année, le bénéfice a été égal au dixième des fonds qui étaient restés disponibles; et dans chacune des deux années suivantes, le bénéfice a été égal au quart des fonds qui restaient au commencement de l'année. Alors la société ayant été dissoute, chaque associé a retiré 40 pour 100 en sus de sa mise. Quel était le montant de la mise sociale?

Désignons par x la somme cherchée. Quand on a prélevé sur cette somme 45000 francs, il reste $x - 45000$ francs. Le bénéfice de la première année étant le dixième de ce reste, le capital social est devenu, à la fin de cette année,

$$x - 45000 + \frac{x - 45000}{10}, \quad \text{ou} \quad \frac{11x - 495000}{10}.$$

En retranchant de cette quantité 15000 francs, on a pour reste

$$\frac{11x - 645000}{10};$$

et puisque le bénéfice de la seconde année est le quart de ce reste, on a pour la valeur du capital à la fin de la seconde année,

$$\frac{11x - 645000}{10} + \frac{11x - 645000}{40}, \quad \text{ou} \quad \frac{55x - 3225000}{40}.$$

En retranchant de cette quantité 15000, il reste

$$\frac{55x - 3825000}{40};$$

et puisque le bénéfice de la troisième année est le quart de ce reste, on a pour la valeur du capital à la fin de la troisième année,

$$\frac{55x - 3825000}{40} + \frac{55x - 3825000}{160}, \quad \text{ou} \quad \frac{275x - 19125000}{160}.$$

Chaque associé retirant, à la fin de la troisième année,

40 pour 100 en sus de sa mise, il faut que le capital social ait augmenté de 40 pour 100. Il doit donc être devenu $x + \frac{40}{100}x$, ou $x + \frac{2}{5}x$, ou plus simplement $\frac{7}{5}x$. On doit donc avoir

$$\frac{275x - 19125000}{160} = \frac{7}{5}x.$$

On chasse les dénominateurs en multipliant les deux membres par 160; il vient alors

$$275x - 19125000 = 224x,$$

et de là on conclut

$$\begin{aligned} 275x - 224x &= 19125000 \\ 51x &= 19125000 \\ x &= \frac{19125000}{51} = 375\,000. \end{aligned}$$

La mise totale était donc 375 000 francs.

Vérification. Lorsqu'on a prélevé 45000 francs sur le capital primitif 375 000 francs, il reste 330 000 francs. Cette somme produisant un bénéfice qui en est le dixième, ou 33000 francs, on a pour le capital, à la fin de la première année, 363 000 francs. En prélevant sur cette somme 15000 francs, il reste 348 000 francs. Le bénéfice de la seconde année étant le quart de ce reste, ou 87000 francs, on a pour le capital, à la fin de la seconde année, 435 000 francs. En prélevant sur cette somme 15000 francs, il reste 420 000 francs. Le bénéfice de la troisième année étant le quart de ce reste, ou 105 000 francs, on a pour le capital, à la fin de la troisième année, 525 000 francs. Ce dernier capital surpasse la mise sociale de 150 000 francs, ce qui forme un bénéfice de 40 pour 100, comme l'exige l'énoncé.

82. 3e Problème. — *Deux vases de la même capacité ont été remplis avec des mélanges formés de deux liquides* A *et* B. *Le premier mélange est formé de* 60 *parties de* A *et de* 40 *parties de* B. *Le second mélange est formé de* 20 *parties de* A *et de* 80 *parties de* B. *On propose de partager le liquide contenu dans chaque vase en deux parties, de telle sorte que l'une des parties du premier liquide et l'une des parties du second*

puissent former un mélange qui contienne des quantités égales de A *et de* B; *et que les parties restantes puissent former un autre mélange, dans lequel les liquides* A *et* B *se trouvent en quantités proportionnelles aux nombres* 3 *et* 7. (On suppose que les deux liquides A et B peuvent être mélangés dans des proportions quelconques sans altération de volume.)

Désignons par x et y les nombres des parties des mélanges donnés, qu'il faudra prendre pour former un troisième mélange qui contienne les liquides A et B en quantités égales. Le nombre des parties restantes du premier mélange sera $100-x$, et le nombre des parties restantes du second mélange sera $100-y$.

Puisque le premier mélange est formé de 60 parties de A et de 40 parties de B, les x parties de ce mélange contiendront $\frac{60x}{100}$ parties de A et $\frac{40x}{100}$ parties de B.

Puisque le second mélange est formé de 20 parties de A et de 80 parties de B, les y parties de ce mélange contiendront $\frac{20y}{100}$ parties de A et $\frac{80y}{100}$ parties de B.

Il en résulte que, dans le mélange formé en réunissant les x parties du premier mélange donné et les y parties du second, il y aura $\frac{60x}{100}+\frac{20y}{100}$ parties de A et $\frac{40x}{100}+\frac{80y}{100}$ parties de B.

On devra donc avoir l'équation

$$\frac{60x}{100}+\frac{20y}{100}=\frac{40x}{100}+\frac{80y}{100}.$$

On reconnaît, par des raisonnements semblables à ceux qui viennent d'être faits, que, pour que le mélange formé en réunissant les portions restantes des mélanges donnés soit tel que l'exige l'énoncé, il faut que l'on ait l'équation

$$\frac{60(100-x)}{100}+\frac{20(100-y)}{100}=\frac{3}{7}\times\left[\frac{40(100-x)}{100}+\frac{80(100-y)}{100}\right].$$

En supprimant dans la première équation le dénominateur qui affecte tous les termes, divisant ensuite chaque terme par 20, et rassemblant les termes en x dans le premier membre et

les termes en y dans le second, on trouve que cette équation se réduit à $x = 3y$.

Pour réduire la seconde équation, on remarque d'abord que l'on peut supprimer le dénominateur 100 qui affecte tous les termes; en divisant ensuite les deux membres par 20, l'équation devient

$$3(100 - x) + 100 - y = \frac{3}{7} \times [2(100 - x) + 4(100 - y)].$$

En effectuant les calculs indiqués et multipliant les deux membres par 7, il vient

$$2800 - 21x - 7y = 1800 - 6x - 12y.$$

Enfin, en transposant les termes, réduisant et divisant les deux membres par 5, on obtient

$$3x - y = 200.$$

En remplaçant dans cette équation x par $3y$, on trouve $8y = 200$, d'où $y = 25$; et l'on en conclut $x = 75$.

Ainsi, pour satisfaire aux conditions du problème, il faudra former un mélange de 75 parties du premier mélange donné avec 25 parties du second, et un autre des 25 parties restantes du premier mélange donné avec les 75 parties restantes du second; ou, plus simplement, il faudra prendre les trois quarts du premier mélange avec le quart du second, et le quart du premier avec les trois quarts du second.

On vérifie l'exactitude de cette solution comme il suit :

Le premier mélange donné contenant 60 parties de A et 40 parties de B, les trois quarts de ce mélange contiendront 45 parties de A et 30 de B; et puisque le second mélange contient 20 parties de A et 80 parties de B, le quart de ce mélange contiendra 5 parties de A et 20 parties de B. Ces deux portions réunies contiendront donc 50 parties de A et 50 parties de B.

D'un autre côté, le quart du premier mélange contiendra 15 parties de A et 10 parties de B; les trois quarts du second mélange contiendront 15 parties de A et 60 parties de B. Donc, en réunissant ces deux portions, on obtiendra un mélange qui contiendra 30 parties de A et 70 parties de B. Les quantités

des liquides A et B dans ce mélange seront donc proportionnelles aux nombres 3 et 7.

83. 4[e] Problème. — *Trois joueurs sont convenus qu'à chaque partie le perdant doublera l'argent des deux autres. Après trois parties, chacun des joueurs en ayant perdu une, se retire avec 120 francs. On demande la somme que chaque joueur avait en se mettant au jeu.*

Soient x la somme qu'avait le joueur qui perd la 1[re] partie, y la somme qu'avait le joueur qui perd la 2[e] partie, z la somme qu'avait le joueur qui perd la 3[e] partie.

Après la première partie, le 1[er] joueur a $x-y-z$, le 2[e] a $2y$, et le 3[e] a $2z$.

Après la deuxième partie, le 1[er] joueur a $2x-2y-2z$; le 2[e] a $2y-2z-(x-y-z)$, ce qui se réduit à $3y-z-x$; le 3[e] a $4z$.

Après la troisième partie, le 1[er] joueur a $4x-4y-4z$; le 2[e] a $6y-2z-2x$; le 3[e] a $4z-(3y-z-x)-(2x-2y-2z)$, ce qui se réduit à $7z-y-x$.

Puisque chacun des joueurs, après cette partie, a 120 fr., on doit avoir

$$\begin{aligned} 7z-y-x&=120,\\ 6y-2z-2x&=120,\\ 4x-4z-4y&=120. \end{aligned}$$

Les deux membres de la seconde équation sont divisibles par 2, et ceux de la troisième sont divisibles par 4; de sorte que ces deux équations se réduisent à

$$\begin{aligned} 3y-z-x&=60,\\ x-z-y&=30. \end{aligned}$$

En ajoutant celles-ci, et en ajoutant aussi la dernière avec l'équation $7z-y-x=120$, on obtient

$$\begin{aligned} 2y-2z&=90,\\ 6z-2y&=150, \end{aligned}$$

ou, en divisant par 2 les deux membres de chaque équation,

$$\begin{aligned} y-z&=45,\\ 3z-y&=75. \end{aligned}$$

On conclut de ces dernières équations, en les ajoutant, $2z = 120$, d'où $z = 60$. La substitution de la valeur de z dans l'équation $y - z = 45$ donne $y = 105$. Enfin, en mettant les valeurs de z et de y dans l'équation $x - z - y = 30$, on trouve $x = 195$. Ainsi, au commencement de la première partie, le premier joueur avait 195 fr., le deuxième 105 fr., et le troisième 60 fr.

Il est facile de s'assurer que ces nombres satisfont aux conditions de l'énoncé.

On peut résoudre ce problème d'une manière plus simple. Puisque la somme totale que possèdent les trois joueurs est trois fois 120 fr., ou 360 fr., la somme qui reste à chaque joueur, après la partie qu'il a perdue, est égale à celle qu'il avait au commencement de cette partie, diminuée de l'excès de 360 fr. sur la même somme. Ainsi, après la première partie, le 1er joueur a $x - (360 - x)$ ou $2x - 360$; le 2e a $2y$, et le 3e a $2z$. Après la deuxième partie, le 1er joueur a $4x - 720$; le 2e a $2y - (360 - 2y)$ ou $4y - 360$; le 3e a $4z$. Après la troisième partie, le 1er joueur a $8x - 1440$; le 2e a $8y - 720$; le 3e a $4z - (360 - 4z)$ ou $8z - 360$. En égalant ces trois quantités à 120, on obtient trois équations qui déterminent immédiatement les trois inconnues x, y, z.

Enoncés de problèmes à résoudre.

I. *Un père, interrogé sur l'âge de son fils, répond : Mon âge est triple de celui de mon fils ; il y a dix ans il en était le quintuple. Quel est l'âge du fils ?* (Rép. : 20 ans.)

II. *Trouver un nombre tel, que, si l'on y ajoute sa moitié, la somme surpasse* 60 *d'autant que le nombre lui-même est au-dessous de* 65. (Rép. : 50.)

III. *Partager* 32 *en deux parties telles, que, si l'on divise l'une de ces parties par* 6, *et l'autre par* 5, *on ait deux quotients dont la somme soit égale à* 6. (Les deux parties sont 12 et 20.)

IV. *Une personne a* 100 000 *francs : elle place une partie de cette somme à* 5 *pour* 100, *et l'autre à* 4 *pour* 100 ; *de cette manière, elle a un revenu de* 4640 *francs. Quelles sont les deux parties ?* (Rép. : 64000 francs et 36000 francs.)

V. *Un alliage d'or et d'argent du poids de* 100 *grammes, plongé dans l'eau, ne pèse plus que* $93^{gr},75$. *On sait que la perte de poids dans l'eau est pour l'or* 0,052, *et pour l'argent* 0,099. *Quelle est la quantité d'or contenue dans l'alliage?* (Rép. : $77^{gr}\frac{31}{47}$.)

VI. *Deux amis ont fait en commun une dépense de* 81 *francs. Il manque au premier, pour payer cette dépense, les* $\frac{2}{3}$ *de l'argent du second; et il manque au second les* $\frac{3}{5}$ *de l'argent du premier. Combien ont-ils chacun?* (Rép. : le premier a 45 francs, et le second 54 francs.)

VII. *Une personne possède un capital qu'elle fait valoir à un certain intérêt. Une autre personne qui possède* 10000 *francs de plus que la première, et qui fait valoir son capital à* 1 *de plus pour* 100, *a un revenu plus grand de* 800 *francs. Une troisième personne qui possède* 15000 *francs de plus que la première, et qui fait valoir son bien à* 2 *de plus pour* 100, *a un revenu plus grand de* 1500 *francs. On demande les biens des trois personnes, et à quel intérêt chacune d'elles fait valoir son bien?* (Rép. : la première personne possède 30000 francs, qu'elle fait valoir à 4 pour 100.)

VIII. *Trois billets qui valent ensemble* 2790 *francs, ont été escomptés au taux de* 5 *pour* 100. *Le premier est à* 7 *mois d'échéance, le deuxième à* 5 *mois, le troisième à* 4 *mois. On a perdu sur le premier autant que sur les deux autres, et sur le deuxième* 1 *franc de moins que le tiers de ce qu'on a perdu sur les deux autres. Déterminer la valeur de chaque billet.* (Rép. : la valeur du 1er billet est 1080 francs; celle du 2e, 720 francs; et celle du 3e, 990 francs.)

IX. *On a trois lingots du poids de* 400 *grammes chacun; le premier est composé de* 300 *grammes d'argent,* 25 *de cuivre et* 75 *d'étain; le deuxième contient* 25 *grammes d'argent,* 300 *de cuivre et* 75 *d'étain; enfin, le troisième est formé de* 350 *grammes de cuivre et* 50 *d'étain. On demande quelle portion il faut prendre de chacun de ces lingots, pour en former un quatrième qui contienne* 100 *grammes d'argent,* 225 *de cuivre et* 75 *d'étain.* (Rép. : il faut prendre les $\frac{3}{11}$ du premier lingot, les $\frac{8}{11}$ du deuxième, et zéro du troisième.)

X. *Un nombre est formé de quatre chiffres dont la somme*

est 11 : le chiffre des dizaines est égal à la somme des chiffres des centaines et des mille; celui des mille est égal à la somme de ceux des centaines et des unités; et en retranchant de ce nombre 1728, *on obtient pour reste le nombre renversé. Quel est ce nombre?* (Rép. : 3251.)

Emploi des quantités négatives dans les calculs et dans les problèmes.

84. Les explications que l'on trouve dans ce qui précède, au sujet de la résolution des équations et des problèmes, ne comprennent pas l'examen de diverses particularités qui se rencontrent fréquemment, et dont nous devons maintenant nous occuper.

Celle que nous considérerons en premier lieu est le cas où l'on se trouve amené à des soustractions qu'il n'est pas possible d'effectuer, parce que le nombre qu'il faudrait soustraire est plus grand que celui dont on devrait le soustraire.

85. Pour reconnaître comment on doit interpréter une semblable circonstance, et si l'on ne doit y voir que le symptôme d'une impossibilité devant laquelle il faut s'arrêter, considérons une équation du premier degré, à une seule inconnue, qui ait été ramenée à la forme.

$$ax + b = a'x + b'. \tag{1}$$

Si l'on a $a > a'$ et $b < b'$, on transportera le terme $a'x$ dans le premier membre, le terme b dans le second, et on obtiendra

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}. \tag{2}$$

Si, au contraire, $a < a'$ et $b > b'$, on trouvera en transposant les termes autrement,

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}. \tag{3}$$

Il suit de là que lorsqu'on mettra des nombres à la place des lettres dans l'une des formules (2) et (3), si les deux soustrac-

tions indiquées sont impossibles, on devra les effectuer toutes deux en sens contraire.

86. Lorsque $a > a'$ et $b > b'$, l'équation (1) exprime une condition impossible. En représentant par c la différence $a - a'$, cette équation revient à

$$(4) \qquad b + cx = b';$$

puisque $b > b'$, pour qu'il n'y eût pas d'impossibilité, en conservant les mêmes nombres donnés, il faudrait que l'on eût

$$(5) \qquad b - cx = b'.$$

La solution serait alors $x = \frac{b - b'}{c}$, ou

$$(6) \qquad x = \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Remarquons d'ailleurs que, quelle que soit l'équation primitive qui aura conduit par les réductions à l'équation (4), il suffira pour qu'elle devienne l'équation (5), que l'on y prenne avec des signes contraires tous les termes qui contiendront l'inconnue x; c'est-à-dire que ceux qui seront ajoutés soient au contraire soustraits, et ceux qui seront soustraits soient ajoutés. Car, en transposant les termes de la même manière qu'on l'avait fait pour l'équation primitive, les changements de + en — et de — en + se transmettront dans toutes les équations successives jusqu'à la dernière.

87. Beaucoup de questions présentent des cas qui se traduisent par des équations différentes seulement par les signes de tous les termes qui contiennent l'inconnue.

Supposons, par exemple, que l'on demande de quel nombre il faut altérer à la fois, et dans le même sens, les deux termes d'une fraction donnée $\frac{a}{b}$, pour qu'elle devienne égale à une autre fraction donnée $\frac{m}{n}$. Dans le cas d'une augmentation des deux termes, l'équation sera

$$(7) \qquad \frac{a + x}{b + x} = \frac{m}{n};$$

et dans le cas d'une diminution, elle sera

$$\frac{a-x}{b-x}=\frac{m}{n}. \tag{8}$$

Cette question comprend plusieurs problèmes différents. Si l'on donne, par exemple, les âges a et b de deux personnes à une époque désignée, et qu'on demande à quelle époque le rapport de leurs âges a été celui de deux nombres m et n, l'équation de ce problème sera l'équation (7) ou l'équation (8), suivant que l'époque inconnue qu'il s'agira de déterminer sera postérieure ou antérieure à celle à laquelle se rapporteront les âges a et b.

Soit encore cet autre problème :

Deux mobiles M et N se meuvent sur une ligne droite XY, avec des vitesses constantes m et n, et dans la même direction, de X en Y. Lorsque le mobile M est en A, à une distance connue a du point C, le mobile N est en B, à une autre distance connue b du même point C; à quelle distance de ce point C les deux mobiles se rencontrent-ils?

Si les deux mobiles ne commencent à se mouvoir qu'à partir des points A et B, ils ne pourront se rencontrer que dans le cas où l'on aura $m > n$. Mais, avec cette condition, la rencontre pourra avoir lieu avant qu'ils aient atteint le point C, ou après qu'ils auront passé par ce point. Si le point de rencontre est R, entre B et C, en représentant la distance CR par x, les distances AR et BR seront $a-x$ et $b-x$; et puisqu'elles auront été parcourues dans le même temps, leur rapport devra être égal à celui des vitesses m et n; ce qui conduira à l'équation (8). Si le point de rencontre est R′, au delà de C, la distance CR′ étant représentée par x, les distances AR′ et BR′ seront $a+x$ et $b+x$, et on aura à résoudre l'équation (7).

88. Les considérations que nous venons d'indiquer ont fait adopter des conventions qui sont devenues l'un des points fondamentaux de l'algèbre.

Quand on est conduit à une soustraction qui ne peut être effectuée, parce que le nombre que l'on doit soustraire est plus grand que celui dont il faut le soustraire, on retranche le plus petit nombre du plus grand, et on met devant le reste le signe —. Ainsi, dans le cas où il faudrait soustraire 16 de 10, au lieu de dire que l'opération est impossible, on dit que le reste est — 6.

Un nombre ainsi précédé du signe — est dit une *quantité soustractive*, ou *négative*. Par opposition, les nombres qui ne sont précédés d'aucun signe sont regardés comme précédés du signe +, et ils sont appelés *quantités additives*, ou *positives*.

La valeur absolue d'une quantité négative est le nombre dont elle est formée, abstraction faite du signe — qui le précède.

89. En résolvant l'équation (7), on trouve

$$x = \frac{na - mb}{m - n}. \tag{9}$$

Si l'on a $m > n$ et $mb > na$, le dénominateur $m - n$ est positif; la différence $na - mb$ est négative, et sa valeur absolue est $mb - na$. Nommons c le quotient de la division de ce nombre $mb - na$ par $m - n$; la valeur $x = c$ sera celle que l'on tirerait de l'équation (8). On dit, dans ce cas, que l'équation (7) est vérifiée par $x = -c$.

De même, quand l'équation (7) a la solution positive $x = c$, on dit que l'équation (8) est vérifiée par $x = -c$.

90. Puisque la solution négative $x = c$ change la somme $a + x$ en $a - c$, et la différence $a - x$ en $a + c$; on établit donc que *L'on ajoute une quantité négative en retranchant sa valeur absolue; et on soustrait une quantité négative en ajoutant sa valeur absolue.*

91. *On ajoute deux quantités négatives en faisant la somme de leurs valeurs absolues, et mettant devant elle le signe —.* Ainsi la somme des quantités — 5 et — 3 est — 8. Pour l'addition d'un plus grand nombre de quantités, les unes positives et d'autres négatives, on opère de la même manière que pour la réduction des termes semblables (n° 19).

92. L'addition, telle qu'elle vient d'être définie, n'est plus accompagnée de l'idée d'augmentation, et elle peut donner un résultat dont la valeur absolue soit moindre que celle de chacune des parties avec lesquelles il est formé. Ce résultat conserve cependant toujours le nom de *somme;* seulement on ajoute quelquefois, pour mieux prévenir toute méprise, la qualification d'*algébrique*, opposée à celle d'*arithmétique;* la somme arithmétique étant celle pour laquelle on ne considère que les valeurs absolues, tandis que la somme algébrique est celle que l'on forme en tenant compte des signes des quantités.

Quant à ce qui a été dit à l'égard de la soustraction, il n'en résulte aucun changement de la signification que cette opération a reçue dans l'arithmétique; car lorsqu'on a soustrait $-c$ de a, si l'on ajoute $-c$ au reste $a+c$, on retrouve a. Généralement, pour que le reste soit tel, qu'en lui ajoutant la quantité qui a été soustraite on retrouve celle dont on a soustrait, il faut que la soustraction s'effectue en ajoutant la quantité qu'on doit soustraire, prise avec le signe contraire à celui qu'elle a; il suit de là que la règle du n° 90 n'a le caractère d'une définition arbitraire que pour l'addition seulement.

93. On établit la définition de la multiplication, relativement aux signes des quantités, par la considération suivante.

Lorsque a, b, c, d, désignent des nombres positifs, on a

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd;$$

et si, en outre, $a>b$, $c>d$,

$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

On voit dans ces égalités, que, lorsque $+b$ est changé en $-b$, et $+d$ en $-d$, ou autrement, lorsque b et d deviennent des quantités négatives $-b$ et $-d$, les produits $+bc$ et $+ad$ deviennent $-bc$ et $-ad$, et le produit $+bd$ ne change pas. On conclut de là qu'*Il faut suivre pour le produit de deux facteurs monômes, l'un positif et l'autre négatif, ou tous deux négatifs, les mêmes règles que pour les signes des termes dans la multiplication des polynômes* (n° 31).

94. La division est toujours caractérisée par la condition que le produit du diviseur par le quotient soit égal au dividende; et il s'ensuit qu'*A l'égard des signes, les règles sont les mêmes que pour ceux des termes dans la division des polynômes* (n° 42).

95. La définition de la multiplication pour les cas de l'arithmétique est applicable à tous ceux dans lesquels le multiplicateur est positif; et elle pourrait servir à les expliquer. Selon cette définition, si l'on a, par exemple, à multiplier -4 par 3, le produit doit être la somme de 3 quantités égales à -4; il est donc -12. Si le multiplicateur est fractionnaire, par exemple -4 à multiplier par $\frac{2}{3}$, le produit doit être les $\frac{2}{3}$ de -4; or le tiers de -4 est $-\frac{4}{3}$, puisque $-\frac{4}{3}$ multiplié par 3 donne -4; le produit demandé est donc $-\frac{8}{3}$. Mais, lorsque le multiplicateur est négatif, la signification de l'opération ne résulte plus que de la définition qui est constituée par la règle du n° 93, et à laquelle on est amené comme nous l'avons expliqué.

96. Quand on retranche successivement d'un nombre tel que 10, par exemple, des nombres de plus en plus grands 1, 2, 3, 4, ..., 10, on obtient des restes de plus en plus petits, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste nul; et en continuant à soustraire des nombres croissants 11, 12, 13, etc., on produit les quantités négatives -1, -2, -3, etc. En conséquence de cela, *On regarde les quantités négatives comme plus petites que zéro, et comme étant d'autant plus petites, que leurs valeurs absolues sont plus grandes.* On a ainsi, par exemple,

$$-3<0,\quad -4<-3,\quad \text{ou bien}\quad 0>-3,\quad -3>-4.$$

97. La signification des valeurs négatives des inconnues dans les problèmes est indiquée par les explications qui ont été données pour faire comprendre comment on a été conduit aux quantités négatives (nos 86 et 87). Quand on a obtenu pour

une inconnue x une valeur négative $-a$, on remplace x par $-x$ dans l'équation qui est la traduction immédiate de la question, ce qui revient, pour les équations du prémier degré, à changer les signes de tous les termes qui contiennent l'inconnue x; on a ainsi une nouvelle équation qui est vérifiée par la valeur positive $x = a$. On compare cette nouvelle équation avec l'énoncé, afin de reconnaître s'il est possible de les faire accorder en modifiant quelques-unes des conditions, ou en changeant les suppositions que l'on a adoptées à l'égard de celles qui pouvaient être diversement interprétées, sans changer les valeurs des données. Lorsque cet accord peut être établi, il corrige ce qu'il y avait d'inexact dans l'énoncé ou dans les suppositions; et le problème, ainsi rectifié, admet une solution positive, égale en valeur absolue à celle qu'on avait trouvée.

Quand l'énoncé du problème ne peut être rendu compatible avec la nouvelle équation par aucune modification ou interprétation, la valeur négative n'a d'autre effet que d'annoncer l'impossibilité.

98. Le problème suivant dans lequel il y a deux inconnues, est placé ici comme exemple de l'interprétation des solutions négatives.

On a acheté plusieurs mètres d'étoffe pour une certaine somme : si l'on avait payé le mètre 1 franc de plus, en prenant 3 mètres de moins, on aurait dépensé 8 francs de plus; et si l'on avait payé le mètre 2 francs de moins, en prenant 5 mètres de plus, on aurait dépensé 25 francs de moins. Combien a-t-on acheté de mètres, et quel était le prix du mètre?

Nommons x le nombre de mètres que l'on a achetés, et y le prix du mètre; les équations du problème seront

$$(10) \qquad (x-3)(y+1) = xy + 8,$$

$$(11) \qquad (x+5)(y-2) = xy - 25.$$

En développant les calculs indiqués, et retranchant dans chaque équation le terme xy commun aux deux membres, on

obtient les suivantes :

$$x - 3y = 11, \quad 5y - 2x = -15.$$

En résolvant, on trouve $y = -7$, $x = -10$.

Pour interpréter ces valeurs, remplaçons dans les équations (10) et (11), x par $-x$, et y par $-y$; il vient ainsi

$$(12) \qquad (-x-3)(-y+1) = (-x)\times(-y) + 8,$$

$$(13) \qquad (-x+5)(-y-2) = (-x)\times(-y) - 25.$$

Comme on n'altère pas le produit de deux facteurs quand on change leurs signes, les équations (12) et (13) sont les mêmes que celles-ci :

$$(x+3)(y-1) = xy + 8, \quad (x-5)(y+2) = xy - 25.$$

On voit par là que le problème proposé serait résolu par les valeurs positives $x = 10$, $y = 7$, si l'on modifiait l'énoncé de la manière suivante :

On a acheté plusieurs mètres d'étoffe pour un certain prix : si l'on avait payé le mètre 1 franc de moins, en prenant 3 mètres de plus, on aurait dépensé 8 francs de plus; et si l'on avait payé le mètre 2 francs de plus, en prenant 5 mètres de moins, on aurait dépensé 25 francs de moins. Combien a-t-on acheté de mètres, et quel était le prix du mètre?

Les nombres donnés sont les mêmes dans cet énoncé que dans le précédent; seulement on prend quelques-uns de ces nombres dans une acception opposée à celle qu'ils avaient d'abord, en regardant comme des diminutions, par rapport aux nombres cherchés, ceux qui exprimaient des augmentations, et *vice versâ*.

99. On se sert des quantités négatives pour les données des problèmes toutes les fois que ces données sont des grandeurs qui doivent être comptées à partir d'une origine commune, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé ; comme les intervalles de temps comptés à partir d'une époque fixe, et qui se rapportent à des époques, les unes postérieures, les autres antérieures à cette origine; ou encore, les distances comptées sur une ligne, à partir d'un point fixe, et d'un côté et de l'autre

de ce point. Ces sortes d'oppositions se représentent généralement dans les équations et dans les formules par des oppositions de signes, qui se trouvent exprimées en convenant que les grandeurs dont il s'agit seront représentées par des nombres précédés du signe + ou du signe —, c'est-à-dire qu'elles seront positives ou négatives, suivant le sens dans lequel elles seront comptées. On parvient ainsi à renfermer dans une seule formule des cas différents d'un problème qui, sans ce moyen, exigeraient des formules différentes.

100. En résumé, l'emploi des quantités négatives est un moyen de généralisation et de simplification. Les règles auxquelles elles donnent lieu ne sont que l'expression des changements qu'éprouve le résultat d'un calcul algébrique, lorsque les quantités avec lesquelles il a été formé subissent des changements qui consistent en ce que certains termes, d'additifs deviennent soustractifs, ou de soustractifs, additifs; et en les considérant de cette manière, elles n'offrent rien qui ne soit parfaitement saisissable, et entièrement exempt d'obscurité.

101. Si, au lieu de la question qui conduit à l'équation (7) (n° 87), on se proposait la suivante : *Trouver un nombre tel, qu'en le diminuant de deux nombres donnés* a *et* b, *on obtienne deux restes dont le rapport soit celui des nombres* m *et* n, on aurait l'équation

$$\frac{x-a}{x-b}=\frac{m}{n}.$$

On pourrait appliquer à cette équation la formule (9), en y remplaçant a par $-a$ et b par $-b$, ce qui donnerait

$$x=\frac{mb-na}{m-n}.$$

Cet exemple se rapporte à ce qui a été dit d'une manière générale dans les deux derniers articles.

Cas d'impossibilité et d'indétermination des équations du premier degré.

102. Considérons l'équation

$$(1)\qquad \frac{3(2x+1)}{4}-5-\frac{3x+2}{10}=\frac{2(3x-1)}{5}.$$

En chassant les dénominateurs, développant les calculs et transposant les termes, on obtient successivement

$$15(2x+1)-100-2(3x+2)=8(3x-1),$$
$$30x+15-100-6x-4=24x-8,$$
$$30x-6x-24x=100+4-15-8,$$
$$0=81.$$

On reconnaît par ces opérations qu'il n'existe aucune valeur de x qui vérifie l'équation, puisque, si elle était vérifiée, on en conclurait $0=81$, ce qui est absurde.

On parviendrait à la même conclusion sans transposer les termes, en effectuant les calculs indiqués dans chaque membre. Il vient alors

$$\frac{6x}{4}+\frac{3}{4}-5-\frac{3x}{10}-\frac{2}{10}=\frac{6x}{5}-\frac{2}{5};$$

et en réduisant le premier membre,

$$\frac{6}{5}x-\frac{89}{20}=\frac{6}{5}x-\frac{2}{5}.$$

Sous cette forme, il est manifeste que l'égalité des deux membres ne peut être établie par aucune valeur de x.

103. Prenons actuellement l'équation

$$(2)\qquad \frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+\frac{x+1}{3}=x+\frac{7}{12}.$$

Elle donne

$$18x+9-10x-6+4x+4=12x+7,$$
$$18x-10x+4x-12x=7+6-9-4,$$
$$0=0.$$

L'identité $0 = 0$ fait connaître que l'équation proposée est vérifiée par toute valeur de x; et c'est, en effet, ce que l'on voit d'une manière plus directe, en effectuant les calculs indiqués dans le premier membre; car on trouve ainsi, après la réduction, $x + \frac{7}{12}$; de sorte que l'équation est une égalité.

104. Lorsqu'une équation ne peut être vérifiée par aucune valeur de l'inconnue, on dit qu'elle est *impossible;* et quand elle est vérifiée quelle que soit la valeur que l'on prenne pour l'inconnue, on dit qu'elle est *indéterminée*. Ainsi l'équation (1) est impossible, et l'équation (2) est indéterminée; on dit aussi que la dernière est *identique*.

105. Soient les deux équations

$$121x - 143y = 130, \tag{3}$$
$$187x - 221y = 340. \tag{4}$$

En multipliant la première par 187 et la seconde par 121, on trouve

$$22627x - 26741y = 24310,$$
$$22627x - 26741y = 41140.$$

Les premiers membres de ces équations étant les mêmes, tandis que les seconds membres sont des quantités connues inégales, il n'existe point de nombres qui, mis à la place de x et de y, puissent vérifier simultanément ces deux équations; par conséquent, le système des équations (3) et (4) n'admet pas de solution.

Il est essentiel de remarquer que chacune des équations prise séparément est possible, et peut être vérifiée d'une infinité de manières; seulement il n'y a aucune solution qui convienne à la fois aux deux équations. On dit, par cette raison, que les deux équations sont *incompatibles* ou qu'elles sont *contradictoires*. On dit aussi que le système de ces équations est *impossible*.

Si, au lieu d'effectuer l'élimination de x par réduction, on prend la valeur de x dans la première équation pour la substi-

tuer dans la seconde, on trouve

$$x = \frac{130 + 143y}{121},$$

et la seconde équation devient

$$187 \times \frac{130 + 143y}{121} - 221y = 340;$$

d'où

$$187 \times 130 + 187 \times 143y - 121 \times 221y = 340 \times 121.$$

En transposant les termes et effectuant les calculs, on obtient

$$26741y - 26741y = 41140 - 24310,$$
$$0 = 16830.$$

De cette manière, l'impossibilité de vérifier le système proposé se manifeste par une équation absurde, comme dans l'exemple du n° **102**. On parviendrait aussi à la condition absurde $0 = 16830$, si l'on retranchait l'une de l'autre les deux équations qu'on obtient en multipliant l'équation (3) par 187, et l'équation (4) par 121.

106. On a un exemple de deux équations dont le système est indéterminé, en prenant les suivantes :

$$121x - 143y = 110,$$
$$187x - 221y = 170.$$

Si l'on multiplie les deux membres de la première par 187 et ceux de la seconde par 121, on parvient à deux équations identiques. Il suit de là que, si l'une des équations proposées est vérifiée, l'autre le sera pareillement. Par conséquent, l'ensemble des deux équations peut seulement servir à faire connaître la valeur de l'une des inconnues x et y, après que l'on a attribué une valeur arbitraire à l'autre.

Si, au lieu d'effectuer l'élimination de x par réduction, on tire la valeur de x de la première équation et qu'on la substi-

tue dans la seconde, on trouve

$$187 \times \frac{110 + 143y}{121} - 221y = 170,$$
$$187 \times 143y - 121 \times 221y = 170 \times 121 - 110 \times 187,$$
$$26741y - 26741y = 20570 - 20570,$$
$$0 = 0.$$

De cette manière, l'indétermination du système proposé s'annonce par l'identité $0 = 0$, comme dans l'exemple du n° 103.

107. Considérons les trois équations

$$(5) \qquad 2x + y - 8z = 10,$$
$$(6) \qquad 3x - 2y + 5z = 14,$$
$$(7) \qquad 8x - 3y + 2z = 35.$$

En éliminant y entre la première et chacune des deux autres, on obtient

$$7x - 11z = 34, \quad 14x - 22z = 65.$$

Ces équations sont incompatibles, car le premier membre de la seconde est le double de $7x - 11z$, et le second membre 65 est différent du double de 34. Il suit de là que le système proposé n'admet aucune solution.

Dans cet exemple, les équations prises deux à deux ne sont pas incompatibles et elles admettent une infinité de solutions communes; mais l'une d'elles est incompatible avec le système des deux autres. Cette incompatibilité résulte de ce que le premier membre de l'équation (7) est la somme du premier membre de l'équation (5) et de deux fois le premier membre de l'équation (6), tandis que le second membre de l'équation (7) n'est pas égal à la somme qu'on obtient en ajoutant au second membre de l'équation (5) le double du second membre de l'équation (6).

108. Prenons les équations

$$2x + y - 8z = 10,$$
$$3x - 2y + 5z = 14,$$
$$8x - 3y + 2z = 38.$$

En éliminant y entre la première équation et chacune des deux autres, on trouve

$$7x - 11z = 34, \quad 14x - 22z = 68.$$

Ces deux équations sont identiques; car les deux membres de la seconde sont ceux de la première multipliés par 2. Il suit de là que le système proposé admet une infinité de solutions. Pour obtenir une de ces solutions, il faudra donner une valeur arbitraire à l'une des inconnues. Si l'on choisit arbitrairement la valeur de z, par exemple, l'équation $7x - 11z = 34$ fera connaître la valeur correspondante de x, et la valeur de y se tirera ensuite de l'une des équations proposées. On peut aussi exprimer deux des inconnues en fonction de la troisième. L'équation $7x - 11z = 34$ donne

$$x = \frac{34 + 11z}{7};$$

et par la substitution de cette valeur de x dans l'équation $2x + y - 8z = 10$, on trouve

$$y = \frac{2 + 34z}{7}.$$

Au moyen de ces deux formules, on obtient immédiatement les valeurs de x et de y quand on a attribué à z une valeur arbitraire.

L'indétermination des valeurs des inconnues pour les équations proposées, vient de ce que l'on obtient la troisième équation en ajoutant respectivement les deux membres de la première à ceux de la seconde multipliés par 2, de sorte que chacune des équations est une conséquence des deux autres.

109. Soient encore les trois équations

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 14, \\ 6x - 4y - 3z &= 15, \\ 9x - 6y - 7z &= 20. \end{aligned}$$

En éliminant y entre la première équation et chacune des deux autres, on obtient les deux équations $13z = 13$, $22z = 22$,

qui donnent l'une et l'autre $z = 1$. Pour satisfaire aux équations proposées, on pourra joindre à la valeur $z = 1$ une valeur arbitraire de l'une des inconnues x et y; et l'on obtiendra la valeur de l'autre inconnue au moyen de l'une des équations qui se réduisent toutes trois, lorsqu'on y fait $z = 1$, à $3x - 2y = 9$.

110. Prenons pour dernier exemple les quatre équations

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 8, \\ 2x - y + t &= 3, \\ 5z - x - 2t &= 2, \\ 10z - y - 3t &= 5. \end{aligned}$$

En éliminant y entre la première équation et la deuxième, on obtient pour résultat la troisième équation. Il suit de là que le système proposé n'offre, en réalité, que trois équations distinctes, savoir :

$$2x - y + t = 3, \quad 5z - x - 2t = 2, \quad 10z - y - 3t = 5.$$

En éliminant y entre les deux équations $2x - y + t = 3$ et $10z - y - 3t = 5$, on obtient $10z - 2x - 4t = 2$, et cette équation est incompatible avec $5z - x - 2t = 2$. Le système proposé est donc impossible.

111. Suivant ces exemples, lorsqu'on a un système de m équations du premier degré entre m inconnues (m désignant un nombre entier quelconque), il y a trois cas possibles :

Ou bien le système proposé peut être transformé par l'élimination successive des inconnues en une suite d'autres équivalents, jusqu'à ce que l'on parvienne à un système tel, que la dernière équation fournisse la valeur d'une inconnue, et que les autres équations, en remontant de la dernière à la première, déterminent successivement les valeurs des autres inconnues. Dans ce cas, on obtient une solution, et l'on n'en obtient qu'une seule.

Ou bien on parvient, dans le cours des calculs, à une condition absurde, ou à des équations manifestement contradictoires. Dans ce cas, le système proposé est impossible.

Ou bien enfin on parvient à des équations qui ne sont que des identités, ou à un système dans lequel plusieurs équations expriment des conditions identiques. Dans ce cas, les équations peuvent seulement servir à exprimer une partie des inconnues *en fonction* des autres, et les valeurs de celles-ci sont entièrement indéterminées. Quelques-unes des inconnues peuvent être déterminées, comme dans l'exemple du n° 109. Les équations peuvent aussi être incompatibles, comme dans le dernier exemple (n° 110).

112. Les circonstances sont les mêmes, pour l'indétermination ou pour l'impossibilité, lorsqu'on a, *à priori*, moins d'équations que d'inconnues.

Quand le nombre des équations est plus grand que celui des inconnues, on peut trouver les valeurs de toutes les inconnues avec une partie seulement des équations; et si ces valeurs ne vérifient pas toutes les autres équations, le système est impossible.

CHAPITRE TROISIÈME.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU PREMIER DEGRÉ. DISCUSSION DES FORMULES. EXPRESSIONS INFINIES ET INDÉTERMINÉES. PRINCIPES SUR LES INÉGALITÉS.

Résolution des équations générales du premier degré. — Loi des valeurs des inconnues.

113. On nomme équations générales du premier degré à plusieurs inconnues, celles dans lesquelles les coefficients des inconnues et les quantités connues sont représentés par des lettres. Pour éviter la confusion qui résulterait d'un trop grand nombre de lettres différentes, on emploie des lettres affectées d'un ou de plusieurs accents. Ainsi, le coefficient d'une inconnue dans l'une des équations étant représenté par la lettre a, on représente les coefficients de la même inconnue, dans les autres équations, par les lettres accentuées a', a'', a''', etc., qu'on prononce *a prime, a seconde, a tierce,* etc.

114. Soient les deux équations générales

$$ax + by = c, \tag{1}$$

$$a'x + b'y = c'. \tag{2}$$

En multipliant les deux membres de la première par b', ceux de la seconde par b, et retranchant ensuite les deux équations l'une de l'autre, on trouve

$$(ab' - ba')\,x = cb' - bc'; \tag{3}$$

d'où

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}. \tag{4}$$

On obtient la valeur de y en substituant la valeur de x dans l'une des deux équations, ou en faisant des calculs analogues à ceux que l'on a faits pour avoir la valeur de x. On trouve

ainsi

$$(5) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Quand on a trouvé la valeur de l'une des inconnues, on peut en déduire immédiatement celle de l'autre inconnue; il est clair, en effet, d'après les équations, que l'on passera de la valeur de x à celle de y en remplaçant les coefficients de x, a et a', par ceux de y, b et b', et *vice versâ*. En effectuant ces changements, on a $y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}$, et en changeant les signes des deux termes de la fraction, on retrouve la formule (5).

Pour appliquer les formules (4) et (5) à un exemple numérique, prenons les deux équations

$$5x - 3y = 14, \quad 8x - 15y = 2.$$

On devra faire $a = 5$, $b = -3$, $c = 14$, $a' = 8$, $b' = -15$, $c' = 2$; il en résultera $x = 4$, $y = 2$. Ces valeurs sont, en effet, celles que l'on obtient en résolvant directement les équations proposées.

115. Considérons maintenant les trois équations

$$(6) \qquad ax + by + cz = d,$$

$$(7) \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$

$$(8) \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

On pourrait éliminer une des inconnues entre la première équation et chacune des deux autres; on aurait alors à résoudre deux équations à deux inconnues. Mais les calculs sont plus simples de la manière suivante :

Les équations (6) et (7) peuvent s'écrire comme il suit :

$$ax + by = d - cz,$$

$$a'x + b'y = d' - c'z.$$

En regardant z comme une quantité connue, on obtiendra les valeurs de x et de y au moyen des formules (4) et (5), dans lesquelles on devra remplacer c et c' par $d - cz$ et $d' - c'z$; on trouve ainsi

$$x = \frac{(d - cz)b' - (d' - c'z)b}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{(d' - c'z)a - (d - cz)a'}{ab' - ba'}.$$

ou bien

(9) $$x = \frac{db' - bd' + (bc' - cb')z}{ab' - ba'},$$

(10) $$y = \frac{ad' - da' + (ca' - ac')z}{ab' - ba'}.$$

En remplaçant x et y par ces valeurs, dans l'équation (8), et réduisant, on en obtient une

(11) $$\mathrm{D}z = \mathrm{N};$$

on a

$$\mathrm{D} = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$
$$\mathrm{N} = ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''.$$

L'équation (11) donne la valeur de z, et en la substituant dans les équations (9) et (10), on en déduit les valeurs des deux autres inconnues x et y. On trouve ainsi les formules suivantes :

(12) $$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

(13) $$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

(14) $$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Lorsque l'on connaît la valeur de l'une des inconnues, on peut en déduire immédiatement celles des deux autres; on obtiendra la valeur de x en remplaçant dans celle de z la lettre c par a, et réciproquement, sans rien changer aux accents. On trouvera pareillement la valeur de y en remplaçant dans celle de z la lettre c par b, et réciproquement.

116. On résout aussi les équations générales du premier degré par la méthode suivante, dite *Méthode de Bezout.*

Reprenons les deux équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

On multiplie les deux membres de la première par une quantité indéterminée m, et l'on en retranche les deux membres de

la seconde équation, ce qui donne

$$(am - a')x + (bm - b')y = cm - c'.$$

Les valeurs de x et de y se déduisent de cette dernière équation, en disposant de l'indéterminée m de manière que le coefficient de l'inconnue qu'on veut éliminer se réduise à zéro. Ainsi, pour trouver x, on fait disparaître y en posant $bm - b' = 0$; d'où $m = \frac{b'}{b}$. Cette valeur de m étant substituée dans l'équation $(am - a')x = cm - c'$, on trouve

$$\left(a\frac{b'}{b} - a'\right)x = c\frac{b'}{b} - c',$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

La dernière équation donne pour x la valeur qu'on a trouvée précédemment. On obtient la valeur de y par un calcul analogue.

Passons aux équations générales à trois inconnues

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d', \quad a''x + b''y + c''z = d''.$$

On multiplie les deux membres de la première par une quantité indéterminée m, ceux de la seconde par une autre quantité indéterminée n; on ajoute les deux équations résultantes, et l'on en retranche la troisième équation $a''x + b''y + c''z = d''$; on obtient ainsi la suivante :

$$\begin{aligned}(am + a'n - a'')x &+ (bm + b'n - b'')y \\ + (cm + c'n - c'')z &= dm + d'n - d''.\end{aligned}$$

On trouve la valeur de l'une des inconnues x, y, z, par cette équation, en disposant des indéterminées m et n de manière que les coefficients des deux autres inconnues deviennent nuls. Ainsi, pour avoir la valeur de z, on pose

$$am + a'n - a'' = 0, \quad bm + b'n - b'' = 0.$$

On obtient les valeurs des indéterminées m et n par les formules précédentes pour les équations à deux inconnues, en remplaçant les inconnues x et y par m et n, les quantités

connues a, b, c, par a, a', a'', et a', b', c', par b, b', b''. On a

$$m = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'}, \quad n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'};$$

on substitue ces valeurs de m et de n dans l'équation $(cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''$, elle devient

$$\left(c\frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} + c'\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'} - c''\right)z$$
$$= d\frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} + d'\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'} - d''.$$

En chassant les dénominateurs, on parvient à l'équation qui est représentée dans le n° 115 par $Dz = N$, et l'on en déduit la valeur de z. On obtient la valeur de chacune des deux autres inconnues par un calcul semblable.

117. En examinant attentivement les formules que nous venons d'obtenir, on découvre une loi qui permet de les retrouver sans calcul, et qui s'étend à un nombre quelconque d'équations.

Le dénominateur est le même pour toutes les inconnues, et on l'obtient par la règle suivante :

Dans le cas de deux équations, on forme, avec les lettres a et b, les deux permutations ab, ba (*); on place entre elles le signe $-$, et l'on met dans chacune un accent à la seconde lettre.

Dans le cas de trois équations, on écrit la lettre c à toutes les places dans chacune des permutations $+ab$, $-ba$, en la mettant d'abord à la troisième place, puis à la deuxième et ensuite à la première. On conserve le signe de la permutation de deux lettres quand on écrit la lettre c à la dernière place, et l'on change le signe chaque fois que cette lettre change de place. On forme ainsi l'expression

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

(*) Les permutations de plusieurs lettres sont les différents arrangements qu'on peut former en écrivant ces lettres les unes à la suite des autres, de toutes les manières possibles.

Il ne reste alors qu'à mettre dans chaque terme de cette expression un accent à la seconde lettre, et deux accents à la troisième.

Lorsqu'il y a quatre équations, on écrit la lettre d à toutes les places dans chacune des permutations ci-dessus de trois lettres, en la mettant d'abord à la dernière place et la faisant successivement avancer d'une place jusqu'à la première. On conserve le signe de la permutation de trois lettres quand on écrit la lettre d à la dernière place, et l'on change le signe chaque fois que cette lettre avance d'un rang. On met ensuite, dans tous les termes que l'on a ainsi obtenus, un accent à la seconde lettre, deux à la troisième, trois à la quatrième. S'il y a un plus grand nombre d'équations, on continue de même.

Les numérateurs se déduisent, dans tous les cas, du dénominateur commun, en y remplaçant, pour chaque inconnue, la lettre qui exprime les coefficients de cette inconnue par celle qui exprime les quantités connues, sans changer les accents. Ainsi, dans les formules du n° 114, on obtient le numérateur de la valeur de x, $cb' - bc'$, en remplaçant, dans le dénominateur $ab' - ba'$, les coefficients a et a' de x par les quantités connues c et c'; on obtient pareillement le numérateur de la valeur de y en remplaçant dans le dénominateur b et b' par c et c'. Pour les formules du n° 115, on obtient le numérateur de x en remplaçant dans le dénominateur les coefficients a, a', a'', de x, par les quantités connues d, d', d''. Les numérateurs des deux autres inconnues sont formés de la même manière.

118. La loi que nous venons d'exposer a été reconnue par Cramer. Elle n'était d'abord qu'un résultat de l'observation; mais Laplace a démontré qu'elle est générale. La démonstration que nous allons rapporter est celle qui a été donnée par cet illustre géomètre, sauf quelques modifications qui y ont été apportées depuis. Pour la simplicité des notations, nous remplacerons les accentuations $'$, $''$, $'''$, etc., par les indices 1, 2, 3, etc.; de cette manière, les équations seront :

$$(15)\quad\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + \ldots + hw = k, \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + h_1w = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + h_2w = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots + h_{n-1}w = k_{n-1}. \end{array}\right.$$

Le nombre des inconnues et des équations est n, et les points tiennent la place des termes et des équations qu'on ne peut pas écrire tant que ce nombre n'a pas reçu une valeur particulière.

Nommons R le polynôme qu'on obtient en suivant la règle qui a été donnée pour la formation du dénominateur commun. Les termes de R et ce polynôme lui-même donnent lieu aux observations suivantes, sur lesquelles la démonstration est fondée :

1°. Le polynôme R contient évidemment toutes les permutations qui peuvent être formées avec les lettres a, b, $c,\ldots,h$. Chaque terme contient toutes les lettres, ne contient chacune d'elles qu'une seule fois, et contient une lettre sans indice et une lettre affectée de chacun des indices de 1 à $n-1$.

2°. Si l'on examine l'ordre des lettres dans chacun des termes de R, en le comparant à l'ordre alphabétique, et en considérant chaque lettre par rapport à toutes celles qui la suivent, les termes qui auront le signe + seront ceux dans lesquels le nombre des *inversions alphabétiques* sera pair ou zéro; et les termes qui auront le signe — seront ceux dans lesquels le nombre des *inversions* sera impair. Ainsi soit, par exemple, le terme *dbac*; il s'y trouve *quatre inversions,* trois par rapport à la lettre d, parce qu'elle est placée avant les trois lettres b, a, c, qui la suivent dans l'ordre alphabétique, et la quatrième par rapport à la lettre b, qui est placée avant a; en conséquence, ce terme aura le signe +.

On reconnaît immédiatement l'exactitude de cette dernière règle lorsqu'il n'y a que deux équations; car le polynôme R est alors $+ab - ba$, en faisant abstraction des indices; le premier terme, qui a le signe +, est sans inversion; et il s'en trouve une dans le second terme, qui a le signe —. Pour le cas

de trois équations, quand on écrit la troisième lettre c à la suite de chacune des deux permutations $+ab$, $-ba$, on ne change pas le nombre des inversions, et le signe du terme reste aussi le même. Chaque fois qu'on fait avancer cette lettre d'un rang vers la gauche, le nombre des inversions augmente de *un;* et puisqu'on change en même temps le signe, on a le signe $+$ toutes les fois que le nombre des inversions est devenu pair, et le signe $-$ toutes les fois que ce nombre est devenu impair. De même, pour le cas de quatre équations; en écrivant la lettre d à la suite d'une des permutations de trois lettres, on obtient un terme qui a le même nombre d'inversions que celui avec lequel il a été formé, et qui a aussi le même signe; et en changeant ensuite le signe chaque fois que la lettre d avance d'un rang, ce qui augmente de *un* le nombre des inversions, on retrouve le signe primitif ou le signe opposé, suivant que le nombre des inversions nouvelles est pair ou impair. La même chose aura lieu à chaque lettre nouvelle que l'on introduira; par conséquent, la règle que nous avons énoncée ne cessera pas d'être exacte, quel que soit le nombre des lettres.

3°. Deux termes de R dans lesquels les mêmes lettres occupent les mêmes rangs, à l'exception seulement de deux lettres qui se trouvent permutées entre elles, ont des signes contraires. Considérons, par exemple, deux termes, l'un dans lequel la lettre f est placée r rangs après b, l'autre dans lequel la lettre b vient, au contraire, r rangs après f; toutes les autres lettres ayant, d'ailleurs, les mêmes rangs dans ces deux termes. Pour passer du premier de ces termes au second, on peut faire descendre d'abord la lettre f jusqu'à ce qu'elle se trouve immédiatement avant b, en l'avançant successivement d'un rang; puis faire remonter ensuite la lettre b jusqu'à la place qu'occupait f. Chacun des déplacements successifs de la lettre qui descendra, ou de celle qui montera, introduira une inversion, ou en fera disparaître une; et comme la lettre qui montera subira un déplacement de moins que celle qui descendra, il y aura eu un nombre impair d'inversions introduites ou supprimées. Par conséquent, d'après la remarque précédente, les deux termes auront des signes contraires.

4°. Si l'on remplace une lettre dans tous les termes de R par une des autres lettres contenues dans ce polynôme, sans remplacer celle-ci, et en conservant les indices, le polynôme R deviendra identiquement nul. Supposons, par exemple, qu'on remplace la lettre b par f. Le polynôme R est composé de groupes de deux termes qui se déduisent l'un de l'autre par la permutation des deux lettres b et f seulement, et, d'après la remarque précédente, les deux termes de chaque groupe ont des signes contraires. Ces termes expriment des quantités différentes, à cause des indices différents de chacune des deux lettres b et f; mais, après le remplacement de b par f, ils sont égaux et ils se détruisent. Le polynôme R est donc réduit à zéro.

Ces observations préliminaires étant établies, nous allons passer à la démonstration que nous avons en vue.

Puisque chaque terme du polynôme R contient en même temps toutes les lettres $a, b, \ldots, h$, et ne contient chaque lettre qu'une seule fois, ou sans indice, ou avec l'un des indices de 1 à $n-1$, on peut mettre ce polynôme sous les différentes formes ci-après :

$$\begin{array}{l} Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}, \\ Bb + B_1 b_1 + B_2 b_2 + \ldots + B_{n-1} b_{n-1}, \\ Cc + C_1 c_1 + C_2 c_2 + \ldots + C_{n-1} c_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Dans la première expression, $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, désignent des polynômes qui ne contiennent pas la lettre a, et qui sont formés avec toutes les autres lettres. Pareillement $B, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, sont des quantités indépendantes de la lettre b; $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$, sont des quantités indépendantes de c; etc.

Multiplions les équations (15), la première par A, la deuxième par A_1, la troisième par A_2, ainsi de suite; et ajoutons-les. Le coefficient de x dans l'équation résultante sera la première expression ci-dessus du polynôme R; les coefficients des autres inconnues seront cette expression dans laquelle a sera remplacée par une des autres lettres; donc ils seront nuls. Le second membre sera la même expression dans laquelle a

sera remplacée par k. On conclura donc

$$(16) \qquad x = \frac{Ak + A_1 k_1 + \ldots + A_{n-1} k_{n-1}}{Aa + A_1 a_1 + \ldots + A_{n-1} a_{n-1}}.$$

On obtiendrait les valeurs des autres inconnues d'une manière semblable.

Discussion des formules données par les équations générales du premier degré. — Symboles $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$.

119. Les formules relatives aux équations du premier degré présentent des particularités correspondantes aux cas d'impossibilité et d'indétermination des équations. Les explications qui vont suivre ont pour objet de faire connaître ces particularités et d'en fixer la signification.

120. Considérons d'abord une seule équation, et représentons-la, après les réductions, par

$$(1) \qquad Ax = B;$$

A et B représentant des quantités connues algébriques.

On conclut de cette équation

$$(2) \qquad x = \frac{B}{A}.$$

Lorsque les quantités connues prennent des valeurs particulières pour lesquelles A ne devient pas zéro, l'équation a une solution; elle n'en a qu'une seule, et cette solution est donnée par la formule (2). Si l'on a $B = 0$, la solution est $x = 0$.

121. Lorsque A est nul et B a une valeur m différente de zéro, l'équation est impossible, et la formule (2) devient

$$x = \frac{m}{0}.$$

D'après la signification de la division, le symbole $\frac{m}{0}$ indique qu'il faut trouver un nombre tel, qu'en le multipliant par zéro

le produit soit égal à m. Or aucun nombre ne satisfait à cette condition ; car, par quelque nombre que l'on multiplie zéro, le produit est toujours zéro. Le résultat $x = \frac{m}{0}$ exprime donc l'impossibilité aussi bien que l'équation $0 \times x = m$.

122. Quand $A = 0$ et $B = 0$, l'équation est indéterminée, et la formule (2) devient

$$x = \frac{0}{0}.$$

Or le symbole $\frac{0}{0}$ marque qu'il faut trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne un produit égal à zéro; et tout nombre satisfait à cette condition. Le résultat $x = \frac{0}{0}$ exprime donc l'indétermination de l'inconnue, aussi bien que l'équation $0 \times x = 0$.

123. En divisant successivement un nombre m par des nombres décroissants, $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc., on obtient des quotients de plus en plus grands, m, $10m$, $100m$, $1000m$, etc.; et quel que soit le nombre m, on peut toujours prendre le diviseur assez petit pour que le quotient soit plus grand qu'un nombre donné quelconque. Le symbole $\frac{m}{0}$ exprime donc le dernier état d'une grandeur qui croît indéfiniment. On dit, par cette raison, qu'il représente l'infini. On désigne aussi l'infini par ce signe ∞.

124. La valeur d'une fraction algébrique étant *infinie* quand le dénominateur est zéro, sans que le numérateur soit zéro, et *indéterminée* quand ces termes sont tous deux zéro, on dit, par opposition, que, lorsque le dénominateur n'est pas nul, la fraction est une quantité *finie* et *déterminée*.

125. Dans le cas des équations générales

$$ax + by = c, \tag{3}$$
$$a'x + b'y = c', \tag{4}$$

on a trouvé

(5) $$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

(6) $$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Lorsque le dénominateur $ab' - ba'$ n'est pas zéro, les formules (5) et (6) donnent une valeur finie et déterminée de chacune des inconnues. En se reportant aux calculs du nº **114**, on voit que les équations admettent une solution unique, qui est celle que donnent les formules.

Supposons que l'on ait $ab' - ba' = 0$, les quantités $cb' - bc'$ et $ac' - ca'$ étant différentes de zéro; les formules donneront pour chaque inconnue le symbole $\frac{m}{0}$. En multipliant les deux membres de l'équation (3) par b', et ceux de l'équation (4) par b, on obtient

(7) $$ab'x + bb'y = cb',$$
(8) $$a'bx + bb'y = bc'.$$

Puisque l'on a $ab' - ba' = 0$, d'où $ab' = ba'$, les premiers membres des équations (7) et (8) sont identiques; et puisque, par hypothèse, $bc' - cb'$ n'est pas nul, les seconds membres sont différents. Les équations (3) et (4) sont donc contradictoires.

Supposons à présent que la valeur de x soit $\frac{0}{0}$.

Il faudra que l'on ait $ab' = ba'$ et $cb' = bc'$, ou $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$; on aura donc $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, d'où $ac' = ca'$, ce qui montre que la valeur de y sera aussi $\frac{0}{0}$. De ce que l'on a $ab' = ba'$ et $cb' = bc'$, il résulte que les équations (7) et (8) sont identiques. Le système proposé est donc indéterminé.

126. Si l'on a $b = 0$ et $b' = 0$, il en résulte $ab' - ba' = 0$, $cb' - bc' = 0$, et la quantité $ac' - ca'$ peut être différente de zéro. Dans ce cas, la valeur de x devient $\frac{0}{0}$, et celle de y est infinie.

Les équations (3) et (4) sont alors $ax = c$ et $a'x = c'$; on tire de la première $x = \frac{c}{a}$, et de la seconde, $x = \frac{c'}{a'}$. Si l'on n'a pas $ac' - ca' = 0$, les quantités $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$ sont différentes; car de l'égalité $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ on conclurait $ac' = ca'$, et $ac' - ca' = 0$. Les deux équations sont donc contradictoires. Quand on a à la fois $b = 0$, $b' = 0$, et $ac' - ca' = 0$, la valeur générale de y devient $\frac{0}{0}$. Ce symbole reçoit alors une juste application, puisque l'inconnue y n'entrant pas dans les équations, sa valeur est tout à fait arbitraire. Mais les équations donnent une valeur déterminée pour x, quoique la valeur générale de cette inconnue soit aussi réduite à $\frac{0}{0}$.

127. Considérons, comme dans le n° 118, un système de n équations contenant n inconnues.

Si le dénominateur commun, que nous avons nommé R, est différent de zéro, il faudra que parmi les quantités qui ont été désignées par $A, A_1 \ldots, B, B_1 \ldots, C, C_1 \ldots$, etc., il y en ait au moins une de chaque groupe qui ne soit pas nulle; car si toutes celles d'un même groupe étaient zéro, il s'ensuivrait $R = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons que A_{n-1}, par exemple, ne soit pas zéro. Les équations étant celles du n° 118, en multipliant la première par A, la deuxième par A_1, ainsi de suite, et en ajoutant ensuite toutes ces équations, on obtient celle-ci :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} A(ax + by + cz \ldots + hw) + A_1(a_1x + b_1y + c_1z \ldots + h_1w) + \ldots \\ + A_{n-2}(a_{n-2}x + b_{n-2}y \ldots) + A_{n-1}(a_{n-1}x + b_{n-1}y + \ldots) \\ = Ak + A_1k_1 + A_2k_2 \ldots + A_{n-2}k_{n-2} + A_{n-1}k_{n-1}. \end{array}\right.$$

Il est clair que, si l'on trouve pour les inconnues des valeurs qui vérifient cette équation et les $n - 1$ suivantes :

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} ax + by + cz \ldots + hw = k, \\ a_1x + b_1y + c_1z \ldots + h_1w = k_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}x + b_{n-2}y + c_{n-2}z \ldots + h_{n-2}w = k_{n-2}, \end{array}\right.$$

on a trouvé

(5) $$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$ $= k_{n-1}$;

(6) $$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$ ...ution du système pro-

Lorsque le dénominateur $ab' -$ ...duit, dans le n° 118, à la
mules (5) et (6) donnent une ... hypothèse, le dénominateur R
chacune des inconnues. En se... une valeur finie et déterminée.
on voit que les équations ... de x dans les équations (10), on
est celle que donnent l... équations entre $n - 1$ inconnues,
Supposons que l'... faire voir que ce système admettra une
et $ac' - ca'$ étant ... A_{n-1} ne contient pas la lettre a, et elle
pour chaque i... des autres lettres $b, c, \ldots, h$, avec l'indice
membres ... chaque terme de R ne contient qu'une seule
par b, ... indices; par conséquent, si l'on omet les termes
... équations (10), ou si l'on regarde x comme une
(7) ... la fonction R sera pour ces équations A_{n-1},
(8) ... pas nulle.

Il suit de là que, si la condition que R ait une valeur différente de zéro suffit pour que le système admette une solution, et n'en admette qu'une, dans le cas où il n'y a que $n - 1$ équations, cette condition est encore suffisante dans le cas de n équations. D'ailleurs on a vu qu'elle est, en effet, suffisante, lorsqu'il n'y a que deux équations; donc elle est également suffisante dans tous les cas.

128. Supposons actuellement qu'on ait $R = 0$, et que les numérateurs des valeurs générales des inconnues ne soient pas tous annulés.

Si le numérateur de la valeur de x n'est pas zéro, il faudra encore, d'après la formule (16) (n° 118), qu'une des quantités $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$, ne soit pas nulle; et en supposant, comme précédemment, que l'on n'ait pas $A_{n-1} = 0$, on pourra remplacer le système proposé par celui des équations (10) et (9). Mais dans l'équation (9) le coefficient de x est R, les coefficients des autres inconnues sont nuls identiquement (n° 118), et, par hypothèse, le second nombre n'est pas zéro. Donc, puisque $R = 0$, cette équation est impossible. Le système proposé est donc aussi impossible.

129. Examinons, en dernier lieu, le cas où les valeurs gé-
s des inconnues deviennent toutes $\frac{0}{0}$.

quantités A, A_1,..., B, B_1,..., C, C_1,..., etc., ne
utes nulles à la fois, en supposant encore que l'on
$_1 = 0$, le système proposé pourra toujours être
le système des équations (9) et (10); mais alors
(9) est une identité; et, pour chaque valeur arbi-
de x, le système (10) a une solution et n'en a qu'une
ule : le système proposé est donc indéterminé. On voit d'ailleurs qu'on ne pourra pas prendre à la fois des valeurs arbitraires pour deux des inconnues.

130. Quand on a en même temps

(11) $A = 0, \quad A_1 = 0, \ldots, \quad B = 0, \quad B_1 = 0, \ldots, \quad C = 0, \quad C_1 = 0, \ldots,$ etc.,

on ne peut plus faire usage de l'équation (9). Dans ce cas, le système proposé peut être indéterminé; mais il peut se faire aussi qu'il n'admette aucune solution. On en a un exemple dans les équations à deux inconnues, en supposant $a = 0$, $a' = 0$, $b = 0$, $b' = 0$; car les équations sont alors $c = 0$, $c' = 0$. On observe la même particularité pour les équations à trois inconnues (n° 115), quand on suppose

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}, \quad \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c}; \quad \text{d'où} \quad \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'}.$$

Il est facile de voir que ces suppositions réduisent à zéro les multiplicateurs de chacune des quantités a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', dans le dénominateur commun; et, par suite, les valeurs générales des inconnues deviennent toutes trois $\frac{0}{0}$.

En posant $a' = aq$, $a'' = aq'$, on a $b' = bq$, $c' = cq$, $b'' = bq'$, $c'' = cq'$, et les trois équations sont

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ q\,(ax + by + cz) &= d', \\ q'\,(ax + by + cz) &= d''. \end{aligned}$$

Si, outre les relations ci-dessus, on a $d' = dq$, $d'' = dq'$, les trois équations se réduisent à une, et l'on peut donner des

on a trouvé

$$(5) \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

$$(6) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Lorsque le dénominateur $ab' - ba'$ n'est pas zéro, les formules (5) et (6) donnent une valeur finie et déterminée de chacune des inconnues. En se reportant aux calculs du n° **114**, on voit que les équations admettent une solution unique, qui est celle que donnent les formules.

Supposons que l'on ait $ab' - ba' = 0$, les quantités $cb' - bc'$ et $ac' - ca'$ étant différentes de zéro; les formules donneront pour chaque inconnue le symbole $\frac{m}{0}$. En multipliant les deux membres de l'équation (3) par b', et ceux de l'équation (4) par b, on obtient

$$(7) \qquad ab'x + bb'y = cb',$$

$$(8) \qquad a'bx + bb'y = bc'.$$

Puisque l'on a $ab' - ba' = 0$, d'où $ab' = ba'$, les premiers membres des équations (7) et (8) sont identiques; et puisque, par hypothèse, $bc' - cb'$ n'est pas nul, les seconds membres sont différents. Les équations (3) et (4) sont donc contradictoires.

Supposons à présent que la valeur de x soit $\frac{0}{0}$.

Il faudra que l'on ait $ab' = ba'$ et $cb' = bc'$, ou $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ et $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$; on aura donc $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, d'où $ac' = ca'$, ce qui montre que la valeur de y sera aussi $\frac{0}{0}$. De ce que l'on a $ab' = ba'$ et $cb' = bc'$, il résulte que les équations (7) et (8) sont identiques. Le système proposé est donc indéterminé.

126. Si l'on a $b = 0$ et $b' = 0$, il en résulte $ab' - ba' = 0$, $cb' - bc' = 0$, et la quantité $ac' - ca'$ peut être différente de zéro. Dans ce cas, la valeur de x devient $\frac{0}{0}$, et celle de y est infinie.

Les équations (3) et (4) sont alors $ax = c$ et $a'x = c'$; on tire de la première $x = \frac{c}{a}$, et de la seconde, $x = \frac{c'}{a'}$. Si l'on n'a pas $ac' - ca' = 0$, les quantités $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$ sont différentes; car de l'égalité $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ on conclurait $ac' = ca'$, et $ac' - ca' = 0$. Les deux équations sont donc contradictoires. Quand on a à la fois $b = 0$, $b' = 0$, et $ac' - ca' = 0$, la valeur genérale de y devient $\frac{0}{0}$. Ce symbole reçoit alors une juste application, puisque l'inconnue y n'entrant pas dans les équations, sa valeur est tout à fait arbitraire. Mais les équations donnent une valeur déterminée pour x, quoique la valeur générale de cette inconnue soit aussi réduite à $\frac{0}{0}$.

127. Considérons, comme dans le n° 118, un système de n équations contenant n inconnues.

Si le dénominateur commun, que nous avons nommé R, est différent de zéro, il faudra que parmi les quantités qui ont été désignées par $A, A_1 \ldots, B, B_1 \ldots, C, C_1 \ldots$, etc., il y en ait au moins une de chaque groupe qui ne soit pas nulle; car si toutes celles d'un même groupe étaient zéro, il s'ensuivrait $R = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons que A_{n-1}, par exemple, ne soit pas zéro. Les équations étant celles du n° 118, en multipliant la première par A, la deuxième par A_1, ainsi de suite, et en ajoutant ensuite toutes ces équations, on obtient celle-ci :

$$(9)\left\{\begin{array}{l} A(ax + by + cz \ldots + hw) + A_1(a_1x + b_1y + c_1z \ldots + h_1w) + \ldots \\ + A_{n-2}(a_{n-2}x + b_{n-2}y \ldots) + A_{n-1}(a_{n-1}x + b_{n-1}y + \ldots) \\ = Ak + A_1k_1 + A_2k_2 \ldots + A_{n-2}k_{n-2} + A_{n-1}k_{n-1}. \end{array}\right.$$

Il est clair que, si l'on trouve pour les inconnues des valeurs qui vérifient cette équation et les $n - 1$ suivantes :

$$(10)\quad\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz \ldots + hw = k, \\ a_1x + b_1y + c_1z \ldots + h_1w = k_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}x + b_{n-2}y + c_{n-2}z \ldots + h_{n-2}w = k_{n-2}, \end{array}\right.$$

même sens XABY. *L'un d'eux parcourt* v *kilomètres en une heure, l'autre en parcourt* v'. *L'instant où le premier parvient en* A *précède de* h *heures celui où l'autre parvient en* B. *La distance* AB *est de* a *kilomètres. En quel endroit de la route les deux courriers se rencontrent-ils?* (Nous nommerons C le courrier dont la vitesse est v, et C' celui dont la vitesse est v'.)

$$X \overset{R' \quad A \quad B \quad R}{\rule{10em}{0.4pt}} Y.$$

Solution. Si l'on connaissait le nombre d'heures qui s'écoulent depuis l'instant où le courrier C parvient en A, jusqu'à l'instant de la rencontre, il serait facile de trouver le lieu de la rencontre. Nommons x ce nombre d'heures, et supposons que les deux courriers se rencontrent au point R. La distance AR sera parcourue par le courrier C en x heures; donc elle sera exprimée par vx. La distance BR sera parcourue par le courrier C' en $x - h$ heures, puisque ce courrier parvient en B, h heures après l'instant à partir duquel on compte le temps x; cette distance sera donc $v'(x-h)$. Par conséquent, l'équation du problème est

$$(1) \qquad vx = v'(x-h) + a,$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad x = \frac{a - hv'}{v - v'}.$$

Discussion. Si l'on a $v > v'$, et $a > hv'$, la valeur de x est positive; ainsi, dans ce cas, les deux courriers se rencontrent après l'arrivée du courrier C en A, comme on l'a supposé en mettant le problème en équation. C'est, en effet, ce que l'on reconnaît par l'examen des conditions de la question; car le produit hv' exprime la distance que le courrier C' doit parcourir pour arriver au point B, à partir du moment où le courrier C parvient en A : donc, puisque $hv' < a$, au moment où le courrier C atteint le point A, l'autre a dépassé ce point; et puisque la vitesse du second est moindre que celle du premier, celui-ci doit atteindre l'autre au bout d'un certain temps.

Lorsque $v > v'$ et $a < hv'$, la valeur de x est négative; pour qu'elle changeât de signe, il faudrait qu'au lieu de l'é-

quation (1) on eût

$$(3) \qquad vx = v'(x+h) - a.$$

Cette dernière équation fait voir que les distances des points A et B au point de rencontre auront été parcourues par les deux courriers dans les temps x et $x+h$, et que la première distance sera moindre que la seconde de l'intervalle AB; ce qui exige que le point de rencontre soit situé en deçà de A. L'énoncé du problème conduit directement à cette conclusion; car, de ce que l'on a $a < hv'$, il résulte que, lorsque le courrier C atteint le point A, l'autre est en deçà de ce point; et puisque $v > v'$, le second courrier restera toujours en arrière du premier; mais s'ils sont partis de deux points assez éloignés pour que celui dont la vitesse est la plus grande ait été d'abord en arrière, ils se seront rencontrés en un point en deçà de A, tel que R'. En mettant le problème en équation d'après cette supposition, on parvient à l'équation (3), et l'on en déduit une valeur de x qui ne diffère que par le signe de celle qui est donnée par l'équation (1).

On voit que les valeurs négatives de l'inconnue résolvent exactement le problème, au moyen de cette interprétation du signe —, que l'instant de la rencontre est antérieur à celui que l'on a choisi pour origine du temps.

Quand on a $v = v'$, et $a > hv'$ ou $a < hv'$, la valeur de x est infinie; ce qui indique que les deux courriers ne se rencontrent pas. C'est aussi ce que l'on voit par l'énoncé; car, d'après ces suppositions, quand le courrier C parvient en A, l'autre est au delà ou en deçà de ce point, et comme ils ont la même vitesse, ils conservent toujours entre eux la même distance.

Si l'on suppose en même temps $v = v'$, $a = hv'$, on trouve $x = \frac{0}{0}$. On reconnaît en effet que, dans ce cas, la valeur de x est indéterminée; car les deux courriers se trouvent en même temps au point A, et comme leurs vitesses sont égales, ils ne se quittent pas.

La supposition $v < v'$ donnerait lieu à des observations tout à fait semblables à celles que l'on vient de faire par rapport au cas où l'on a $v > v'$, et il est inutile de s'y arrêter.

Remarque. Si l'on supposait que le courrier C n'arrive au point A que h heures après l'instant où l'autre parvient en B, la quantité h prendrait dans l'équation et dans la formule des signes contraires à ceux dont elle est affectée. Ainsi, dans cette supposition, le temps inconnu x pourrait encore être déterminé par la formule (2), pourvu que l'on convînt de regarder la valeur de h comme étant négative.

Si le courrier C′ part d'un point situé dans la direction BY et vient à la rencontre de l'autre, en supposant toujours que l'arrivée de celui-ci au point A précède de h heures l'arrivée en B du courrier C′, on parviendra à une équation qui ne différera de l'équation (1) que par le signe du terme $v'(x-h)$. Ainsi, dans ce cas, on pourra encore se servir de la formule (2), pourvu que l'on regarde la vitesse v' comme étant négative.

134. 2e Problème. — *Partager chacun des nombres* a *et* b *en deux parties, de manière que l'une des parties de* a *contienne* m *fois l'une des parties de* b, *et l'autre partie de* b *contienne aussi* m *fois l'autre partie de* a (*).

Solution. Représentons par x la première partie de a, et par y la première partie de b; les deux autres parties seront $a-x$ et $b-y$, et l'on devra avoir les deux équations

$$x = my, \quad b - y = m(a - x).$$

On en déduit

$$x = \frac{m(ma-b)}{m^2-1}, \quad y = \frac{ma-b}{m^2-1},$$

par suite,

$$a - x = \frac{mb-a}{m^2-1}, \quad b - y = \frac{m(mb-a)}{m^2-1}.$$

Discussion. Si les deux nombres a et b sont inégaux, on pourra supposer que a est le plus grand; et si le nombre m

(*) On peut remplacer l'énoncé de ce problème par le suivant, qui conduit aux mêmes équations : *Partager chacun des côtés d'un rectangle donné, dont les dimensions sont* a *et* b, *en deux parties telles, que, si l'on joint les points de division, on obtienne un second rectangle dont les côtés adjacents soient dans le rapport de* m *à* 1. Au moyen de ce changement, l'interprétation des différentes circonstances que présentent les formules devient plus sensible.

est différent de l'unité, il sera permis de supposer $m > 1$; car tout ce que l'on dira dans ce cas pour x et $a - x$ s'appliquerait, dans le cas contraire, à y et $b - y$. Soient donc $a > b$ et $m > 1$. Les valeurs de x et de y sont positives; mais, pour que les valeurs des deux autres parties $a - x$ et $b - y$ soient aussi positives, il faut que l'on ait $mb > a$, ou $m > \frac{a}{b}$. Si l'on a au contraire $m < \frac{a}{b}$, les valeurs de $a - x$ et de $b - y$ sont négatives, ce qui fait voir que les valeurs de x et de y ne sont plus des parties de a et de b, mais des quantités respectivement plus grandes que ces nombres. Dans ce cas, le problème ne peut pas être résolu dans le sens de l'énoncé; mais les nombres qu'on déduit des formules ci-dessus formeraient une solution, si l'on modifiait cet énoncé dans le sens des équations ci-après :

$$x = my, \quad y - b = m(x - a).$$

Quand on suppose $a = b$, les formules deviennent

$$x = \frac{ma}{m+1}, \quad y = \frac{a}{m+1}, \quad a - x = \frac{a}{m+1}, \quad b - y = \frac{ma}{m+1};$$

dans ce cas, la question admet toujours une solution. Si l'on suppose en outre $m = 1$, chacune des quatre parties est égale à $\frac{1}{2}a$.

En se reportant aux premières formules, on voit que, si l'on a $m = 1$ et $a > b$, les valeurs des quatre parties sont infinies; d'où il suit que le problème est impossible; et si l'on suppose dans les mêmes formules $m = 1$ et $a = b$, les valeurs des inconnues se réduisent au symbole $\frac{0}{0}$. Quand on introduit les dernières suppositions dans les équations, elles deviennent l'une et l'autre $x = y$; ainsi la question est indéterminée.

Il est à remarquer que cette indétermination n'est plus indiquée par les formules quand on les a simplifiées, après avoir supposé $b = a$, en supprimant le facteur $m - 1$ dans les deux termes de chaque fraction.

135. Dans les exemples qui précèdent, les suppositions qui rendent les inconnues infinies produisent une impossibilité dans la question; mais il n'en est pas toujours ainsi. Quand une formule donne une valeur infinie pour une inconnue, par suite de certaines valeurs particulières attribuées aux données de la question, ce résultat exprime que, si les données s'approchaient indéfiniment de ces valeurs particulières, l'inconnue croîtrait de manière à surpasser toute grandeur assignable. Or, dans les questions dont la solution dépend d'une construction géométrique, il arrive souvent que ce dernier état des accroissements de l'inconnue, qui est l'infini, correspond à une construction déterminée. Dans ce cas, la valeur infinie est une solution de la question (*).

Observations sur les expressions indéterminées, et sur les valeurs infinies.

136. L'indétermination ne s'annonce pas seulement dans l'Algèbre par le symbole $\frac{0}{0}$. Considérons, par exemple, les expressions

$$\frac{A}{B}\times C,\quad \frac{A}{B}:\frac{D}{C};$$

A, B, C, D, étant des quantités algébriques quelconques. Si l'on établit des suppositions qui annulent B et C, et par lesquelles A et D prennent des valeurs finies, différentes de zéro, ces expressions deviendront

$$0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty}.$$

On peut les remplacer par d'autres qui seront $\frac{0}{0}$ pour les

---

(*) Considérons, par exemple, cette question : *Trouver sur le prolongement de la ligne qui joint les centres de deux cercles, le point où passe la tangente commune aux deux cercles.* On verra aisément qu'en représentant par a la distance des centres, par r et r' les rayons des deux cercles, et par d la distance du point cherché au centre du premier cercle, on a $d=\frac{ar}{r-r'}$. Quand $r=r'$, on trouve $d=\infty$; ce résultat est la solution qui convient à la question, car on doit en conclure que la tangente commune ne rencontre pas la ligne des centres, c'est-à-dire qu'elle lui est parallèle.

mêmes suppositions; car $\frac{A}{B} \times C = \frac{AC}{B}$, $\frac{A}{B} : \frac{D}{C} = \frac{AC}{BD}$; et lorsque $B = 0$ et $C = 0$, les fractions $\frac{AC}{B}$ et $\frac{AC}{BD}$ sont toutes deux $\frac{0}{0}$. Les symboles $0 \times \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont donc équivalents à $\frac{0}{0}$.

137. Lorsque les deux termes d'une fraction algébrique s'annulent à cause d'un facteur commun qui doit être supprimé, la valeur de la fraction n'est pas indéterminée. Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2};$$

elle devient $\frac{0}{0}$ lorsqu'on suppose $x = a$; mais en divisant les deux termes par $x - a$, on obtient la fraction équivalente

$$\frac{x^2 + ax + a^2}{x + a};$$

pour $x = a$, celle-ci devient $\frac{3a^2}{2a}$, ou $\frac{3a}{2}$.

Les deux fractions

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^2 - a^2}, \quad \frac{x^2 - a^2}{x^2 - 2ax + a^2},$$

deviennent aussi $\frac{0}{0}$ quand on suppose $x = a$; mais en supprimant d'abord le facteur $x - a$, qui est commun aux deux termes, et faisant ensuite $x = a$, on trouve pour la première fraction zéro, et pour l'autre l'infini.

138. Si, au lieu de supposer seulement $x = a$, on fait prendre à x des valeurs qui s'approchent de plus en plus de a, on obtiendra pour la fraction $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$, des valeurs déterminées qui seront les mêmes que celles de la fraction $\frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$, et qui s'approcheront, par conséquent, de plus en plus de $\frac{3}{2}a$. C'est ce que l'on entend quand on dit que la *vraie valeur* de

$\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$, pour $x = a$, est $\frac{3}{2}a$. Les valeurs o et ∞ que l'on trouve pour les deux autres fractions, sont pareillement les *limites* vers lesquelles tendent ces fractions lorsque x tend à devenir égal à a.

Généralement, *Lorsqu'on a supprimé un facteur commun par lequel les deux termes d'une fraction étaient rendus nuls, la valeur déterminée qui en résulte est la limite des valeurs que prend la fraction proposée quand on s'approche de plus en plus de l'hypothèse qui avait d'abord donné* $\frac{0}{0}$. Cette limite peut être *une quantité finie quelconque, zéro* ou l'*infini.*

139. Quand le dénominateur d'une fraction prend des valeurs de plus en plus grandes, sans que le numérateur augmente, la fraction prend des valeurs de plus en plus petites; de telle sorte que, si la valeur du dénominateur augmente jusqu'à l'infini, celle de la fraction décroît jusqu'à zéro. Ainsi, m étant une quantité quelconque, $\frac{m}{\infty} = 0$.

140. Lorsque les valeurs d'une fraction croissent jusqu'à l'infini, elles peuvent être toutes positives ou toutes négatives; il peut aussi arriver que la fraction soit susceptible de prendre des valeurs très-grandes positives, et d'autres valeurs très-grandes négatives. Il s'ensuit que les valeurs infinies sont tantôt positives, tantôt négatives, et qu'elles peuvent être aussi à la fois positives et négatives.

Considérons, par exemple, la fraction

$$\frac{m}{a - x};$$

supposons que m et a représentent des quantités constantes et positives, et concevons que l'on fasse croître x à partir de zéro. Tant que la valeur de x sera moindre que a, la fraction aura une valeur positive qui deviendra de plus en plus grande; quand on fera $x = a$, la valeur de la fraction sera infinie; et quand x croîtra au delà de a, les valeurs de la fraction seront négatives et iront en décroissant. La valeur infinie produite

par la supposition $x = a$ pourra donc être indifféremment regardée comme positive ou comme négative.

Si, au lieu de la fraction ci-dessus, on a la suivante :

$$\frac{m}{(a-x)^2},$$

on obtiendra toujours une valeur positive, soit que l'on donne à x une valeur plus petite que a, ou une valeur plus grande. En conséquence, la valeur infinie produite par $x = a$ sera positive.

Si, dans la dernière fraction, m désigne une quantité négative, la supposition $x = a$ donnera une valeur infinie négative.

Pour exprimer l'ambiguïté de la valeur infinie que prend la première fraction quand on fait $x = a$, on représente cette valeur par $\pm \infty$; tandis que la valeur infinie que prend la seconde fraction est représentée par $+\infty$ quand m est une quantité positive, et par $-\infty$ quand m est une quantité négative.

Des inégalités.

141. On a fréquemment à considérer des inégalités auxquelles il faut appliquer des transformations semblables à celles qui servent à résoudre les équations du premier degré.

Pour expliquer d'une manière générale les principes sur lesquels reposent ces transformations, nous commencerons par faire remarquer que, de l'inégalité $a > b$, il résulte toujours $a - b > 0$, qui exprime que la différence $a - b$ est positive (n° 96) ; et réciproquement, lorsque la seconde condition est satisfaite, la première l'est également. En effet, si a et b sont des quantités positives, il est clair que les deux conditions ont lieu en même temps ; si b est une quantité négative et a une quantité positive, on a $a > b$ et on a aussi $a - b > 0$, puisque la différence $a - b$ est la somme de deux quantités positives. Si a est une quantité négative, il faut pour chacune des deux conditions, que b soit aussi une quantité négative, et que sa valeur absolue soit plus grande que celle de a. Ces deux conditions sont donc toujours équivalentes.

142. *Une inégalité n'est pas troublée quand on ajoute*

une même quantité aux deux membres, ou quand on soustrait la même quantité des deux membres. Ainsi, de $a > b$ il résulte $a \pm c > b \pm c$. Car la différence $a - b$ étant positive, la différence $(a \pm c) - (b \pm c)$ est aussi positive.

On conclut de là qu'*On peut transporter un terme d'un membre d'une inégalité dans l'autre, en lui donnant dans celui-ci le signe contraire à celui qu'il avait dans le premier.*

Lorsqu'on change les signes de tous les termes d'une inégalité, on doit renverser le signe d'inégalité; car cela revient à faire passer tous les termes du premier membre dans le second, et ceux du second membre dans le premier.

On ne trouble point une inégalité en multipliant ou en divisant les deux membres par une quantité positive. Ainsi, lorsque m désigne une quantité positive, si $a > b$, on a aussi $ma > mb$, $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$. Car la différence $a - b$ étant positive, le produit et le quotient de cette différence par m sont aussi positifs.

Quand on multiplie les deux membres d'une inégalité par une quantité négative, on doit renverser le signe d'inégalité; car cela revient à multiplier les deux membres par la valeur absolue de cette quantité, et à changer ensuite les signes de tous les termes.

143. Lorsqu'une quantité inconnue n'entre dans une inégalité qu'à la première puissance, on peut *dégager* cette quantité, c'est-à-dire que l'on peut ramener l'inégalité à une forme telle, que cette quantité soit seule dans un membre, sans autre coefficient que l'unité. On suit pour cela la même marche que pour résoudre une équation du premier degré.

Considérons, par exemple, l'inégalité $3x - 2 > \frac{5}{2}x - \frac{4}{5}$. On chasse les dénominateurs, en multipliant les deux membres par 10; il vient

$$30x - 20 > 25x - 8.$$

En réunissant les termes en x dans le premier membre, et les termes connus dans le second, on obtient

$$30x - 25x > 20 - 8, \quad \text{ou} \quad 5x > 12.$$

Enfin, en divisant les deux membres de la dernière inégalité par 5, on trouve qu'elle se réduit à $x > \frac{12}{5}$.

En exécutant des transformations semblables sur l'inégalité $\frac{7}{6} - \frac{5}{4}x < 8 - 2x$, on en déduit $x < \frac{82}{9}$.

Si l'on a l'inégalité $43 - 5x < 10 - 8x$, on en conclura de la même manière $x < -11$.

Dans le premier exemple, le nombre $\frac{12}{5}$, ou $2\frac{2}{5}$, est la *limite inférieure* des valeurs de x.

Dans le deuxième exemple, le nombre $\frac{82}{9}$, ou $9\frac{1}{9}$, est la *limite supérieure* des valeurs de x.

Dans le troisième exemple, les valeurs de x ne peuvent être que des quantités négatives numériquement plus grandes que 11.

Si l'inconnue x devait vérifier à la fois les deux premières inégalités, elle ne pourrait recevoir que les valeurs comprises entre $2\frac{2}{5}$ et $9\frac{1}{9}$. Si cette inconnue devait vérifier à la fois la deuxième inégalité et la troisième, il suffirait qu'elle vérifiât la condition $x < -11$. Enfin, il n'y a aucune valeur de x qui puisse vérifier à la fois la première inégalité et la troisième.

144. Considérons actuellement deux inégalités du premier degré entre deux inconnues x et y,

$$3x - 2y > 5, \quad 5x + 3y > 16.$$

On conclut de ces inégalités

$$x > \frac{5 + 2y}{3}, \quad x > \frac{16 - 3y}{5}.$$

On pourra attribuer à y une valeur quelconque, et avec chaque valeur arbitraire de y on pourra donner à x toutes les valeurs plus grandes que la plus grande des deux quantités

$$\frac{5 + 2y}{3}, \quad \frac{16 - 3y}{5}.$$

On conclut aussi des inégalités proposées

$$y < \frac{3x-5}{2}, \quad y > \frac{16-5x}{3};$$

pour que ces deux dernières conditions puissent être remplies, il faut que l'on ait

$$\frac{3x-5}{2} > \frac{16-5x}{3},$$

d'où l'on conclut

$$x > \frac{47}{19}.$$

L'inconnue x ne pourra donc recevoir que les valeurs supérieures à $\frac{47}{19}$ ou $2\frac{9}{19}$; et pour chaque valeur de x, on ne devra donner à y que des valeurs comprises entre les deux limites ci-dessus.

145. Lorsque l'on a plusieurs inégalités dans le même sens,

$$a > b, \quad a' > b', \quad a'' > b'', \quad \text{etc.}$$

on en conclut, en faisant la somme des premiers membres et celle des seconds membres,

$$a + a' + a'' + \text{etc.} > b + b' + b'' + \text{etc.};$$

car les différences $a - b$, $a' - b'$, $a'' - b''$, etc., étant toutes positives, leur somme $a - b + a' - b' + a'' - b'' + \text{etc.}$, ou $(a + a' + a'' + \text{etc.}) - (b + b' + b'' + \text{etc.})$, est aussi positive.

Si les quantités a, a', a'', etc., b, b', b'', etc., sont toutes positives, les inégalités $a > b$, $a' > b'$, etc., donnent aussi

$$aa'a''\ldots > bb'b''\ldots,$$

car chacun des quotients $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, etc., est alors un nombre plus grand que 1; par conséquent, le produit de ces quotients, $\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots}$, est aussi plus grand que 1.

Cette dernière propriété peut cesser d'avoir lieu lorsque les quantités a, a', etc., b, b', etc., ne sont pas toutes positives. On en a un exemple en prenant les inégalités $8 > 5$ et $-3 > -4$; le produit des premiers membres est -24, celui

des seconds membres est -20; celui-ci est plus grand que le premier.

Lorsque les quantités a et b sont positives, si l'on a $a>b$, il en résulte, d'après la proposition précédente, $a^m>b^m$; mais la première inégalité n'entraîne plus la seconde quand les quantités a et b ne sont pas positives. On a, par exemple, $-3>-4$ et $(-3)^2<(-4)^2$.

146. Théorème. *Soient plusieurs fractions* $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$, etc., *dont les numérateurs sont des quantités quelconques, et dont les dénominateurs sont tous positifs; la fraction* $\frac{a+a'+a''\ldots}{b+b'+b''\ldots}$ *sera une moyenne entre toutes ces fractions; c'est-à-dire qu'elle aura une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite de ces fractions.*

Démonstration. Supposons que $\frac{a}{b}$ soit la plus petite des fractions proposées, en sorte que l'on ait

$$\frac{a'}{b'}>\frac{a}{b},\quad \frac{a''}{b''}>\frac{a}{b},\quad \frac{a'''}{b'''}>\frac{a}{b},\quad \text{etc.};$$

puisque les dénominateurs sont positifs, on conclura de ces inégalités

$$a'>b'\times\frac{a}{b},\quad a''>b''\times\frac{a}{b},\quad a'''>b'''\times\frac{a}{b},\quad \text{etc.}$$

D'après celles-ci et l'égalité $a=b\times\frac{a}{b}$, en faisant la somme des premiers membres et celle des seconds membres, on aura

$$a+a'+a''+\text{etc.}>(b+b'+b''+\text{etc.})\times\frac{a}{b};$$

donc

$$\frac{a+a'+a''+\text{etc.}}{b+b'+b''+\text{etc.}}>\frac{a}{b}.$$

On prouverait de la même manière que la fraction $\frac{a+a'+a''+\text{etc.}}{b+b'+b''+\text{etc.}}$ est plus petite que la plus grande des fractions $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$, etc.

CHAPITRE QUATRIÈME.

RACINE CARRÉE DES QUANTITÉS LITTÉRALES. CALCUL DES RADICAUX DU SECOND DEGRÉ.

Notations. — Double valeur de la racine carrée et des racines de degré pair. — Racines imaginaires.

147. On indique les racines par le signe $\sqrt{\ }$, qu'on nomme *radical*. La racine du degré *m* de *a* s'exprime par $\sqrt[m]{a}$; et le nombre *m* est appelé *indice* ou *exposant* du radical. Dans le cas de la racine carrée on sous-entend l'indice, et l'on écrit simplement $\sqrt{a}$.

Pour la racine d'une fraction, on doit faire descendre le signe $\sqrt{\ }$ au-dessous de la barre qui sépare les deux termes; de cette manière $\sqrt{\frac{341}{27}}$; lorsqu'on écrit $\frac{\sqrt{341}}{27}$, on n'indique pas la racine carrée de la fraction $\frac{341}{27}$, mais le quotient de la division de la racine carrée de 341 par le nombre 27. Lorsque l'on a à exprimer la racine d'un polynôme, on prolonge la barre du radical sur toute la quantité, ou l'on emploie des parenthèses. Ainsi, pour la racine carrée de $a^3 - 2a^2b + 4b^3$, on écrit $\sqrt{a^3 - 2a^2b + 4b^3}$, ou $\sqrt{}(a^3 - 2a^2b + 4b^3)$.

148. Le carré d'une quantité négative étant positif, *une quantité positive a deux racines carrées, l'une positive, l'autre négative, et dont la valeur absolue est la même.* Le nombre 25, par exemple, qui est le carré de 5, est aussi le carré de -5; il a donc deux racines carrées, $+5$ et -5. Tout nombre plus grand ou plus petit que 5, pris positivement ou négativement, donnera un carré différent de 25; par conséquent, $+5$ et -5 sont les seules racines carrées de 25.

Une quantité négative n'a pas de racine carrée. Suppo-

sons, par exemple, que l'on demande la racine carrée de -25; la valeur absolue de cette racine ne pourrait être que 5; or le nombre 5, pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, a pour carré $+25$; il n'existe donc aucune quantité positive ou négative dont le carré soit égal à -25. On dit, par cette raison, que la racine carrée d'une quantité négative est *imaginaire*. Par opposition, les quantités positives et négatives sont appelées *quantités réelles*.

Pour les racines des différents degrés, les règles des signes dans la multiplication conduisent aux propositions suivantes :

La racine d'un degré pair d'une quantité positive a indifféremment le signe + ou le signe —.

La racine d'un degré impair d'une quantité positive ou d'une quantité négative a le signe de cette quantité.

La racine d'un degré pair d'une quantité négative est imaginaire.

Racines carrées des monômes.

149. D'après les règles de la multiplication, on fait le carré d'un monôme entier en faisant le carré du coefficient et doublant les exposants des lettres. On fait le carré d'une fraction en faisant les carrés des deux termes.

Il en résulte qu'*On obtient la racine carrée d'un monôme entier en prenant la racine carrée du coefficient et divisant les exposants des lettres par 2.*

On obtient la racine carrée d'une fraction en prenant les racines carrées des deux termes.

$$\sqrt{25a^6b^4c^2} = 5a^3b^2c, \quad \sqrt{\frac{25a^4b^6}{36c^2d^2}} = \frac{5a^2b^3}{6cd}.$$

Conformément à ce qui a été dit dans le n° **148**, on peut donner à la racine le signe $+$ ou le signe $-$.

150. Lorsqu'une racine d'un nombre n'est exprimée exactement ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire, on dit qu'elle est *incommensurable*, parce qu'elle n'a pas de commune mesure avec l'unité. Les nombres incommensurables sont aussi appelés *irrationnels*, parce qu'ils provien-

nent des rapports ou *raisons* qui ne sont pas susceptibles d'être évalués exactement; on dit, au contraire, que les nombres entiers ou fractionnaires sont *commensurables* ou *rationnels*. On appelle de même *expressions* ou *quantités irrationnelles* les racines des quantités littérales qui ne peuvent être exprimées sans le signal radical; *expressions* ou *quantités rationnelles* toutes celles qui ne renferment que les signes des quatre premières opérations.

Calcul des radicaux du second degré.

151. On nomme *radical* non-seulement le signe par lequel on indique une racine, mais aussi la racine elle-même.

Le radical $\sqrt{A}$ pourrait être regardé comme comprenant les deux racines carrées de A, mais il est préférable de supposer que lorsqu'il n'est précédé d'aucun signe, ou lorsqu'il est précédé du signe $+$, il ne représente que la racine carrée positive, qu'on nomme la *valeur arithmétique;* et pour indiquer à la fois les deux valeurs, on place devant le radical le double signe $\pm$.

152. On dit que des quantités radicales sont *semblables* lorsqu'elles sont formées avec le même radical, comme $5\sqrt{2ab}$, $3\sqrt{2ab}$, $3(c+d)\sqrt{2ab}$.

Pour ajouter ou soustraire des quantités radicales semblables, il faut ajouter ou soustraire les facteurs rationnels et multiplier le résultat par le radical commun. Ainsi

$$5\sqrt{2ab}+3\sqrt{2ab}=8\sqrt{2ab},$$
$$5\sqrt{2ab}-3\sqrt{2ab}=2\sqrt{2ab},$$
$$3a\sqrt{c}\pm 2b\sqrt{c}=(3a\pm 2b)\sqrt{c}.$$

La somme et la différence de deux quantités radicales dissemblables, comme $3\sqrt{a}+2\sqrt{b}$, $3\sqrt{a}-2\sqrt{b}$, ne sont pas susceptibles de réduction.

153. *On multiplie et l'on divise l'un par l'autre deux radicaux du second degré, en faisant la multiplication ou la division des quantités placées sous le signe radical, et mettant le résultat sous un radical du même degré.*

Il faut démontrer que

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Or le carré du produit $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est $(\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$ ou $a \times b$; donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est la racine carrée de $a \times b$. De même, le carré de $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est $\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}$, ou $\frac{a}{b}$; donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est la racine carrée de $\frac{a}{b}$.

On trouve au moyen de ces règles,

$$3a\sqrt{8b} \times \frac{5}{4}\sqrt{2b} = \frac{15a}{4}\sqrt{16b^2} = \frac{15a}{4} \times 4b = 15ab;$$

$$3a\sqrt{8b} : \frac{5}{4}\sqrt{2b} = \frac{12a}{5}\sqrt{4} = \frac{24}{5}a.$$

154. En formant les puissances successives de $\sqrt{a}$, on obtient les résultats suivants :

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a},$$
$$(\sqrt{a})^4 = a^2, \quad (\sqrt{a})^5 = a^2\sqrt{a},$$
etc.

Les puissances de degrés pairs sont des quantités rationnelles, et les puissances de degrés impairs sont le radical lui-même multiplié par des quantités rationnelles.

155. On a par le n° **153**,

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}.$$

Donc, *Lorsqu'une quantité placée sous un radical du second degré contient des facteurs qui sont des carrés, on peut prendre les racines de ces facteurs et les écrire hors du signe radical, en conservant sous ce signe les autres facteurs.* C'est ce qu'on appelle *faire sortir des facteurs du radical.* Réciproquement, *Lorsqu'un radical est multiplié par un facteur rationnel, on peut supprimer ce facteur en multipliant la quantité qui est sous le radical par son carré.* C'est ce qu'on appelle *faire entre le facteur sous le radical.*

156. La simplification des quantités sous les radicaux peut rendre semblables des quantités qui paraissent dissemblables.

Ainsi, l'on trouve par ce moyen

$$2\sqrt{18}+3\sqrt{50}-7\sqrt{8}=6\sqrt{2}+15\sqrt{2}-14\sqrt{2}=7\sqrt{2}=\sqrt{98},$$

$$3a\sqrt{8b^3c^2}+\sqrt{2bd^2}=6abc\sqrt{2b}+d\sqrt{2b}=(6abc+d)\sqrt{2b}.$$

Dans le premier exemple, après les opérations qui ont donné $7\sqrt{2}$, on fait entrer le facteur 7 sous le radical, parce que, de cette manière, le calcul se réduit à l'extraction d'une racine carrée qu'on peut obtenir immédiatement avec telle approximation que l'on veut.

Pour simplifier autant qu'il est possible une quantité monôme sous un radical du second degré, on décompose le coefficient en facteurs premiers. Après la suppression de tous les facteurs numériques et littéraux dont la racine carrée peut être extraite, il reste seulement sous le radical les premières puissances des facteurs premiers et des lettres qui ont des exposants impairs.

157. Les fractions dont le dénominateur contient des radicaux peuvent être remplacées par d'autres équivalentes dont le dénominateur est rationnel.

Soit d'abord la fraction $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. On multiplie les deux termes par $\sqrt{5}$; on a ainsi $\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$. On peut faire entrer sous le radical le facteur 3 et le diviseur 10; par là l'expression proposée est réduite à $\sqrt{0,45}$.

Pour la fraction $\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$, on multiplie les deux termes par $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$; on trouve ainsi

$$\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{7}(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}=2\sqrt{35}+3\sqrt{14}.$$

On a pareillement

$$\frac{a}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\frac{a(\sqrt{p}-\sqrt{q})}{(\sqrt{p})^2-(\sqrt{q})^2}=\frac{a\sqrt{p}-a\sqrt{q}}{p-q},$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}=\frac{a(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{(\sqrt{p})^2-(\sqrt{q})^2}=\frac{a\sqrt{p}+a\sqrt{q}}{p-q}.$$

Soit encore la fraction

$$\frac{a}{\sqrt{n}+\sqrt{p}+\sqrt{q}}.$$

Si l'on multiplie d'abord les deux termes par $\sqrt{n}+\sqrt{p}-\sqrt{q}$, on obtiendra une fraction équivalente dont le dénominateur sera $(\sqrt{n}+\sqrt{p})^2-q$, ou $n+p-q+2\sqrt{np}$; et en multipliant les deux termes de cette fraction par $n+p-q-2\sqrt{np}$, on aura une expression dont le dénominateur sera entièrement délivré de radicaux.

On peut toujours parvenir, par des opérations semblables, à rendre le dénominateur rationnel, quel que soit le nombre de radicaux qu'il contienne; mais, comme il est rare qu'on ait à faire de pareilles transformations dans d'autres cas que ceux que nous avons considérés, nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de cette proposition.

Du carré et de la racine carrée d'un polynôme.

158. On a trouvé, en multipliant le binôme $a+b$ par lui-même (n° 33),

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Pour obtenir le carré du trinôme $a+b+c$, on peut considérer d'abord $a+b$ comme un seul terme; on trouve

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.\end{aligned}$$

On obtient pareillement, en considérant $a+b+c$ comme un seul terme,

$$\begin{gathered}(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2\\=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+d^2.\end{gathered}$$

Sans aller plus loin, on peut conclure, par analogie, que *Le carré d'un polynôme est formé du carré du premier terme, plus deux fois le produit du premier terme par le second, plus le carré du second, plus deux fois le produit de chacun*

des deux premiers termes par le troisième, plus le carré du troisième; ainsi de suite.

On peut dire aussi que le carré d'un polynôme se compose de la somme des carrés de tous les termes, et du double de la somme des produits deux à deux de ces termes.

159. Supposons maintenant que l'on ait à extraire la racine carrée d'un polynôme.

Le polynôme proposé étant le produit de deux facteurs égaux à la racine cherchée, si l'on ordonne ce polynôme, son premier terme sera le carré du premier terme de la racine ordonnée par rapport à la même lettre. Par conséquent, en extrayant la racine carrée du premier terme, on obtiendra le premier terme de la racine. Représentons ce terme par a, désignons par r l'ensemble des autres termes de la racine et par P le polynôme proposé; on aura

$$P = (a + r)^2 = a^2 + 2ar + r^2.$$

En retranchant du polynôme P le carré du terme a, et désignant le reste par R, il viendra

$$R = P - a^2 = r \times (2a + r).$$

Le reste R étant le produit des deux polynômes r et $2a + r$, et a étant le premier terme de la racine ordonnée, le 1^er terme de R est le produit de $2a$ par le 1^er terme de r, lequel est le 2^e terme de la racine. Donc, en divisant le 1^er terme de R par $2a$, on aura le 2^e terme de la racine. Représentons par b ce 2^e terme, et désignons par r' la somme de tous les autres termes de la racine; on aura

$$P = (a + b + r')^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ar' + 2br' + r'^2.$$

Si l'on retranche de P la quantité $a^2 + 2ab + b^2$, ce qui se réduit à retrancher de R la somme $2ab + b^2$, formée du double produit du 1^er terme de la racine par le 2^e et du carré du 2^e terme, on aura, en nommant R' le reste,

$$R' = P - (a^2 + 2ab + b^2) = R - (2ab + b^2) = r' \times (2a + 2b + r');$$

et en raisonnant comme précédemment, on verra que, pour

trouver le 3^e terme de la racine, il faudra diviser le 1^{er} terme du reste R′ par $2a$.

On trouve dans cette explication la règle suivante :

Pour extraire la racine carrée d'un polynôme P, *ordonnez-le par rapport aux puissances décroissantes ou croissantes d'une lettre; prenez la racine carrée du 1er terme, vous aurez le 1er terme de la racine. Retranchez le carré de ce terme du polynôme* P, *vous obtiendrez un reste* R. *Divisez le 1er terme de* R *par le double du 1er terme de la racine, vous aurez le 2e terme. Retranchez du reste* R *le double produit du 1er terme de la racine par le 2e et le carré du 2e, vous aurez un second reste* R′. *Divisez le 1er terme de ce second reste par le double du 1er terme de la racine, vous aurez le* 3e *terme. Retranchez de* R′ *le double de la somme des deux premiers termes multipliés par le* 3e *et le carré du* 3e *terme, vous aurez un troisième reste* R″. *Divisez le 1er terme de ce troisième reste par le double du 1er terme de la racine, vous aurez le 4e terme. Ainsi de suite.* (Il doit être entendu que les restes R, R′, R″, etc., sont ordonnés de la même manière que le polynôme P.)

Le 1er terme du premier reste R est toujours le 2e terme du polynôme P; de sorte que les deux premiers termes de ce polynôme font connaître immédiatement les deux premiers termes de la racine.

160. Lorsque le polynôme P est un carré, les opérations prescrites par la règle ci-dessus conduisent à un reste nul; car on obtient successivement tous les termes de la racine, et après la soustraction qu'on exécute quand on a obtenu le dernier terme, on a retranché du polynôme proposé toutes les parties qui le composent.

Réciproquement, lorsqu'on parvient à un reste nul, le polynôme proposé est un carré, et celui qu'on a obtenu en est la racine.

161. Les opérations étant les mêmes pour l'extraction de la racine carrée d'un polynôme que pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier, on dispose le calcul de la même

manière; c'est ce qu'on voit dans l'exemple ci-dessous :

$$
\begin{array}{ll|l}
\mathrm{P} = & x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6 & x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \\
& + 6ax^5 - 9a^2x^4 & \overline{2x^3 - 3ax^2} \\
\hline
\mathrm{R}' = & + 6a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6 & \overline{2x^3 - 6ax^2 + 3a^2x} \\
& - 6a^2x^4 + 18a^3x^3 - 9a^4x^2 & \\
\hline
\mathrm{R}'' = & - 2a^3x^3 + 6a^4x^2 - 6a^5x + a^6 & \overline{2x^3 - 6ax^2 + 6a^2x - a^3} \\
& + 2a^3x^3 - 6a^4x^2 + 6a^5x - a^6 & \\
\hline
\mathrm{R}''' = & 0 &
\end{array}
$$

Le polynôme proposé étant ordonné, on prend la racine carrée du 1er terme x^6; on a ainsi le 1er terme x^3 de la racine. On retranche du polynôme P le carré de x^3; le reste R est le polynôme P dans lequel on a effacé le terme x^6. On divise le 2e terme $-6ax^5$ de P, par le double du 1er terme de la racine, c'est-à-dire par $2x^3$: le quotient est $-3ax^2$. On écrit ce quotient à la racine et à côté de $2x^3$; on multiplie $2x^3 - 3ax^2$ par $-3ax^2$, et l'on retranche le produit du reste R, ce qui donne le reste R′. On divise le 1er terme $6a^2x^4$ de R′ par $2x^3$: le quotient est $+3a^2x$. On place ce quotient à la racine et à côté du double des deux premiers termes; on multiplie $2x^3 - 6ax^2 + 3a^2x$ par $+3a^2x$, et l'on retranche le produit du reste R′, ce qui donne le 3e reste R″. On divise le 1er terme $-2a^3x^3$ de R″ par $2x^3$: le quotient est $-a^3$. On écrit $-a^3$ à la racine et à côté du double des trois premiers termes; on multiplie $2x^3 - 6ax^2 + 6a^2x - a^3$ par $-a^3$, et l'on retranche le produit de R″, ce qui donne le 4e reste R‴, qui est zéro. Il suit de là que la racine du polynôme P est $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$.

162. Quand on a ordonné suivant des puissances décroissantes, on reconnaît que l'opération ne se terminera pas lorsqu'on est conduit à mettre à la racine un terme dans lequel l'exposant de la lettre d'ordre est moindre que la moitié de l'exposant qu'elle a dans le dernier terme du polynôme proposé; car, si l'opération se terminait, le dernier terme de ce polynôme serait le carré du dernier terme de la racine. Par conséquent, l'exposant de la lettre d'ordre dans le dernier terme du polynôme serait le double de l'exposant du dernier terme de la racine; ce qui est contre la supposition.

Par un raisonnement semblable, lorsqu'on a ordonné suivant des puissances croissantes, on reconnaît que l'opération ne se terminera pas quand on est conduit à mettre à la racine un terme dans lequel l'exposant de la lettre d'ordre surpasse la moitié de l'exposant qu'elle a dans le dernier terme du polynôme.

163. Lorsqu'un polynôme ne contient aucun dénominateur littéral ou numérique, on est certain que ce polynôme n'est pas un carré quand on obtient un reste dont le premier terme n'est pas divisible par le double du premier terme de la racine. On reconnaît aussi qu'un polynôme ordonné n'est pas un carré lorsque le premier terme et le dernier ne sont pas des carrés. Mais il y a sur ces cas d'impossibilité plusieurs observations à faire.

Examinons d'abord le cas où, en cherchant la racine d'un polynôme qui ne contient pas de dénominateurs et dont le premier terme est un carré, on parvient à un reste dont le premier terme n'est pas divisible par le double du premier terme de la racine. Il est clair que, si le polynôme avait une racine exacte, cette racine contiendrait des dénominateurs. Or on conçoit que le carré d'une quantité fractionnaire ne peut pas être une quantité entière; et l'on peut démontrer cette proposition de la même manière que pour les nombres, au moyen des principes sur les facteurs premiers des quantités algébriques, qui seront exposés dans la suite. L'opération est dont impossible.

Quand les dénominateurs qu'il faudrait mettre à la racine contiennent la lettre d'ordre, on est assuré que l'opération ne se terminera pas, parce que la racine renfermerait alors des termes dans lesquels les exposants de cette lettre seraient moindres que la moitié de son plus faible exposant dans le polynôme proposé.

164. Supposons maintenant que le premier terme du polynôme ne soit pas un carré. Il est clair que le polynôme n'est pas le carré d'une quantité rationnelle; mais, si l'on effectue l'opération, en exprimant la racine carrée du premier terme

avec le signe radical, il pourra arriver que l'on parvienne à un reste nul. Dans ce cas, on aura une racine exacte.

Représentons la racine du premier terme par $a\sqrt{m}$, a étant un facteur rationnel, et $\sqrt{m}$ un radical irréductible (n° 155); le second terme de la racine, qui s'obtient en divisant le second terme du polynôme par $2a\sqrt{m}$, sera de la forme $\frac{b}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{b\sqrt{m}}{m}$. La somme des deux premiers termes de la racine revenant à $\left(a+\frac{b}{m}\right)\sqrt{m}$, le carré de cette somme sera rationnel : par conséquent le reste qu'on obtiendra en soustrayant ce carré du polynôme, sera également rationnel; et en divisant le premier terme de ce reste par $2a\sqrt{m}$, on obtiendra pour le troisième terme de la racine une quantité de la forme $\frac{c}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{c}{m}\sqrt{m}$. On verrait de même que le quatrième terme de la racine sera d'une forme semblable; et ainsi de suite. Donc, quand on sera parvenu à un reste nul, on aura pour la racine une quantité de la forme $\left(a+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\text{etc.}\right)\sqrt{m}$; c'est-à-dire, le produit d'un polynôme rationnel par un facteur irrationnel provenant seulement de la racine carrée du premier terme du polynôme.

On peut trouver cette racine par des calculs plus simples; car, si l'on multiplie tout le polynôme proposé, dont le premier terme est a^2m, par m, on aura un produit dont le premier terme sera un carré; la racine de ce produit sera $am+b+c+$ etc., et en la divisant par $\sqrt{m}$ on obtiendra la racine cherchée.

Considérons, par exemple, le trinôme ax^2+bx+c. La racine carrée du premier terme est $x\sqrt{a}$. En divisant bx par $2x\sqrt{a}$, on obtient pour le second terme de la racine $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; et en retranchant de $bx+c$ le produit de $2x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ par $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, on a le reste $c-\frac{b^2}{4a}$. Le trinôme ax^2+bx+c n'est

donc pas un carré; mais si l'on attribuait aux coefficients a, b, c, des valeurs telles, qu'il en résultât $c - \frac{b^2}{4a} = 0$, ou $b^2 = 4ac$, ce trinôme aurait une racine rationnelle par rapport à x, qui serait $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Si l'on multiplie le trinôme proposé par a, le produit est $a^2x^2 + bax + ca$. En extrayant la racine carrée de cette quantité, on obtient le binôme $ax + \frac{b}{2}$, et l'on a un reste indépendant de x, qui est $ac - \frac{b^2}{4}$. Quand ce reste est nul, c'est-à-dire quand on a $b^2 = 4ac$, la racine est exacte, et en la divisant par $\sqrt{a}$, on trouve pour la racine de $ax^2 + bx + c$ la même valeur que précédemment.

CHAPITRE CINQUIÈME.

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

Résolution des équations du second degré à une inconnue.

165. Une équation du second degré à une inconnue, après les réductions, ne doit contenir que le carré et la première puissance de l'inconnue avec des quantités connues; en conséquence, elle est de cette forme

$$(1) \qquad ax^2 + bx = c,$$

a, b, c, étant des quantités connues positives ou négatives.

166. La première puissance de l'inconnue peut manquer on a alors $b = 0$, et l'équation est

$$(2) \qquad ax^2 = c.$$

En divisant les deux membres par a, on conclut

$$(3) \qquad x^2 = \frac{c}{a}.$$

Le carré de l'inconnue x devant être égal à $\frac{c}{a}$, les valeurs d sont les racines carrées de $\frac{c}{a}$, ou

$$(4) \qquad x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Lorsque $\frac{c}{a}$ est une quantité positive, la formule (4) donn deux valeurs réelles de x. Quand cette quantité est négativ les valeurs de x sont imaginaires (n° 148); l'équation est impossible.

167. On pourrait croire que, pour passer de l'équation à la formule (4), on extrait la racine carrée de chaque m

bre; et que, puisque la racine carrée de x^2 est $-x$ aussi bien que $+x$, on doit écrire, en désignant, pour abréger, le second membre de l'équation par b, $\pm x = \pm\sqrt{b}$. Mais l'inconnue ayant été représentée simplement par la lettre x sans aucun signe ou avec le signe $+$, c'est la valeur de x que l'on doit chercher, et non pas celle de $-x$. D'ailleurs, en combinant de toutes les manières les signes des deux membres dans l'équation $\pm x = \pm\sqrt{b}$, on trouve $+x = +\sqrt{b}$, $+x = -\sqrt{b}$, $-x = +\sqrt{b}$, $-x = -\sqrt{b}$; or les deux dernières équations se déduisent des deux premières, en changeant les signes des deux membres : l'équation $\pm x = \pm\sqrt{b}$ n'exprime donc rien de plus que $x = \pm\sqrt{b}$.

168. Lorsque la quantité connue c est nulle, l'équation (1) devient

$$ax^2 + bx = 0, \quad \text{ou} \quad x(ax + b) = 0.$$

Cette équation est satisfaite par $x = 0$; et on la vérifie aussi en posant $ax + b = 0$, d'où $x = -\frac{b}{a}$.

169. Considérons à présent l'équation complète

$$ax^2 + bx = c.$$

En divisant les deux membres par le coefficient de x^2, et posant, pour abréger, $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, on obtient l'équation plus simple

$$(5) \qquad x^2 + px = q.$$

Les deux termes x^2 et px peuvent être considérés comme les deux premiers termes d'un carré. Le premier terme de la racine sera x, et le second terme sera le quotient de px par $2x$ ou $\frac{1}{2}p$. Pour compléter le carré, il faut ajouter à $x^2 + px$ la carré de $\frac{1}{2}p$, ou $\frac{1}{4}p^2$; et en ajoutant aussi cette quantité au second membre, afin que l'équation ne soit pas altérée, on obtient

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2, \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = q + \frac{1}{4}p^2,$$

avec le signe radical, il pourra arriver que l'on parvienne à un reste nul. Dans ce cas, on aura une racine exacte.

Représentons la racine du premier terme par $a\sqrt{m}$, a étant un facteur rationnel, et $\sqrt{m}$ un radical irréductible (nº 155); le second terme de la racine, qui s'obtient en divisant le second terme du polynôme par $2a\sqrt{m}$, sera de la forme $\frac{b}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{b\sqrt{m}}{m}$. La somme des deux premiers termes de la racine revenant à $\left(a+\frac{b}{m}\right)\sqrt{m}$, le carré de cette somme sera rationnel : par conséquent le reste qu'on obtiendra en soustrayant ce carré du polynôme, sera également rationnel; et en divisant le premier terme de ce reste par $2a\sqrt{m}$, on obtiendra pour le troisième terme de la racine une quantité de la forme $\frac{c}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{c}{m}\sqrt{m}$. On verrait de même que le quatrième terme de la racine sera d'une forme semblable; et ainsi de suite. Donc, quand on sera parvenu à un reste nul, on aura pour la racine une quantité de la forme $\left(a+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\text{etc.}\right)\sqrt{m}$; c'est-à-dire, le produit d'un polynôme rationnel par un facteur irrationnel provenant seulement de la racine carrée du premier terme du polynôme.

On peut trouver cette racine par des calculs plus simples; car, si l'on multiplie tout le polynôme proposé, dont le premier terme est a^2m, par m, on aura un produit dont le premier terme sera un carré; la racine de ce produit sera $am+b+c+$ etc., et en la divisant par $\sqrt{m}$ on obtiendra la racine cherchée.

Considérons, par exemple, le trinôme ax^2+bx+c. La racine carrée du premier terme est $x\sqrt{a}$. En divisant bx par $2x\sqrt{a}$, on obtient pour le second terme de la racine $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; et en retranchant de $bx+c$ le produit de $2x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ par $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, on a le reste $c-\frac{b^2}{4a}$. Le trinôme ax^2+bx+c n'est

donc pas un carré; mais si l'on attribuait aux coefficients a, b, c, des valeurs telles, qu'il en résultât $c - \frac{b^2}{4a} = 0$, ou $b^2 = 4ac$, ce trinôme aurait une racine rationnelle par rapport à x, qui serait $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Si l'on multiplie le trinôme proposé par a, le produit est $a^2x^2 + bax + ca$. En extrayant la racine carrée de cette quantité, on obtient le binôme $ax + \frac{b}{2}$, et l'on a un reste indépendant de x, qui est $ac - \frac{b^2}{4}$. Quand ce reste est nul, c'est-à-dire quand on a $b^2 = 4ac$, la racine est exacte, et en la divisant par $\sqrt{a}$, on trouve pour la racine de $ax^2 + bx + c$ la même valeur que précédemment.

avec le signe radical, il pourra arriver que l'on parvienne à un reste nul. Dans ce cas, on aura une racine exacte.

Représentons la racine du premier terme par $a\sqrt{m}$, a étant un facteur rationnel, et $\sqrt{m}$ un radical irréductible (n° 155); le second terme de la racine, qui s'obtient en divisant le second terme du polynôme par $2a\sqrt{m}$, sera de la forme $\frac{b}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{b\sqrt{m}}{m}$. La somme des deux premiers termes de la racine revenant à $\left(a+\frac{b}{m}\right)\sqrt{m}$, le carré de cette somme sera rationnel : par conséquent le reste qu'on obtiendra en soustrayant ce carré du polynôme, sera également rationnel; et en divisant le premier terme de ce reste par $2a\sqrt{m}$, on obtiendra pour le troisième terme de la racine une quantité de la forme $\frac{c}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{c}{m}\sqrt{m}$. On verrait de même que le quatrième terme de la racine sera d'une forme semblable; et ainsi de suite. Donc, quand on sera parvenu à un reste nul, on aura pour la racine une quantité de la forme $\left(a+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\text{etc.}\right)\sqrt{m}$; c'est-à-dire, le produit d'un polynôme rationnel par un facteur irrationnel provenant seulement de la racine carrée du premier terme du polynôme.

On peut trouver cette racine par des calculs plus simples; car, si l'on multiplie tout le polynôme proposé, dont le premier terme est a^2m, par m, on aura un produit dont le premier terme sera un carré; la racine de ce produit sera $am+b+c+$ etc., et en la divisant par $\sqrt{m}$ on obtiendra la racine cherchée.

Considérons, par exemple, le trinôme ax^2+bx+c. La racine carrée du premier terme est $x\sqrt{a}$. En divisant bx par $2x\sqrt{a}$, on obtient pour le second terme de la racine $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; et en retranchant de $bx+c$ le produit de $2x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ par $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, on a le reste $c-\frac{b^2}{4a}$. Le trinôme ax^2+bx+c n'est

donc pas un carré; mais si l'on attribuait aux coefficients a, b, c, des valeurs telles, qu'il en résultât $c - \frac{b^2}{4a} = 0$, ou $b^2 = 4ac$, ce trinôme aurait une racine rationnelle par rapport à x, qui serait $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Si l'on multiplie le trinôme proposé par a, le produit est $a^2x^2 + bax + ca$. En extrayant la racine carrée de cette quantité, on obtient le binôme $ax + \frac{b}{2}$, et l'on a un reste indépendant de x, qui est $ac - \frac{b^2}{4}$. Quand ce reste est nul, c'est-à-dire quand on a $b^2 = 4ac$, la racine est exacte, et en la divisant par $\sqrt{a}$, on trouve pour la racine de $ax^2 + bx + c$ la même valeur que précédemment.

avec le signe radical, il pourra arriver que l'on parvienne à un reste nul. Dans ce cas, on aura une racine exacte.

Représentons la racine du premier terme par $a\sqrt{m}$, a étant un facteur rationnel, et $\sqrt{m}$ un radical irréductible (n° 155); le second terme de la racine, qui s'obtient en divisant le second terme du polynôme par $2a\sqrt{m}$, sera de la forme $\frac{b}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{b\sqrt{m}}{m}$. La somme des deux premiers termes de la racine revenant à $\left(a+\frac{b}{m}\right)\sqrt{m}$, le carré de cette somme sera rationnel : par conséquent le reste qu'on obtiendra en soustrayant ce carré du polynôme, sera également rationnel; et en divisant le premier terme de ce reste par $2a\sqrt{m}$, on obtiendra pour le troisième terme de la racine une quantité de la forme $\frac{c}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{c}{m}\sqrt{m}$. On verrait de même que le quatrième terme de la racine sera d'une forme semblable; et ainsi de suite. Donc, quand on sera parvenu à un reste nul, on aura pour la racine une quantité de la forme $\left(a+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\text{etc.}\right)\sqrt{m}$; c'est-à-dire, le produit d'un polynôme rationnel par un facteur irrationnel provenant seulement de la racine carrée du premier terme du polynôme.

On peut trouver cette racine par des calculs plus simples; car, si l'on multiplie tout le polynôme proposé, dont le premier terme est a^2m, par m, on aura un produit dont le premier terme sera un carré; la racine de ce produit sera $am+b+c+$ etc., et en la divisant par $\sqrt{m}$ on obtiendra la racine cherchée.

Considérons, par exemple, le trinôme ax^2+bx+c. La racine carrée du premier terme est $x\sqrt{a}$. En divisant bx par $2x\sqrt{a}$, on obtient pour le second terme de la racine $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; et en retranchant de $bx+c$ le produit de $2x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ par $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, on a le reste $c-\frac{b^2}{4a}$. Le trinôme ax^2+bx+c n'est

donc pas un carré; mais si l'on attribuait aux coefficients a, b, c, des valeurs telles, qu'il en résultât $c - \frac{b^2}{4a} = 0$, ou $b^2 = 4ac$, ce trinôme aurait une racine rationnelle par rapport à x, qui serait $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Si l'on multiplie le trinôme proposé par a, le produit est $a^2x^2 + bax + ca$. En extrayant la racine carrée de cette quantité, on obtient le binôme $ax + \frac{b}{2}$, et l'on a un reste indépendant de x, qui est $ac - \frac{b^2}{4}$. Quand ce reste est nul, c'est-à-dire quand on a $b^2 = 4ac$, la racine est exacte, et en la divisant par $\sqrt{a}$, on trouve pour la racine de $ax^2 + bx + c$ la même valeur que précédemment.

avec le signe radical, il pourra arriver que l'on parvienne à un reste nul. Dans ce cas, on aura une racine exacte.

Représentons la racine du premier terme par $a\sqrt{m}$, a étant un facteur rationnel, et $\sqrt{m}$ un radical irréductible (nº 155); le second terme de la racine, qui s'obtient en divisant le second terme du polynôme par $2a\sqrt{m}$, sera de la forme $\frac{b}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{b\sqrt{m}}{m}$. La somme des deux premiers termes de la racine revenant à $\left(a+\frac{b}{m}\right)\sqrt{m}$, le carré de cette somme sera rationnel : par conséquent le reste qu'on obtiendra en soustrayant ce carré du polynôme, sera également rationnel; et en divisant le premier terme de ce reste par $2a\sqrt{m}$, on obtiendra pour le troisième terme de la racine une quantité de la forme $\frac{c}{\sqrt{m}}$ ou $\frac{c}{m}\sqrt{m}$. On verrait de même que le quatrième terme de la racine sera d'une forme semblable; et ainsi de suite. Donc, quand on sera parvenu à un reste nul, on aura pour la racine une quantité de la forme $\left(a+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\text{etc.}\right)\sqrt{m}$; c'est-à-dire, le produit d'un polynôme rationnel par un facteur irrationnel provenant seulement de la racine carrée du premier terme du polynôme.

On peut trouver cette racine par des calculs plus simples; car, si l'on multiplie tout le polynôme proposé, dont le premier terme est a^2m, par m, on aura un produit dont le premier terme sera un carré; la racine de ce produit sera $am+b+c+$ etc., et en la divisant par $\sqrt{m}$ on obtiendra la racine cherchée.

Considérons, par exemple, le trinôme ax^2+bx+c. La racine carrée du premier terme est $x\sqrt{a}$. En divisant bx par $2x\sqrt{a}$, on obtient pour le second terme de la racine $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; et en retranchant de $bx+c$ le produit de $2x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ par $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, on a le reste $c-\frac{b^2}{4a}$. Le trinôme ax^2+bx+c n'est

donc pas un carré; mais si l'on attribuait aux coefficients a, b, c, des valeurs telles, qu'il en résultât $c - \frac{b^2}{4a} = 0$, ou $b^2 = 4ac$, ce trinôme aurait une racine rationnelle par rapport à x, qui serait $x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Si l'on multiplie le trinôme proposé par a, le produit est $a^2x^2 + bax + ca$. En extrayant la racine carrée de cette quantité, on obtient le binôme $ax + \frac{b}{2}$, et l'on a un reste indépendant de x, qui est $ac - \frac{b^2}{4}$. Quand ce reste est nul, c'est-à-dire quand on a $b^2 = 4ac$, la racine est exacte, et en la divisant par $\sqrt{a}$, on trouve pour la racine de $ax^2 + bx + c$ la même valeur que précédemment.

Quant à la valeur infinie de x, elle fait connaître que, si la quantité a s'approchait de plus en plus de zéro, de manière à pouvoir devenir aussi voisine que l'on voudrait de cette limite, la valeur de x exprimée par $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ augmenterait de plus en plus, et pourrait s'élever au-dessus de toute grandeur assignable.

Cette conclusion peut être établie directement d'après l'équation. A cet effet, divisons les deux membres par x^2, il viendra

$$a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0,$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$(11) \qquad \frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a.$$

Il est clair que toute valeur de x, différente de zéro et de l'infini, qui vérifie l'équation (11), vérifie aussi l'équation $ax^2+bx+c=0$, et la réciproque est également vraie.

Cela posé, concevons que l'on fasse croître x positivement ou négativement, de manière que le signe de $b\times\frac{1}{x}$ soit contraire à celui de a. A mesure que x augmentera, $\frac{c}{x}$ diminuera, et quand la valeur de x sera très-grande, le facteur $b+\frac{c}{x}$ aura une valeur très-peu différente de b; en même temps, le facteur $\frac{1}{x}$ aura une très-petite valeur. Donc le premier membre de l'équation (11) aura lui-même une valeur très-petite. Nommons α la valeur qu'il prend lorsqu'on fait $x=6$; la valeur numérique de 6 pouvant être supposée aussi grande qu'on le voudra. Si l'on conçoit que x, sans changer de signe, passe par tous les états de grandeur entre 6 et l'infini, le premier membre de l'équation (11) passera par tous les états de grandeur entre α et zéro; de sorte que, si la quantité $-a$ est comprise entre α et zéro, l'équation sera vérifiée par une valeur

de x comprise entre 6 et l'infini. Donc, pour les valeurs de a qui tendent indéfiniment vers la limite zéro, l'équation admet une racine dont la valeur numérique converge vers l'infini.

On déduit également de l'équation (11) la racine $-\frac{c}{b}$; car lorsqu'on fait dans cette équation $a = 0$, elle est vérifiée en posant $b + \frac{c}{x} = 0$, d'où $x = -\frac{c}{b}$.

174. Lorsque l'on suppose à la fois $a = 0$ et $b = 0$, les deux valeurs de x données par la formule (10) se réduisent l'une et l'autre au symbole $\frac{0}{0}$. D'un autre côté, si l'on introduit dans l'équation les suppositions $a = 0$, $b = 0$, elle devient $c = 0$; par conséquent, elle ne peut être vérifiée par aucune valeur finie de x. On est conduit à la même conclusion en appliquant à chacune des deux valeurs comprises dans la formule (10) la transformation dont nous avons fait usage dans le numéro précédent. Lorsqu'on fait $a = 0$, $b = 0$, dans l'expression $\frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, qu'on a trouvée pour la première valeur de x, on obtient $-\frac{2c}{0}$. Les deux valeurs de x ne différant, dans la formule (10), que par le signe du radical, la seconde valeur est équivalente à $\frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$; et en faisant dans cette expression $a = 0$, $b = 0$, on obtient aussi $-\frac{2c}{0}$.

175. Lorsque l'on a en même temps $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, l'équation (9) devient une identité; ainsi les valeurs de l'inconnue sont indéterminées. Si l'on introduit ces suppositions dans les expressions générales des valeurs de x transformées comme ci-dessus, elles donnent l'une et l'autre $x = \frac{0}{0}$.

Calcul numérique des deux racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, *quand* a *est très-petit.*

176. Lorsque le produit ac est un nombre très-petit, le radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ diffère très-peu de b, et, pour obtenir la différence $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ avec un nombre suffisant de chiffres, il faudrait calculer un grand nombre de chiffres de la valeur du radical. Cet inconvénient n'existe pas pour la racine dont l'expression est $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. La valeur de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ s'ajoutant à celle de b, le nombre des chiffres exacts de la somme est égal à celui des chiffres de la valeur du radical; et l'erreur relative dans l'évaluation de la racine $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ est du même ordre que celle qui a été commise sur $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

En nommant cette racine x'' et l'autre x', on a $x''x' = \frac{c}{a}$; on conclura de là la racine x', au degré d'approximation relative de la racine x''. On a aussi, suivant cette relation, et par ce qu'on a vu dans le n° 173,

$$x' = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

On peut calculer x' par cette formule, en employant la même valeur de $\sqrt{b^2 - ac}$ que pour la racine x''.

177. Prenons pour exemple l'équation

$$0,006x^2 + 13x - 1 = 0,$$

on a

$$x' = \frac{-13 + \sqrt{169,024}}{0,012}, \quad x'' = \frac{-13 - \sqrt{169,024}}{0,012}.$$

La racine carrée de 169,024 diffère de 13 de moins de $\frac{0,024}{26}$, et par conséquent de moins de 0,001; il en résulte que, si l'on voulait avoir, d'après la formule ci-dessus, la racine x', avec cinq chiffres exacts, il faudrait pousser l'extraction de la ra-

cine carrée jusqu'au huitième chiffre décimal. Mais en calculant d'abord la racine x'', on peut prendre 13 pour la valeur du radical; il est ainsi évalué à moins de 0,001, et l'on en conclut $x'' = 2166,7$, à moins de 0,1. On a $x' = \frac{2}{13 + \sqrt{169,024}}$, et en prenant encore 13 pour la valeur du radical, on obtient $x' = 0,07692$ à moins de 0,00001. On trouverait la même valeur approchée en calculant le quotient $\frac{1}{2166,7 \times 0,006}$ (*).

Pour obtenir une approximation plus grande par les mêmes moyens, il faudrait calculer une valeur plus approchée de la racine carrée de 169,024. Mais il est préférable de recourir à une autre méthode.

178. Si l'on applique au binôme $1 + u$ la règle du n° 159, pour l'extraction de la racine carrée des polynômes, on obtient les termes qui suivent :

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \frac{7}{256}u^5 \ldots$$

(*) Quand on emploie les logarithmes pour abréger les calculs, en se servant des Tables ordinaires, on n'obtient la valeur de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ qu'avec six chiffres seulement, ou sept au plus. Il peut arriver, si le produit ac est très-petit, qu'on ne connaisse ainsi aucun chiffre de la différence $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$.

L'incertitude est la même par l'emploi des logarithmes pour la valeur de $b^2 - 4ac$, quand cette différence est très-petite. On a un exemple de ce cas dans l'équation suivante :

$$5,05277x^2 - 357,829x + 6335,21 = 0.$$

Le logarithme de b^2 ne surpasse celui de $4ac$ que de 7 unités du dernier ordre, et l'on voit par les Tables que cette différence des logarithmes correspond à une différence des nombres égale environ à $\frac{70}{339}$, ou à 0,20. Si l'on admet qu'en raison de l'inexactitude des logarithmes, la différence de ceux des nombres b^2 et $4ac$ puisse être fautive de 2, suivant que l'erreur sera par défaut ou par excès, le nombre $b^2 - 4ac$ sera plus grand que 0,26, ou il sera plus petit que 0,15; la racine carrée de ce nombre pourra donc être plus grande que 0,5, ou plus petite que 0,4. Cette incertitude en produira une de 0,01 sur la valeur de la racine cherchée; et comme cette racine est moindre que 36, on ne connaîtra pas plus de quatre chiffres.

Si l'on augmente le dernier terme de l'équation de 0,007, le logarithme de $4ac$ augmentera de 5 unités du dernier ordre; et, à cause de l'inexactitude des logarithmes, on ne saura pas d'une manière certaine si les racines sont réelles ou si elles sont imaginaires. Pour ne conserver aucun doute, il faudra faire les opérations directement.

En outre, les restes, à partir de celui que l'on trouve après avoir obtenu le terme $\frac{1}{2}u$, sont

$$-\frac{1}{4}u^2,$$

$$+\frac{1}{8}u^3-\frac{1}{64}u^4,$$

$$-\frac{5}{64}u^4+\frac{1}{64}u^5-\frac{1}{256}u^6,$$

$$\frac{7}{128}u^5-\frac{7}{512}u^6+\frac{5}{1024}u^7-\frac{25}{16384}u^8,$$

$$-\frac{21}{512}u^6+\frac{12}{1024}u^7-\frac{81}{16384}u^8+\frac{35}{16384}u^9-\frac{49}{65536}u^{10}.$$

etc.

Les coefficients des termes du polynôme (1) vont en décroissant; par conséquent, lorsque $u<1$, les termes eux-mêmes sont de plus en plus petits, et lorsque le nombre u est sensiblement inférieur à l'unité, les termes décroissent très-rapidement. Dans chacun des restes successifs, les coefficients des termes vont aussi en décroissant, et ces termes ont alternativement le signe + et le signe —; il résulte de là qu'en supposant toujours $u<1$, les restes sont alternativement positifs et négatifs. Par conséquent, lorsqu'on s'arrête, dans le polynôme (1), à un terme négatif, on a une quantité plus petite que la racine carrée de $1+u$; et lorsqu'on s'arrête à un terme positif, on a, au contraire, une quantité plus grande que cette racine carrée.

179. Les coefficients des termes du polynôme (1) peuvent se former d'une manière très-simple. Si l'on considère, par exemple, le terme $\frac{1}{16}u^3$, il est la moitié du premier terme du reste $\frac{1}{8}u^3-\frac{1}{64}u^4$ ou $1+u-\left(1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2\right)^2$.

Il suffit donc de former le terme en u^3 dans ce reste ou dans $\left(1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2\right)^2$: or ce terme (abstraction faite du signe qui doit être changé pour la soustraction) est $2\times\frac{1}{2}u\times\frac{1}{8}u^2$.

On reconnaît de même que le cinquième terme du poly-

nôme (1) est la moitié du terme en u^4 dans le carré de la somme de tous ceux qui précèdent; de sorte que son coefficient est

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{64}.$$

Le coefficient du sixième terme est semblablement

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{128}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{16}\ (*).$$

180. On trouve un développement semblable au polynôme (1) pour la racine carrée de $1-u$, et les coefficients sont les mêmes; mais les termes, à partir du second, ont tous le signe $-$; et ce développement ne fournit plus des valeurs approchées alternativement par excès et par défaut. C'est pourquoi il convient mieux d'en employer un autre. On a

$$\sqrt{1-u}=(1-u)\sqrt{\frac{1}{1-u}}=(1-u)\sqrt{1+\frac{u}{1-u}}.$$

Quand le nombre u est plus petit que $\frac{1}{2}$, $\frac{1-u}{u}$ est moindre que 1. On peut donc calculer $\sqrt{1+\frac{u}{1-u}}$ au moyen de la formule (1), en mettant au lieu de u la valeur de la fraction $\frac{u}{1-u}$.

181. Revenons maintenant à la formule des racines de l'équation du second degré. Lorsque l'équation est $ax^2+bx-c=0$, on a

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$$

(*) Il est manifeste que, quelque loin que l'on prolonge l'extraction de la racine carrée de $1+u$, les termes du polynôme que l'on obtiendra se formeront toujours suivant la même loi. Mais d'autres explications seraient nécessaires pour établir que les coefficients iront continuellement en décroissant, et que les restes représenteront des quantités alternativement positives et négatives. Il ne serait pas possible de donner ici ces explications; mais l'emploi du polynôme (1) n'est avantageux que lorsqu'on peut se borner à un petit nombre des premiers termes, et sans aller au delà de ceux qui sont indiqués dans le texte. Il suffit donc de constater comme un simple fait la légitimité de l'emploi de ces termes.

Le radical $\sqrt{b^2+4ac}$ peut être écrit sous cette forme $b\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2}}$; et en faisant dans le polynôme (1) $u=\frac{4ac}{b^2}$, on obtient

$$(2)\qquad 1+\frac{2ac}{b^2}-\frac{2a^2c^2}{b^4}+\frac{4a^3c^3}{b^6}-\frac{10a^4c^4}{b^8}\text{ etc.}$$

En remplaçant le radical par ce polynôme, on a les expressions suivantes des deux racines :

$$(3)\qquad x'=\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\frac{2a^2c^3}{b^5}-\frac{5a^3c^4}{b^7}\text{ etc.}$$

$$(4)\qquad x''=-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}+\frac{5a^3c^4}{b^7}\text{ etc.}$$

Pour l'équation numérique du n° 177, en se bornant aux termes qui contiennent la première puissance de a, l'erreur sur chaque racine sera moindre que le terme $\frac{2a^2c^3}{b^5}$, et elle n'influera pas sur les neuf premières décimales.

182. Dans le cas de l'équation $ax^2-bx+c=0$, pour laquelle les racines sont $\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, on doit faire usage de ce qui a été dit dans le n° 180. On a

$$(5)\quad \sqrt{b^2-4ac}=b\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}=b\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2-4ac}}.$$

Soit

$$\frac{a}{b^2-4ac}=\frac{\alpha}{b^2},\quad \text{d'où}\quad \frac{a}{\alpha}=1-\frac{4ac}{b^2}.$$

Le développement du radical $\sqrt{1+\frac{4ac}{b^2-4ac}}$ sera le polynôme (2), en y écrivant α au lieu de a. On en conclura, d'après (5),

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b}{2\alpha}+\frac{c}{b}-\frac{\alpha c^2}{b^3}+\frac{2\alpha^2c^3}{b^5}-\frac{5\alpha^3c^4}{b^7}\text{ etc.}$$

On aura en outre

$$\frac{b}{2a}-\frac{b}{2\alpha}=\frac{b(\alpha-a)}{2a\alpha}=\frac{4ac}{2ab}=\frac{2c}{b},$$

$$\frac{b}{2a}+\frac{b}{2\alpha}=\frac{b(a+\alpha)}{2a\alpha}=\frac{2b^2-4ac}{2ab}=\frac{b}{a}-\frac{2c}{b};$$

par suite, pour les deux racines de l'équation,

$$(6)\qquad x'=\frac{c}{b}+\frac{\alpha c^2}{b^3}-\frac{2\alpha^2c^3}{b^5}+\frac{5\alpha^3c^4}{b^7}\ \text{etc.}$$

$$(7)\qquad x''=\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{\alpha c^2}{b^3}+\frac{2\alpha^2c^3}{b^5}-\frac{5\alpha^3c^4}{b^7}\ \text{etc.}$$

Soit l'équation

$$0{,}006x^2-13x+1=0;$$

on a

$$\alpha=\frac{0{,}006\times 169}{168{,}976},$$

et, en se bornant à la première puissance de α, on trouvera les valeurs des racines avec neuf chiffres décimaux exacts.

183. Il est à remarquer que les coefficients numériques des termes du polynôme (2), plus simples que ceux du polynôme (1), se forment suivant la même loi, c'est-à-dire que le coefficient de chaque puissance de a est la moitié de celui de la même puissance dans le carré de la somme de tous les termes précédents. Dans les formules (3) et (6) les termes sont ceux du polynôme (2), à l'exception du terme 1, divisés par $2a$ et multipliés par b; il résulte de là que le coefficient numérique de chaque puissance de a ou de α est égal à celui de la puissance immédiatement inférieure dans le carré de la somme de tous les termes précédents.

Décomposition du trinôme x^2+px+q *en facteurs du premier degré. — Propositions sur les racines de l'équation* $x^2+px+q=0$.

184. Reprenons l'équation

$$(1)\qquad x^2+px+q=0.$$

Ajoutons au premier membre $\frac{1}{4}p^2$, pour compléter le carré dont les deux premiers termes sont x^2+px, et retranchons en même temps cette quantité; nous n'aurons pas changé l'équation, et le premier membre sera

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{4}p^2+q,$$

ou

$$(2)\qquad \left(x+\frac{1}{2}p\right)^2-\left(\frac{1}{4}p^2-q\right).$$

Au lieu de $\frac{1}{4}p^2-q$, on peut écrire $\left(\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)^2$; on a alors la différence de deux carrés qui est égale au produit de la somme des deux racines par leur différence, c'est-à-dire

$$(3)\quad \left(x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)\left(x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right).$$

Pour qu'un produit devienne nul, il suffit et il faut qu'un des facteurs soit égal à zéro. On vérifiera donc l'équation (1) en vérifiant l'une de celles-ci :

$$x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0,\quad x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0;$$

on retrouve ainsi les racines qu'on a obtenues précédemment

$$x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},\quad x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

La formule (3) démontre de plus la proposition suivante :

Le trinôme x^2+px+q *est le produit de deux facteurs du premier degré par rapport à* x, $x-x'$ *et* $x-x''$, x' *et* x'' *étant les racines de l'équation* $x^2+px+q=0$.

185. Pour que le trinôme x^2+px+q puisse être considéré comme la différence de deux carrés, il faut que la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$ soit positive. Lorsque cette quantité est nulle, on a $q=\frac{1}{4}p^2$; le trinôme est $x^2+px+\frac{1}{4}p^2$, ou $\left(x+\frac{1}{2}p\right)$;

la proposition ci-dessus est encore vérifiée, puisque les deux racines de l'équation $x^2+px+q=0$ sont égales l'une et l'autre à $-\frac{1}{2}p$ (nº 171). Lorsque la quantité $\frac{1}{4}p^2-q$ est négative, le trinôme x^2+px+q peut être mis sous la forme $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+r$, r étant une quantité positive égale à $q-\frac{1}{4}p^2$; si l'on voulait décomposer le trinôme en facteurs, comme on le voit dans l'expression (3), on n'obtiendrait que des facteurs imaginaires.

186. Voici des exemples des diverses transformations des trinômes du second degré.

1er Exemple. $x^2-7x+10$.

En posant l'équation $x^2-7x+10=0$, on trouve les racines $x=5$ et $x=2$. On en conclut l'égalité

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5).$$

2e Exemple. $3x^2-5x-2$.

En égalant ce trinôme à zéro, après l'avoir divisé par 3, on obtient l'équation $x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0$; les racines sont $x=2$ et $x=-\frac{1}{3}$, et l'on en conclut

$$3x^2-5x-2=3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(x-2)(3x+1).$$

3e Exemple. x^2+5x+3.

En opérant comme dans le premier exemple, on trouve

$$x^2+5x+3=\left(x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\right).$$

4e Exemple. $4x^2-4x+1$.

Les racines de l'équation $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ sont toutes deux

égales à $\frac{1}{2}$, et l'on en conclut

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (2x - 1)^2.$$

5ᵉ Exemple. $\quad x^2 - 5x + 7.$

Les racines de l'équation $x^2 - 5x + 7 = 0$ sont

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}.$$

On a

$$x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

On peut aisément vérifier à posteriori les égalités que nous avons obtenues dans ces exemples. On parviendrait aussi, directement, à ces égalités, par des opérations semblables à celles qui ont été exécutées dans le nº 184.

187. Les transformations dont nous venons de nous occuper sont principalement utiles pour reconnaître les signes des valeurs que prend un trinôme du second degré en x, quand on donne différentes valeurs à x. Soit, par exemple, le trinôme $x^2 - 7x + 10$. Il est égal au produit $(x - 2)(x - 5)$. Or ce produit est positif quand les deux facteurs ont le même signe, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs de x plus grandes que 5, ou plus petites que 2. Il est, au contraire, négatif, pour les valeurs de x comprises entre 2 et 5; puisque les deux facteurs ont des signes différents. Lorsque le trinôme proposé est un carré, il est positif pour toutes les valeurs positives et négatives de x, et il peut passer par tous les états de grandeur entre zéro et l'infini. Lorsque le trinôme peut être mis sous la forme $\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 + r$, la quantité r étant positive, ce trinôme est encore positif pour toutes les valeurs positives et négatives de x, et il peut passer par tous les états de grandeur compris entre r et l'infini; mais il ne peut prendre aucune valeur plus petite que r.

188. En effectuant la multiplication de $x - x'$ par $x - x''$,

on a, par la proposition du n° 184,

$$x^2 + px + q = x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Comme cette dernière égalité a lieu quelle que soit la valeur de x, il s'ensuit que l'on doit avoir

$$x' + x'' = -p, \quad x'x'' = q.$$

Donc, *Dans une équation du second degré, ramenée à la forme* $x^2 + px + q = 0$, *la somme des deux racines est égale au coefficient de la première puissance de* x *pris en signe contraire, et le produit des racines est égal au terme indépendant de* x.

On est conduit aux mêmes conclusions en faisant la somme et le produit des expressions des deux racines.

Au moyen de ces propositions, on reconnaît, à l'inspection d'une équation du second degré, quels sont les signes des racines. Si le terme indépendant de l'inconnue, qui est le produit des racines, est négatif, les racines ont des signes contraires; et puisque leur somme est égale au coefficient de la première puissance de x pris en signe contraire, le signe de ce coefficient est celui de la racine qui a la plus petite valeur numérique. Quand le terme indépendant de l'inconnue est positif, si les racines sont réelles, elles ont le même signe; elles sont positives si le coefficient de la première puissance de x est négatif; négatives si ce coefficient est positif. Ces conclusions sont celles que l'on a obtenues dans le n° 171.

189. Proposons-nous maintenant cette question : *Trouver deux nombres dont la somme soit égale à un nombre donné* p, *et dont le produit soit égal à un autre nombre donné* q.

D'après les propositions qui viennent d'être établies, les nombres demandés sont les deux racines de l'équation $x^2 - px + q = 0$.

L'énoncé de la question conduit directement à cette équation; car si l'on représente l'un des deux nombres par x, l'autre sera $p - x$, et l'on devra avoir

$$x(p - x) = q, \quad \text{d'où} \quad x^2 - px + q = 0.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q};$$

par suite,

$$p - x = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

On voit que les deux valeurs de x donnent les deux nombres demandés. On pouvait d'ailleurs prévoir qu'il en serait ainsi, puisque x ne désigne pas l'un de ces nombres plutôt que l'autre.

Pour que la question soit possible, il est nécessaire que l'on ait $q < \frac{1}{4}p^2$ ou $q = \frac{1}{4}p^2$. Si $q > \frac{1}{4}p^2$, les valeurs de x sont imaginaires.

Il suit de là que *Le plus grand produit qu'on puisse former avec deux nombres qui doivent donner une somme connue* p, *est le carré de la moitié de cette somme.*

La démonstration de ce théorème peut encore être faite comme il suit. En représentant l'un des deux nombres par $\frac{1}{2}p + z$; l'autre sera $\frac{1}{2}p - z$, et le produit de ces nombres sera $\frac{1}{4}p^2 - z^2$; or la quantité $\frac{1}{4}p^2 - z^2$ ne peut jamais être plus grande que $\frac{1}{4}p^2$, et elle n'est égale à $\frac{1}{4}p^2$ que lorsqu'on suppose $z = 0$; dans ce cas, les deux nombres sont égaux l'un et l'autre à $\frac{1}{2}p$. Cette explication démontre, en outre, que, lorsque les facteurs sont inégaux, plus leur différence est petite, plus le produit approche de $\frac{1}{4}p^2$.

Des équations trinômes réductibles au second degré. — Réduction de l'expression $\sqrt{a + \sqrt{b}}$.

190. Lorsqu'une équation du quatrième degré ne contient ni la troisième puissance de l'inconnue, ni la première, elle peut être ramenée à cette forme

$$z^4 + pz^2 + q = 0. \qquad (1)$$

En posant $z^2 = y$, on obtient

(2) $$y^2 + py + q = 0.$$

On tire de cette dernière équation

(3) $$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

et, puisque $z^2 = y$, toutes les racines de l'équation (1) sont comprises dans la formule

(4) $$z = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}}.$$

On obtient ainsi pour l'inconnue z quatre valeurs, qui sont deux à deux égales en valeur absolue, et de signes contraires.

Quand les deux valeurs de y sont réelles et positives, les quatre valeurs de z sont réelles. Quand une des valeurs de y est négative, l'autre étant positive, deux des valeurs de z sont imaginaires, et les deux autres sont réelles. Enfin, lorsque les deux valeurs de y sont négatives ou imaginaires, les quatre valeurs de z sont imaginaires.

191. Considérons plus généralement l'équation trinôme

(5) $$z^{2m} + pz^m + q = 0,$$

m désignant un nombre entier positif quelconque.

Si l'on pose $z^m = y$, il vient $y^2 + py + q = 0$; d'où

$$y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

On vérifiera donc l'équation (5) en posant

(6) $$z = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}}.$$

Quand m est un nombre pair, chaque valeur positive de y donne deux valeurs réelles de z, de signes contraires; les valeurs négatives de y ne donnent aucune valeur réelle de z. Quand m est un nombre impair, chaque valeur réelle de y, positive ou négative, donne une seule valeur réelle de z (n° 148).

192. Lorsque la quantité $\frac{1}{4}p^2 - q$ n'est pas un carré, on obtient pour les racines de l'équation (1) des expressions de la forme $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, a et b étant des nombres commensurables, et $\sqrt{b}$ étant incommensurable. Or une semblable expression peut être équivalente à une autre plus simple; car le carré de $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ étant $m + n \pm 2\sqrt{mn}$, la première quantité est la racine carrée de la seconde : ce qui montre qu'une quantité composée d'une partie rationnelle et d'une partie irrationnelle du second degré peut avoir une racine carrée exprimée par la somme de deux radicaux du second degré.

Pour reconnaître dans quel cas cette réduction de $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ est possible, et quelle est alors l'expression équivalente plus simple, posons

$$(7) \qquad \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

x et y étant des quantités inconnues pour lesquelles il s'agit d'obtenir des valeurs commensurables.

En élevant les deux membres au carré, on obtient

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}, \quad \text{d'où} \quad 2\sqrt{xy} = a - x - y + \sqrt{b};$$

et en élevant une seconde fois au carré,

$$4xy = (a - x - y)^2 + b + 2(a - x - y)\sqrt{b}.$$

Le premier membre de la dernière équation étant une quantité commensurable, puisque x et y doivent être commensurables, il faut que le second membre soit aussi commensurable, ce qui exige que l'on ait

$$a - x - y = 0; \quad \text{d'où} \quad x + y = a.$$

L'équation ci-dessus se réduit alors à

$$4xy = b; \quad \text{d'où} \quad xy = \frac{1}{4}b.$$

On conclut de là que les valeurs de x et de y sont les racines de l'équation $z^2 - az + \frac{1}{4}b = 0$ (n° 189); donc

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

et par suite, en mettant les valeurs de x et de y dans l'équation (7),

$$(8) \qquad \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Il résulte de ce calcul que la réduction que l'on s'était proposée est possible toutes les fois que la différence $a^2 - b$ est un carré. Quand cette condition n'est pas remplie, la réduction est impossible.

Les valeurs de x et de y ne changeront pas, si, au lieu de $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, on considère l'expression $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, en posant $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$; par conséquent,

$$(9) \qquad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Prenons pour exemple l'expression $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. On a $a=2$, $b=3$, $a^2-b=1$, et en mettant ces valeurs dans la formule (8), on en conclut

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Soit encore l'expression $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$. On a

$$a=11, \quad b=6^2\times 2=72, \quad a^2-b=49=7^2,$$

et en mettant ces valeurs dans la formule (9), on obtient

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}.$$

193. Les formules (8) et (9) ne cessent pas de subsister quels que soient les signes des deux quantités a et b. Mais le cas où b est négatif appartient au calcul des radicaux imaginaires, dont nous nous occuperons plus loin. Lorsque a est négatif et b positif, il faut que l'on ait $a^2 < b$ pour que l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ soit réelle; dans ce cas, $\sqrt{a^2-b}$ est imaginaire; de sorte que l'équation (7) ne peut pas être vérifiée par des valeurs rationnelles de x et de y.

Elimination d'une inconnue entre deux équations du second degré.

194. Lorque l'on a un système d'équations composé de plusieurs équations du premier degré et d'une seule équation du second degré, on peut déterminer, au moyen des équations du premier degré, les valeurs de toutes les inconnues hors une, exprimées en fonction de celle-ci. En substituant ces valeurs dans l'équation du second degré, on en obtient une du même degré, à une seule inconnue, qui fait connaître les valeurs de cette inconnue; et l'on en conclut les valeurs de toutes les autres inconnues. Le système admet généralement deux solutions, et il ne peut en admettre plus de deux.

195. Une équation du second degré à deux inconnues ne peut contenir que des termes dépendants du carré de l'une des inconnues, du produit de ces inconnues, de leurs premières puissances; et des termes connus. Elle est donc de cette forme,

$$(1) \qquad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

En considérant x, dans cette équation, comme une quantité connue, pour la résoudre par rapport à y, on peut l'écrire ainsi :

$$y^2 + \frac{bx+d}{a}y + \frac{cx^2+ex+f}{a} = 0.$$

On en conclut alors, d'après la règle du n° 169,

$$y = -\frac{bx+d}{2a} \pm \sqrt{\frac{(bx+d)^2}{4a^2} - \frac{cx^2+ex+f}{a}},$$

et en effectuant les calculs indiqués sous le radical,

$$y = -\frac{bx+d \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af}}{2a}.$$

Si le trinôme $(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af$ est un carré, les valeurs de y sont rationnelles par rapport à x, et elles ne contiennent cette inconnue qu'au premier degré. Supposons cette condition remplie, et représentons les deux valeurs de y, après toutes les réductions, par $mx+n$ et

$px+q$. Suivant la proposition du nº 184, l'équation proposée pourra être mise sous cette forme,

$$(y-mx-n)(y-px-q)=0.$$

Si, au lieu de résoudre l'équation par rapport à y, on la résolvait par rapport à x, on obtiendrait également pour cette inconnue des valeurs rationnelles; car ces valeurs seraient celles qu'on trouverait en résolvant séparément les deux équations du premier degré

$$y-mx-n=0, \quad y-px-q=0.$$

196. Supposons maintenant que l'on ait une autre équation du second degré, entre les mêmes inconnues x et y, et représentons-la par

$$(2) \qquad a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0.$$

Si les valeurs de l'une des inconnues en fonction de l'autre, qu'on déduira de cette équation, sont rationnelles, en les représentant par $m'x+n'$ et $p'x+q'$, l'équation sera

$$(y-m'x-n')(y-p'x-q')=0.$$

Dans ce cas, on obtiendra toutes les solutions du système des équations (1) et (2) en résolvant les quatre systèmes d'équations du premier degré :

1°. $\quad y-mx-n=0, \quad y-m'x-n'=0;$

2°. $\quad y-mx-n=0, \quad y-p'x-q'=0;$

3°. $\quad y-px-q=0, \quad y-m'x-n'=0;$

4°. $\quad y-px-q=0, \quad y-p'x-q'=0.$

Si une seule des deux équations donne des valeurs de l'une des inconnues rationnelles par rapport à l'autre, en supposant que ce soit la première, on pourra substituer successivement dans l'autre équation les deux valeurs $y=mx+n$, $y=px+q$. Chacune de ces substitutions conduira à une équation du second degré en x, par laquelle on obtiendra deux valeurs de x; et de chaque valeur de x, on conclura une valeur correspondante de y.

1er Exemple. $\quad \begin{cases} x^2-2xy+y^2=1, \\ y^2-x^2-6x-9=0. \end{cases}$

Sans effectuer la résolution de ces équations par rapport à l'une des inconnues, on voit que la première est

$$(x-y)^2-1=0, \quad \text{ou} \quad (x-y+1)(x-y-1)=0.$$

L'autre équation revient à

$$y^2-(x+3)^2=0, \quad \text{ou} \quad (y-x-3)(y+x+3)=0.$$

On aura donc toutes les solutions du système proposé par quatre systèmes d'équations du premier degré. Deux de ces systèmes présentent des équations incompatibles; les deux autres donnent les deux solutions

$$(x=-2,\ y=-1); \quad (x=-1,\ y=-2).$$

2ᵉ EXEMPLE. $$\begin{cases} y^2-3xy+2x^2+2y-4x=0, \\ y^2+x^2-3xy+4=0. \end{cases}$$

On déduit de la première équation

$$y=2x \quad \text{et} \quad y=x-2.$$

En remplaçant y par $2x$ dans la seconde équation, on parvient à

$$x^2-4=0; \quad \text{d'où} \quad x=2 \quad \text{et} \quad x=-2.$$

Les valeurs correspondantes de y sont $y=4$ et $y=-4$.

En remplaçant, dans la seconde équation, y par $x-2$, on obtient

$$x^2-2x-8=0; \quad \text{d'où} \quad x=4 \quad \text{et} \quad x=-2.$$

Les valeurs correspondantes de y sont $y=2$ et $y=-4$.

Le système proposé admet donc trois solutions différentes :

$$(x=2,\ y=4); \quad (x=-2,\ y=-4); \quad (x=4,\ y=2).$$

197. Quand chacune des deux équations fait trouver des valeurs de l'une des inconnues qui ne se réduisent pas à des fonctions rationnelles de l'autre inconnue, on peut effectuer l'élimination de x ou de y autrement que par la substitution de ces valeurs, et de manière à éviter les radicaux.

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par a', ceux de l'équation (2) par a, et retranchant ensuite la seconde équation de la première, on obtient une équation qui ne contient plus que la première puissance de y, et que nous représenterons, pour abréger, par

$$(3) \qquad myx + nx^2 + py + qx + r = 0.$$

On peut alors considérer, au lieu du système des équations (1) et (2), celui des équations (1) et (3).

L'équation (3) donne

$$(4) \qquad y = -\frac{nx^2 + qx + r}{mx + p};$$

en substituant cette valeur de y dans l'équation (1), on obtient celle-ci :

$$a\frac{(nx^2 + qx + r)^2}{(mx + p)^2} - (bx + d)\frac{nx^2 + qx + r}{mx + p} + cx^2 + ex + f = 0,$$

et en chassant les dénominateurs, il vient

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & a(nx^2 + qx + r)^2 - (bx + d)(mx + p)(nx^2 + qx + r) \\ & \qquad + (cx^2 + ex + f)(mx + p)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière équation contient généralement la quatrième puissance de l'inconnue et toutes les puissances inférieures.

On a déjà vu qu'une équation du quatrième degré peut avoir quatre racines (n° 190); on verra dans la suite qu'elle en a toujours quatre, réelles ou imaginaires, et qu'elle n'en a pas un plus grand nombre. D'ailleurs, pour chaque valeur de x, l'équation (4) donne une valeur correspondante de y, et elle n'en donne qu'une. Le système des équations (1) et (2) admet donc généralement quatre solutions, et il ne peut pas en admettre plus de quatre.

198. Quand on fait usage de la méthode qui vient d'être indiquée en dernier lieu, il peut arriver que la quantité $nx^2 + qx + r$ soit divisible par $mx + p$; dans ce cas, en représentant le quotient par $hx + k$, on a

$$nx^2 + qx + r = (mx + p)(hx + k),$$

et l'équation (3) est

$$(mx + p)(y + hx + k) = 0.$$

On satisfait donc à cette équation en posant

$$x = -\frac{p}{m}, \quad \text{ou} \quad y = -hx - k.$$

En portant la valeur $-\frac{p}{m}$ de x dans l'une des équations (1) et (2), on obtient une équation du second degré en y, dont les racines sont les valeurs de y correspondantes à $x = -\frac{p}{m}$. En substituant dans la même équation la valeur $-hx - k$ de y, on parvient à une équation du second degré en x, par laquelle on trouve deux autres solutions du système proposé.

3^e^ Exemple. $\begin{cases} yx + x^2 - 3y - 3x = 0. \\ 2y^2 + x^2 - 4xy - 2y - 9 = 0. \end{cases}$

La première revient à $(x - 3)(y + x) = 0$; ainsi, on y satisfait en posant $x = 3$ ou $y = -x$. En remplaçant x par 3 dans la seconde équation, on trouve $2y^2 - 14y = 0$; d'où $y = 0$, $y = 7$. En remplaçant y par $-x$ dans la même équation, on trouve $7x^2 + 2x - 9 = 0$, d'où $x = 1$ et $x = -\frac{9}{7}$. Les valeurs correspondantes de y sont $y = -1$ et $y = \frac{9}{7}$. Le système proposé admet donc ces quatre solutions :

$$(x = 3,\ y = 0);\quad (x = 3,\ y = 7);\quad (x = 1,\ y = -1);$$
$$\left(x = -\frac{9}{7},\ y = \frac{9}{7}\right).$$

PROBLEMES.

4^e^ Problème. — *Partager un nombre donné* a *en deux parties telles, que leurs carrés soient dans le rapport de* m *à* 1.

Désignons par x l'une des parties; l'équation du problème

sera

$$(1)\qquad \frac{x^2}{(a-x)^2} = m.$$

On déduit successivement de cette équation

$$(1-m)x^2 + 2amx = ma^2, \quad x^2 + \frac{2am}{1-m}x = \frac{ma^2}{1-m},$$

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)^2} + \frac{a^2m}{1-m}}$$

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{\sqrt{a^2m^2 + a^2m(1-m)}}{1-m},$$

$$(2)\qquad x = \frac{-am \pm a\sqrt{m}}{1-m}.$$

On peut résoudre l'équation (1) d'une autre manière, plus simple. En prenant la racine carrée de chaque membre, on trouve

$$\frac{x}{a-x} = \pm\sqrt{m}.$$

On conclut de là

$$x = \pm(a-x)\sqrt{m}, \quad x(1\pm\sqrt{m}) = \pm a\sqrt{m},$$

$$(3)\qquad x = \frac{\pm a\sqrt{m}}{1\pm\sqrt{m}}.$$

Les formules (2) et (3) ne sont pas identiques; mais, en réduisant les expressions des deux valeurs de x données par la formule (2), on retrouve celles qui résultent de la formule (3). On a

$$m = \sqrt{m}\times\sqrt{m}, \quad \text{et} \quad 1-m = 1-(\sqrt{m})^2 = (1+\sqrt{m})(1-\sqrt{m});$$

par conséquent, la formule (2) peut s'écrire ainsi :

$$x = \frac{-a\sqrt{m}\times\sqrt{m} \pm a\sqrt{m}}{(1+\sqrt{m})(1-\sqrt{m})}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{-a\sqrt{m}(\sqrt{m}\mp 1)}{(1+\sqrt{m})(1-\sqrt{m})}.$$

Quand on prend le signe inférieur, on peut diviser les deux termes de la valeur de x par $1+\sqrt{m}$, et l'on obtient

$$(4)\qquad x = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Quand on prend le signe supérieur, on peut diviser les deux termes de la valeur de x par $1-\sqrt{m}$; et en observant que le quotient de $\sqrt{m}-1$ par $1-\sqrt{m}$ est -1, on trouve

$$(5) \qquad x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}.$$

Lorsque l'on prend la valeur (5) de x, les deux parties sont

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},\quad a-x=a-\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

elles sont donc toutes deux positives et plus petites que le nombre proposé. Quand on suppose $m=1$, les valeurs de x et de $a-x$ deviennent égales; c'est ce qu'on pouvait prévoir d'après l'énoncé.

Lorsque l'on prend la valeur (4) de x, les deux parties sont

$$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}},\quad \text{et}\quad a-x=a+\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

comme elles ont des signes contraires, le nombre a est la différence de leurs valeurs absolues. Quand on suppose $m=1$, ces deux parties deviennent infinies; et, en effet, il est impossible de trouver deux nombres tels, que leur différence soit égale au nombre donné a, et que le rapport de leurs carrés soit égal à l'unité.

En introduisant l'hypothèse $m=1$ dans la valeur de x exprimée par $\frac{-am+a\sqrt{m}}{1-m}$, on trouve que cette valeur se réduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Ce résultat est dû au facteur $1-\sqrt{m}$, qui est contenu dans les deux termes, et qu'on a supprimé pour arriver à la formule (5).

Le problème que nous venons de résoudre correspond à cette question qui a été traitée par Clairaut : *Trouver, sur la ligne qui joint deux lumières d'intensités inégales, le point où ces deux lumières éclairent également*. Il correspond encore à cette autre question : *Trouver, sur la ligne qui joint les centres*

de deux masses inégales, le point qui est également attiré par ces masses. Le nombre m est alors le rapport des intensités des lumières ou celui des masses.

5^e^ Problème. — *Trouver deux nombres tels, que la différence de leurs produits par les nombres respectifs* a *et* b *soit égale à un nombre donné* s, *et que la différence de leurs carrés soit égale à un autre nombre donné* q.

Soient x et y les nombres cherchés, les équations du problème seront

$$ax - by = s, \quad x^2 - y^2 = q.$$

La première équation donne $y = \frac{ax-s}{b}$; la substitution de cette valeur dans la seconde équation conduit à

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2asx = -s^2 - b^2q;$$

on tire de là

$$x = \frac{as \pm b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}:$$

et en reportant cette valeur x dans la valeur de y tirée de la première équation, on trouve

$$y = \frac{bs \pm a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

La question admet donc les deux solutions suivantes :

$$1^\circ.\quad x = \frac{as + b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{bs + a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2};$$

$$2^\circ.\quad x = \frac{as - b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{bs - a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Discussion. Nous distinguerons trois cas :

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

1^er^ *Cas.* $a > b$. Pour que les valeurs de x et de y soient réelles, il faut que l'on ait $s^2 > q(a^2 - b^2)$.

Dans la première solution, les valeurs de x et de y sont positives. Dans la seconde solution, la valeur de x est aussi positive, car on a $as > bs$, et par conséquent $as > b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}$;

mais, pour que la valeur de y soit positive, il faut que l'on ait $bs > a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}$, ce qui revient à $b^2s^2 > a^2s^2 - a^2q(a^2 - b^2)$, d'où $(a^2 - b^2)s^2 < a^2q(a^2 - b^2)$, et enfin $s^2 < a^2q$.

Si, avec les deux conditions $a > b$, $s^2 > q(a^2 - b^2)$, on a $s^2 = a^2q$, la valeur de y, dans la seconde solution, est nulle; et si l'on a $s^2 > a^2q$, la valeur de y est négative.

Quand on a $a > b$ et $s^2 = q(a^2 - b^2)$, les deux solutions ne diffèrent pas, et les valeurs des inconnues sont positives.

Quand on a $s^2 < q(a^2 - b^2)$, les valeurs des inconnues sont imaginaires.

2^e *Cas.* $a < b$. La quantité $a^2 - b^2$ étant négative, les valeurs de x et de y sont réelles. Pour examiner dans quels cas elles sont positives ou négatives, on peut les écrire comme il suit :

$$1^\circ.\quad x = \frac{-as - b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2},\quad y = \frac{-bs - a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}$$

$$2^\circ.\quad x = \frac{-as + b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2},\quad y = \frac{-bs + a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}$$

On voit alors que, dans la première solution, x et y sont négatifs. Dans la seconde solution, x est toujours positif, car on a $b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > bs > as$. Quant à la valeur de y, on trouve qu'elle est positive, nulle, ou négative, suivant que l'on a $s^2 < a^2q$, $s^2 = a^2q$, $s^2 > a^2q$.

3^e *Cas.* $a = b$. La première solution donne pour x et y des valeurs infinies qui ne peuvent pas convenir au problème. Dans la seconde solution, les valeurs des inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour obtenir la véritable solution de la question, il suffit d'introduire dans les équations proposées l'hypothèse $a = b$; elles deviennent

$$x - y = \frac{s}{a},\quad \text{et}\quad x^2 - y^2 = q;$$

on en déduit $x + y = \frac{aq}{s}$, et, par suite,

$$x = \frac{a^2q + s^2}{2as},\quad y = \frac{a^2q - s^2}{2as}.$$

Ces valeurs sont toujours réelles. La valeur de x est positive; celle de y est positive, nulle, ou négative, suivant que l'on a $s^2 < a^2 q$, $s^2 = a^2 q$, $s^2 > a^2 q$.

On aurait pu tirer les valeurs de x et de y relatives au cas de $a = b$ des formules générales du problème, en exécutant des transformations semblables à celle qui a été employée dans le n° 173; mais il est plus simple de remonter aux équations.

Toute la discussion que nous venons d'établir est résumée dans tableau suivant;

$$a > b \left\{ \begin{array}{ll} s^2 > q(a^2 - b^2) & \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}}\ \textit{solution}.\ x \text{ et } y \text{ sont positifs.} \\ 2^{\text{e}}\ \textit{solution}.\ x \text{ est positif.......} \left\{ \begin{array}{l} s^2 < a^2 q,\ y \text{ est positif.} \\ s^2 = a^2 q,\ y \text{ est nul.} \\ s^2 > a^2 q,\ y \text{ est négatif.} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ s^2 = q(a^2 - b^2) & \textit{Une seule solution.}\ x \text{ et } y \text{ sont positifs.} \\ s^2 < q(a^2 - b^2) & \textit{Pas de solution.} \end{array} \right.$$

$$a < b \left\{ \begin{array}{l} \text{..............}\ 1^{\text{re}}\ \textit{solution}.\ x \text{ et } y \text{ sont négatifs.} \\ \text{..............}\ 2^{\text{e}}\ \textit{solution}.\ x \text{ est positif.......} \left\{ \begin{array}{l} s^2 < a^2 q,\ y \text{ est positif.} \\ s^2 = a^2 q,\ y \text{ est nul.} \\ s^2 > a^2 q,\ y \text{ est négatif.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$a = b \left\{ \text{..............}\ \textit{Une seule solution},\ x \text{ est positif.} \left\{ \begin{array}{l} s^2 < a^2 q,\ y \text{ est positif.} \\ s^2 = a^2 q,\ y \text{ est nul.} \\ s^2 > a^2 q,\ y \text{ est négatif.} \end{array} \right. \right.$$

6^e^ **Problème.** — *Trouver les termes d'une proportion par quotient, connaissant la somme* a *des extrêmes, la somme* b *des moyens, et la différence* s^2 *entre la somme des carrés des deux premiers termes et la somme des carrés des deux autres.*

Désignons par x et y les deux termes du premier rapport; les termes du second rapport seront $b - y$ et $a - x$, et l'on devra avoir les deux équations

$$x(a - x) = y(b - y), \quad x^3 + y^2 - (a - x)^2 - (b - y)^2 = s^2.$$

Ces équations se réduisent à

$$x^2 - y^2 - ax + by = 0, \quad 2ax + 2by = s^2 + a^2 + b^2;$$

la dernière donne

$$y = \frac{s^2 + a^2 + b^2 - 2ax}{2b}:$$

en substituant cette valeur de y dans la première équation, on

trouve, après quelques réductions,

$$(a^2-b^2)x^2-a(s^2+a^2-b^2)x+\frac{1}{4}(s^4+2a^2s^2+a^4-b^4)=0.$$

On déduit de cette équation

$$x=\frac{a(s^2+a^2-b^2)\pm b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)},$$

et l'on trouve ensuite

$$y=\frac{b(a^2-b^2-s^3)\mp a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}.$$

Ces valeurs de x et y fournissent les deux solutions ci-après :

1°. $$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{a(s^2+a^2-b^2)+b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & y&=\frac{b(a^2-b^2-s^2)-a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)},\\ a-x&=\frac{a(a^2-b^2-s^2)-b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & b-y&=\frac{b(a^2-b^2+s^2)+a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}.\end{aligned}\right.$$

2°. $$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{a(s^2+a^2-b^2)-b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & y&=\frac{b(a^2-b^2-s^2)+a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)},\\ a-x&=\frac{a(a^2-b^2-s^2)+b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & b-y&=\frac{b(a^2-b^2+s^2)-a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}.\end{aligned}\right.$$

Discussion. Supposons $a>b$. Pour que les valeurs des inconnues soient réelles, il faut que l'on ait $s^2>a^2-b^2$, le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

La première solution donne des valeurs positives pour x et $b-y$; mais la valeur de y et celle de $a-x$ sont négatives, car chacune d'elles est formée de deux parties négatives.

Dans la seconde solution, les valeurs de x et de y sont toujours positives. En effet, le radical $\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}$ étant équivalent à $\sqrt{(s^2+a^2-b^2)[s^2-(a^2-b^2)]}$ qui est la moyenne proportionnelle entre les deux quantités $s^2+a^2-b^2$ et $s^2-(a^2-b^2)$, la valeur de ce radical est plus petite que $s^2+(a^2-b^2)$, et plus grande que $s^2-(a^2-b^2)$; et puisque a est plus grand que b, on a

$$a(s^2+a^2-b^2)>b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}$$

et

$$a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}>b[s^2-(a^2-b^2)].$$

Quant aux valeurs de $a-x$ et de $b-y$, pour qu'elles soient

positives, il faut que l'on ait

$$b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}>a[s^2-(a^2-b^2)]$$

et

$$a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}<b(s^2+a^2-b^2);$$

ces deux conditions se réduisent l'une et l'autre à $s^2<a^2+b^2$.

Si l'on a $s^2=a^2+b^2$, les valeurs de $a-x$ et de $b-y$ dans la seconde solution sont nulles; par suite, la valeur de x se réduit à a, et celle de y se réduit à b.

Quand on a $s^2=a^2-b^2$, les deux solutions ne diffèrent pas; on a $x=a$, $y=0$, $a-x=0$, $b-y=b$.

Quand on a $s^2<a^2-b^2$, le problème est impossible.

L'hypothèse $a<b$ conduit à des conclusions semblables à celles que nous avons obtenues en supposant $a>b$, si ce n'est que tout ce que nous avons dit de x et de $a-x$ s'applique alors à y et à $b-y$, et *vice versâ*.

Quand on suppose $a=b$, les valeurs des inconnues dans le premier système sont infinies, et dans le second système elles deviennent indéterminées. En introduisant cette hypothèse dans les équations, on trouve qu'elles se réduisent à

$$(x-y)(x+y-a)=0, \quad x+y=\frac{s^2+2a^2}{2a}.$$

La seconde équation exige que $x+y-a$ ne soit pas zéro : on ne peut donc satisfaire à la première qu'en posant $x-y=0$, ou $x=y$; on en conclut

$$x=\frac{s^2+2a^2}{4a}, \quad a-x=\frac{2a^2-s^2}{4a}.$$

Il resterait à chercher quelle interprétation on doit donner aux valeurs négatives des inconnues x, y, $a-x$, $b-y$. Mais cette recherche est sans difficulté, et elle n'offre que peu d'intérêt; elle acquerrait plus d'importance si, à la question que nous nous sommes proposée, on substituait celle-ci, qui donne les mêmes équations : *Inscrire dans un rectangle donné, dont les côtés sont* a *et* b, *un second rectangle tel, que la différence des carrés de ses côtés soit égale à un carré donné* s^2.

trouve, après quelques réductions,

$$(a^2 - b^2)x^2 - a(s^2 + a^2 - b^2)x + \frac{1}{4}(s^4 + 2a^2s^2 + a^4 - b^4) = 0.$$

On déduit de cette équation

$$x = \frac{a(s^2 + a^2 - b^2) \pm b\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2}}{2(a^2 - b^2)},$$

et l'on trouve ensuite

$$y = \frac{b(a^2 - b^2 - s^2) \mp a\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2}}{2(a^2 - b^2)}.$$

Ces valeurs de x et y fournissent les deux solutions ci-après :

1°.
$$\left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{a(s^2+a^2-b^2)+b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & y = \dfrac{b(a^2-b^2-s^2)-a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, \\ a-x = \dfrac{a(a^2-b^2-s^2)-b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & b-y = \dfrac{b(a^2-b^2+s^2)+a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}. \end{array}\right.$$

2°.
$$\left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{a(s^2+a^2-b^2)-b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & y = \dfrac{b(a^2-b^2-s^2)+a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, \\ a-x = \dfrac{a(a^2-b^2-s^2)+b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}, & b-y = \dfrac{b(a^2-b^2+s^2)-a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)}. \end{array}\right.$$

Discussion. Supposons $a > b$. Pour que les valeurs des inconnues soient réelles, il faut que l'on ait $s^2 > a^2 - b^2$, le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

La première solution donne des valeurs positives pour x et $b - y$; mais la valeur de y et celle de $a - x$ sont négatives, car chacune d'elles est formée de deux parties négatives.

Dans la seconde solution, les valeurs de x et de y sont toujours positives. En effet, le radical $\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2}$ étant équivalent à $\sqrt{(s^2 + a^2 - b^2)[s^2 - (a^2 - b^2)]}$ qui est la moyenne proportionnelle entre les deux quantités $s^2 + a^2 - b^2$ et $s^2 - (a^2 - b^2)$, la valeur de ce radical est plus petite que $s^2 + (a^2 - b^2)$, et plus grande que $s^2 - (a^2 - b^2)$; et puisque a est plus grand que b, on a

$$a(s^2 + a^2 - b^2) > b\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2}$$

et

$$a\sqrt{s^4 - (a^2 - b^2)^2} > b[s^2 - (a^2 - b^2)].$$

Quant aux valeurs de $a - x$ et de $b - y$, pour qu'elles soient

positives, il faut que l'on ait

$$b\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2} > a[s^2-(a^2-b^2)]$$

et

$$a\sqrt{s^4-(a^2-b^2)^2} < b(s^2+a^2-b^2);$$

ces deux conditions se réduisent l'une et l'autre à $s^2 < a^2+b^2$.

Si l'on a $s^2=a^2+b^2$, les valeurs de $a-x$ et de $b-y$ dans la seconde solution sont nulles; par suite, la valeur de x se réduit à a, et celle de y se réduit à b.

Quand on a $s^2=a^2-b^2$, les deux solutions ne diffèrent pas; on a $x=a$, $y=0$, $a-x=0$, $b-y=b$.

Quand on a $s^2<a^2-b^2$, le problème est impossible.

L'hypothèse $a<b$ conduit à des conclusions semblables à celles que nous avons obtenues en supposant $a>b$, si ce n'est que tout ce que nous avons dit de x et de $a-x$ s'applique alors à y et à $b-y$, et *vice versâ*.

Quand on suppose $a=b$, les valeurs des inconnues dans le premier système sont infinies, et dans le second système elles deviennent indéterminées. En introduisant cette hypothèse dans les équations, on trouve qu'elles se réduisent à

$$(x-y)(x+y-a)=0, \quad x+y=\frac{s^2+2a^2}{2a}.$$

La seconde équation exige que $x+y-a$ ne soit pas zéro : on ne peut donc satisfaire à la première qu'en posant $x-y=0$, ou $x=y$; on en conclut

$$x=\frac{s^2+2a^2}{4a}, \quad a-x=\frac{2a^2-s^2}{4a}.$$

Il resterait à chercher quelle interprétation on doit donner aux valeurs négatives des inconnues x, y, $a-x$, $b-y$. Mais cette recherche est sans difficulté, et elle n'offre que peu d'intérêt; elle acquerrait plus d'importance si, à la question que nous nous sommes proposée, on substituait celle-ci, qui donne les mêmes équations : *Inscrire dans un rectangle donné, dont les côtés sont* a *et* b, *un second rectangle tel, que la différence des carrés de ses côtés soit égale à un carré donné* s^2.

7[e] PROBLÈME. — *Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant son périmètre* 2 p *et sa surface* m².

Soient x et y les côtés de l'angle droit, et z l'hypoténuse; on a les trois équations

$$x+y+z=2p,\quad xy=2m^2,\quad x^2+y^2=z^2.$$

Pour résoudre ces équations, on prend la valeur de z dans la première et on la porte dans la troisième, ce qui donne

$$2p^2-2p(x+y)+xy=0;$$

en remplaçant xy par $2m^2$, on a

$$p^2-p(x+y)+m^2=0;$$

d'où

$$x+y=\frac{p^2+m^2}{p}.$$

On conclut de là, d'après l'équation $x+y+z=2p$,

$$z=\frac{p^2-m^2}{p};$$

et, d'après la valeur ci-dessus de $x+y$ et l'équation $xy=2m^2$, les deux autres côtés x et y sont les deux racines de l'équation

$$X^2-\frac{p^2+m^2}{p}X+2m^2=0;$$

ce qui donne

$$x=\frac{p^2+m^2+\sqrt{p^4+m^4-6p^2m^2}}{2p},$$

$$y=\frac{p^2+m^2-\sqrt{p^4+m^4-6p^2m^2}}{2p}.$$

Discussion. La valeur de z est toujours réelle; pour qu'elle soit positive, il faut que $p^2>m^2$. Pour que les valeurs de x et de y soient réelles, il faut que l'on ait

$$p^4+m^4-6p^2m^2>0,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité. Ces valeurs ne sont jamais négatives; car, dans l'équation d'où elles ont été tirées, le terme connu est positif, et le coefficient du second terme est

négatif. Les deux inégalités ci-dessus expriment donc toutes les conditions nécessaires pour la possibilité du problème.

Le polynôme $p^4 - 6p^2m^2 + m^4$ est un trinôme du second degré par rapport à p^2, que l'on peut décomposer en deux facteurs. La seconde inégalité devient ainsi

$$[p^2 - m^2(3 + 2\sqrt{2})]\,[p^2 - m^2(3 - 2\sqrt{2})] > 0.$$

Pour que cette condition soit remplie, il faut que les deux facteurs aient le même signe. On doit donc avoir

$$p^2 > m^2(3 + 2\sqrt{2}), \quad \text{ou bien} \quad p^2 < m^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

Mais, d'après la condition $p^2 > m^2$, on ne peut admettre que l'inégalité

$$p^2 > m^2(3 + 2\sqrt{2});$$

d'où l'on conclut

$$p > m\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad p > m(1 + \sqrt{2}) \text{ (n° 192)}.$$

Lorsqu'on a $p = m(1 + \sqrt{2})$, les valeurs de x, y et z deviennent

$$x = \frac{m(2 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} = m\sqrt{2}, \quad y = m\sqrt{2}, \quad z = 2m.$$

La relation $p = m(1 + \sqrt{2})$ détermine, pour chaque valeur de m, la plus petite valeur possible de p; d'où il suit que, parmi tous les triangles rectangles qui ont une surface donnée m^2, celui dont le périmètre est le plus petit est celui qui satisfait à cette relation : et puisque l'on a $x = y$, ce triangle est isocèle.

La condition $p > m(1 + \sqrt{2})$ peut s'écrire

$$m < \frac{p}{1 + \sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad m < p(\sqrt{2} - 1).$$

On en conclut alors que, parmi tous les triangles rectangles de même périmètre $2p$, celui qui a la plus grande surface est le triangle isocèle, lequel est équivalent au carré dont le côté est $p(\sqrt{2} - 1)$.

8ᵉ Problème. — *Trouver deux nombres* x *et* y, *connaissant leur produit* b *et la somme* a *de leurs carrés.*

Les équations du problème sont

$$x^2+y^2=a, \quad xy=b.$$

On peut éliminer y entre ces deux équations, en prenant la valeur de y dans la seconde et la substituant dans la première. On peut aussi remarquer que l'équation $xy=b$ donnant $x^2y^2=b^2$, on connaît la somme et le produit des deux quantités x^2 et y^2, de sorte qu'on pourrait former immédiatement une équation du second degré dont les racines donneraient les valeurs de ces quantités; mais les calculs sont plus simples par le procédé suivant.

En ajoutant et en retranchant les deux équations, membre à membre, après avoir multiplié les deux membres de la seconde par 2, on obtient

$$(x+y)^2=a+2b, \quad (x-y)^2=a-2b;$$

donc

$$x+y=\pm\sqrt{a+2b}; \quad x-y=\pm\sqrt{a-2b}.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$x=\frac{\pm\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}}{2},$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}}{2}.$$

Chaque radical doit avoir à la fois, dans les valeurs des deux inconnues, le signe supérieur ou le signe inférieur; de sorte qu'en désignant le premier radical par $2\sqrt{A}$ et le second par $2\sqrt{B}$, on a ces quatre solutions :

$$1^{\text{o}}.\ \begin{cases} x=+\sqrt{A}+\sqrt{B}, \\ y=+\sqrt{A}-\sqrt{B}; \end{cases} \qquad 2^{\text{o}}.\ \begin{cases} x=-\sqrt{A}-\sqrt{B}, \\ y=-\sqrt{A}+\sqrt{B}; \end{cases}$$

$$3^{\text{o}}.\ \begin{cases} x=+\sqrt{A}-\sqrt{B}, \\ y=+\sqrt{A}+\sqrt{B}; \end{cases} \qquad 4^{\text{o}}.\ \begin{cases} x=-\sqrt{A}+\sqrt{B}, \\ y=-\sqrt{A}-\sqrt{B}. \end{cases}$$

Les deux dernières solutions ne diffèrent pas des deux premières. On pouvait d'ailleurs prévoir, d'après la forme des équations, que l'on aurait deux solutions, dont l'une se déduirait de l'autre en changeant les signes des valeurs de x et de y,

puisque ces équations restent les mêmes quand on change x en $-x$ et y en $-y$.

Quand on emploie, pour résoudre ce problème, l'une des deux méthodes que nous avons d'abord indiquées, il y a des radicaux superposés dans les valeurs de x et de y; et il faut appliquer la réduction qui a été enseignée dans le nº **192**.

9ᵉ Problème. — *On donne la somme* a *de deux nombres et la somme* b *de leurs quatrièmes puissances; trouver ces nombres.*

Les équations du problème sont

$$(1)\qquad x + y = a;$$

$$(2)\qquad x^4 + y^4 = b.$$

En prenant dans la première équation la valeur de y en fonction de x, et la substituant dans la seconde équation, on parvient à une équation complète du quatrième degré, mais on peut obtenir une équation plus simple. A cet effet, on élève à la quatrième puissance les deux membres de l'équation (1), ce qui donne

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = a^4.$$

Remplaçant $x^4 + y^4$ par b, et mettant xy en facteur commun, il vient

$$(3)\qquad xy(4x^2 + 6xy + 4y^2) = a^4 - b.$$

L'équation (1) donne aussi, en élevant les deux membres au carré,

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy;$$

et en remplaçant, dans l'équation (3), $4x^2 + 4y^2$ par $4a^2 - 8xy$, on parvient à

$$xy(4a^2 - 2xy) = a^4 - b, \quad \text{d'où} \quad xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a^4 + b)}.$$

Les valeurs de x et de y sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - aX + a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a^4 + b)} = 0.$$

En prenant le signe $+$ devant le radical $\sqrt{\frac{1}{2}(a^4 + b)}$, on

n'obtient que des racines imaginaires. Quand on prend le signe —, la nature des racines dépend des valeurs de a et de b.

La résolution de ce problème peut aussi être effectuée comme il suit.

Si l'on considère le produit xy comme une inconnue auxiliaire représentée par z, les valeurs de x et de y seront les racines de l'équation

$$X^2 - aX + z = 0,$$

de sorte que l'on aura

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - z}.$$

En substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation (2), on obtient une équation semblable à celle qu'on a précédemment résolue, si ce n'est que xy est remplacé par z.

On peut encore poser $x - y = t$; on tire de cette relation, jointe à l'équation $x + y = a$,

$$x = \frac{a+t}{2}, \quad y = \frac{a-t}{2}.$$

En substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation $x^4 + y^4 = b$, et réduisant, on obtient l'équation

$$2t^4 + 12a^2t^2 + 2a^4 = 16b;$$

cette équation se résout par les règles qui ont été précédemment expliquées (n° 190).

10ᵉ Problème. — *Si au produit de deux nombres on ajoute* m *fois leur somme, on obtient un nombre donné* a; *et si à la somme des carrés de ces mêmes nombres on ajoute* n *fois leur somme, on obtient un autre nombre donné* b. *Trouver ces deux nombres.*

Soient x et y les nombres demandés, on a les deux équations

$$xy + m(x+y) = a, \quad x^2 + y^2 + n(x+y) = b.$$

En ajoutant ces équations, après avoir multiplié les deux membres de la première par 2, on obtient

$$(x+y)^2 + (2m+n)(x+y) = 2a + b.$$

Cette équation fait connaître la valeur de $x+y$; on en conclut celle de xy, et l'on trouve celles de x et de y par une équation du second degré.

On voit dans ce problème et dans le précédent comment on peut quelquefois réussir à ramener au second degré, par des artifices de calcul, ou par un choix convenable d'inconnues, une question qui, par les méthodes ordinaires, conduit à une équation de degré plus élevé.

11[e] Problème. — *Une personne possède* 13000 *francs, qu'elle partage en deux parties inégales, dont elle tire des revenus égaux; si elle faisait valoir la première partie au taux de la seconde, elle en retirerait un revenu de* 360 *francs; et si la seconde partie était placée au taux de la première, elle produirait un revenu de* 490 *francs. Trouver les deux taux.* (Réponse : 7 pour 100 et 6 pour 100.)

12[e] Problème. — *Les trois arêtes d'un parallélipipède rectangle sont proportionnelles aux nombres* 2, 3, 4; *et si ces arêtes augmentaient respectivement de* 1 *mètre,* 2 *mètres,* 3 *mètres, le volume du corps augmenterait de* 153 *mètres cubes. Déterminer les longueurs des arêtes.* (Réponse: 3 mètres, 4 mètres $\frac{1}{2}$, 6 mètres.)

13[e] Problème. — *Trouver trois nombres tels, que les produits de chacun d'eux par la somme des deux autres soient* 20, 18 *et* 14. (Réponse : 4, 3, 2.)

14[e] Problème. — *Un nombre est composé de trois chiffres. Le carré du chiffre des dizaines est égal au produit des chiffres extrêmes augmenté de* 4; *la différence entre le double du chiffre des dizaines et celui des unités est égale au chiffre des centaines; et quand on écrit les chiffres de ce nombre dans un ordre inverse, on obtient un second nombre qui, retranché du premier, donne pour reste* 390 *augmenté du chiffre des dizaines commun à ces deux nombres. Trouver ce nombre.* (Réponse : 864.)

15[e] Problème. — *Quatre nombres sont en proportion par quotient; la somme des extrêmes est* 14, *celle des moyens est* 11, *et la somme des quatrièmes puissances des quatre termes est* 24929. *Trouver ces quatre nombres.* (Réponse : 12, 8, 3, 2.)

Des questions de maximum et de minimum que l'on peut faire dépendre des équations du second degré.

199. On dit qu'une quantité variable devient *maximum*, quand elle atteint une valeur au delà de laquelle elle ne peut pas croître; et qu'elle est *minimum*, quand elle atteint une valeur au-dessous de laquelle elle ne peut pas décroître. Ainsi, suivant ce que l'on a vu dans le n° 189, le produit de deux nombres dont la somme est constante, est maximum quand les deux nombres sont égaux.

Cette proposition peut être étendue à un produit d'un nombre quelconque de facteurs; c'est-à-dire que *le produit de* m *nombres* a, b, c, d, etc., *dont la somme doit rester constante, est maximum quand ces nombres sont égaux.*

Pour le démontrer, supposons qu'on ait formé le produit maximum; si deux des facteurs, a et b, sont inégaux, on n'altérera pas la somme en remplaçant chacun de ces deux facteurs par leur demi-somme $\frac{a+b}{2}$; mais, puisque $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) > ab$, on aura aussi

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) cd \ldots > abcd \ldots.$$

Le produit maximum ne peut donc être que celui dont tous les facteurs sont égaux.

200. La proposition qui vient d'être établie conduit à cette autre : *La somme de* m *nombres* a, b, c, d, etc., *qui doivent donner un produit constant, est minimum quand ces nombres sont égaux.* Car, en nommant P la valeur constante du produit des m nombres, S la somme de ces nombres quand ils sont égaux, et S' un nombre moindre que S, le plus grand produit de m nombres donnant une somme égale à S', sera celui qu'on obtiendra quand les facteurs seront égaux, et il sera moindre que le produit P des m nombres égaux dont la somme est S : il est donc impossible d'obtenir une somme $S' < S$ avec m nombres dont le produit est P.

201. Considérons le trinôme du second degré

$$x^2 + px + q.$$

On a vu que, lorsque les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont imaginaires, le trinôme proposé est minimum pour $x = -\frac{1}{2}p$ (n° 187).

Supposons que l'équation $x^2 + px + q = 0$ ait deux racines réelles et inégales; nommons-les x' et x'', et soit $x' < x''$; on a alors

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x'').$$

Pour les valeurs de x plus grandes que x'', la valeur du trinôme $x^2 + px + q$ est positive; et lorsque x augmente depuis x'' jusqu'à $+\infty$, la valeur du trinôme augmente depuis zéro jusqu'à $+\infty$. Pour les valeurs de x plus petites que x', les deux facteurs $x - x'$ et $x - x''$ sont négatifs, donc leur produit est positif. Si l'on change les signes de ces facteurs, ils sont $x' - x$ et $x'' - x$, et quand x décroît depuis x' jusqu'à $-\infty$, leurs valeurs augmentent jusqu'à $+\infty$. Donc la valeur du trinôme augmente depuis zéro jusqu'à $+\infty$.

Quand la valeur de x est comprise entre x' et x'', le premier facteur est positif et l'autre est négatif; donc le produit est négatif. On peut écrire ce produit ainsi :

$$-(x - x')(x'' - x).$$

La valeur de x restant comprise entre x' et x'', les deux facteurs $x - x'$ et $x'' - x$ sont positifs, et leur somme est constante et égale à $x'' - x'$; la valeur absolue du produit est donc maximum quand les deux facteurs sont égaux. On a alors

$$x = \frac{x' + x''}{2} \quad \text{et} \quad x^2 + px + q = -\frac{(x'' - x')^2}{4}.$$

La valeur $-\frac{1}{4}(x'' - x')^2$ est un minimum, puisqu'elle est négative, et elle surpasse en valeur absolue toutes les autres valeurs négatives du trinôme.

On parvient à la même conclusion en écrivant le trinôme

x^2+px+q de cette manière :

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2-\left(\frac{1}{4}p^2-q\right).$$

Lorsque la valeur de $x+\frac{1}{2}p$ est comprise entre $-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ et $+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$, la quantité ci-dessus est négative, et elle a la plus grande valeur absolue quand la partie positive $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2$ est nulle, c'est-à-dire quand $x=-\frac{1}{2}p$; elle est alors $-\left(\frac{1}{4}p^2-q\right)$. Ces résultats ne diffèrent pas des précédents; car $-\frac{1}{2}p$ est la demi-somme des racines x' et x'', et $\frac{1}{4}p^2-q$ est le carré de la moitié de leur différence.

202. On peut résoudre plusieurs autres questions de maximum ou de minimum à l'aide des principes qui ont été exposés dans ce chapitre. A cet effet, on suppose que l'expression dont on veut trouver le maximum ou le minimum doive prendre une valeur déterminée, et l'on cherche les conditions nécessaires pour que cette supposition conduise à des valeurs réelles de l'inconnue, ou des inconnues contenues dans l'expression proposée, et pour que ces valeurs soient positives, si la question l'exige : le maximum ou le minimum demandé résulte de ces conditions. Si l'on demande, par exemple, quel est, parmi tous les triangles rectangles qui ont une surface donnée m^2, celui dont le périmètre est minimum, on supposera que le périmètre soit donné; la question deviendra le problème 7^e (page 152), par lequel on a vu que le périmètre minimum est celui du triangle isocèle, et que sa valeur est $m(\sqrt{2}-1)$.

203. On parvient de cette manière à trouver les valeurs maximum et minimum de toutes les fonctions de cette forme

$$(1)\qquad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Si l'on pose

$$(2) \qquad \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = y,$$

cette équation fera connaître les valeurs de x pour chaque valeur de y, et il faudra que la valeur de y soit telle, que l'on obtienne des valeurs réelles de x. En chassant les dénominateurs et réduisant, on a

$$(3) \qquad (a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c'y = 0.$$

La condition de réalité des valeurs de x est

$$(4) \qquad (b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y) > 0;$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

En réduisant le premier membre de cette inégalité, on a une quantité de cette forme, $ny^2 + py + q$, n pouvant être positif, négatif ou nul; et il peut arriver que l'inégalité soit satisfaite par toutes les valeurs de y, ou qu'elle ne comporte que des valeurs de y comprises dans de certaines limites. Dans le premier cas, la fraction proposée pourra prendre toutes les valeurs possibles; dans le second cas, cette fraction aura pour maximum la limite supérieure des valeurs de y, et elle aura pour minimum la limite inférieure de ces valeurs. Quand le coefficient n de y^2 n'est pas nul, on détermine les limites des valeurs de y qui vérifient l'inégalité (4) comme cela a été expliqué dans le n° 187.

On ne tirerait aucune utilité de l'examen général des différents cas de la question par rapport aux valeurs des coefficients a, b, c, a', b', c'. On doit faire les opérations directement pour chaque exemple.

16e Problème. — *Partager un nombre donné* 2a *en deux parties telles, que la somme de leurs carrés soit minimum.*

En désignant les deux parties par x et y, on a

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4a^2 - 2xy.$$

Il suit de là que la somme $x^2 + y^2$ sera minimum quand le produit xy sera maximum; par conséquent, pour $x = y$. Cette somme sera d'autant plus grande que le produit xy sera plus petit, et elle sera la plus grande possible, en n'admettant

point de valeurs négatives pour x et y, quand une des parties sera zéro.

17^e PROBLÈME. — *Partager un nombre donné en deux parties, de telle sorte que la somme des deux quotients qu'on obtiendra en divisant chacune des deux parties par l'autre soit minimum.*

Nommons x et y les deux parties. On aura à chercher le minimum de

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Or, le produit des deux parties de cette somme étant constant, la somme est minimum quand les deux parties sont égales; d'où l'on conclut $x=y$. Il faudra donc partager le nombre donné en deux parties égales.

La somme proposée peut être rendue aussi grande qu'on le veut, puisqu'on peut prendre une des parties x et y aussi petite qu'on le veut.

18^e PROBLÈME. — *Trouver le maximum et le minimum de la fraction* $\frac{x-4}{x^2-3x-3}$.

En représentant par y une valeur quelconque de la fraction proposée, on a l'équation

$$\frac{x-4}{x^2-3x-3}=y;\quad \text{d'où}\quad yx^2-(3y+1)x-3y+4=0.$$

Pour qu'elle donne des valeurs réelles de x, il faut que

$$(3y+1)^2-4y(4-3y)>0,\quad \text{ou}\quad 21y^2-10y+1>0,$$

et, en décomposant le premier membre de l'inégalité en facteurs,

$$21\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{7}\right)>0;$$

d'où l'on conclut

$$y>\frac{1}{3},\quad \text{ou}\quad y<\frac{1}{7},$$

le signe d'inégalité n'excluant pas d'ailleurs l'égalité.

Il résulte de là que la fraction proposée peut prendre toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $\frac{1}{7}$, et toutes celles qui sont

comprises entre $\frac{1}{3}$ et $+\infty$; mais elle ne peut prendre aucune valeur comprise entre $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{7}$ est le maximum des valeurs comprises entre cette limite et $-\infty$, et $\frac{1}{3}$ est le minimum des valeurs comprises entre cette limite et $+\infty$.

Si l'on veut obtenir les valeurs de x correspondantes à ces deux limites, on remarquera que, pour $y=\frac{1}{7}$ et pour $y=\frac{1}{3}$, les racines de l'équation entre x et y sont égales; d'où il suit que chacune d'elles est la moitié de leur somme, ou $\frac{3y+1}{2y}$. En faisant, dans cette expression, $y=\frac{1}{7}$, on trouve $x=5$, et en faisant $y=\frac{1}{3}$, on trouve $x=3$.

19ᵉ Problème. — *Quel est, parmi tous les rectangles que l'on peut inscrire dans un triangle donné, celui dont la surface est maximum?* (Celui dont la hauteur est la moitié de la hauteur du triangle.)

20ᵉ Problème. — *Quel est, parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, celui qui jouit de cette propriété que la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est maximum?* (Celui qui est isocèle.)

21ᵉ Problème. — *Déterminer le maximum et le minimum de la fraction* $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+1}$, *et les valeurs correspondantes de* x. $\left(\text{Maximum } \frac{9-2\sqrt{15}}{21}, \text{ pour } x=\frac{1+\sqrt{15}}{7}; \text{ minimum } \frac{9+2\sqrt{15}}{21}, \text{ pour } x=\frac{1-\sqrt{15}}{7}.\right)$

CHAPITRE SIXIÈME.

DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Réduction des expressions imaginaires du second degré à la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. *Module. Addition, soustraction, multiplication, division des expressions de la forme* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

204. Quoique l'indication de la racine carrée d'une quantité négative ne soit que le symbole d'une opération impossible, cependant les algébristes mettent ces sortes de racines au rang des quantités, et ils les emploient dans leurs calculs au moyen d'un petit nombre de conventions.

Soit β une quantité réelle; les racines carrées de $-\beta^2$ seront exprimées par le symbole $\pm\sqrt{-\beta^2}$. Mais la quantité $-\beta^2$ étant le produit de β^2 par -1, si l'on suppose que les racines carrées de ce produit peuvent être formées, comme dans le cas où les facteurs sont positifs, en multipliant entre elles les racines carrées des facteurs, on représentera les racines carrées de $-\beta^2$ par $\pm\beta\sqrt{-1}$. On peut donc convenir que les expressions $\pm\sqrt{-\beta^2}$ et $\pm\beta\sqrt{-1}$ seront regardées comme équivalentes; de cette manière, on n'a plus à considérer dans les calculs d'autre radical imaginaire que $\sqrt{-1}$.

Lorsque les racines d'une équation complète du second degré sont imaginaires, elles sont de cette forme

$$x = \alpha \pm \sqrt{-\beta^2}, \quad \text{ou} \quad x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}.$$

On nomme généralement *expression imaginaire* toute expression qui n'est susceptible d'aucune valeur réelle positive ou négative. Mais les expressions imaginaires telles que $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ sont les seules qu'on emploie dans les calculs algébriques; et lorsque nous nous servirons de la dénomination d'expression

imaginaire, on devra entendre qu'il s'agit d'une expression de cette forme.

Lorque le coefficient β de $\sqrt{-1}$ devient nul, le terme $\beta\sqrt{-1}$ est regardé comme réduit à zéro. Par cette convention, l'expression $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ se réduit à la quantité réelle α; de sorte que les expressions imaginaires comprennent comme cas particulier les quantités réelles.

Il est évident que, pour que deux expressions imaginaires soient égales, il faut et il suffit qu'il y ait égalité entre les parties réelles de ces expressions et entre les coefficients de $\sqrt{-1}$. Ainsi, une équation entre des quantités imaginaires est la représentation *symbolique* de deux équations entre des quantités réelles. Par exemple, l'équation

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$$

représente à la fois les deux équations réelles

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

On dit que deux expressions imaginaires sont conjuguées, quand elles ne diffèrent que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$, comme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

205. On applique aux expressions imaginaires les règles ordinaires du calcul, en observant que, lorsque l'on a à multiplier le symbole $\sqrt{-1}$ par lui-même, il faut admettre, d'après la signification du signe $\sqrt{}$, que le produit est -1.

En considérant seulement deux expressions imaginaires, la somme, la différence et le produit de ces expressions se formeront comme on le voit dans les égalités ci-dessous :

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1},$$
$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) - (\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1},$$
$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\sqrt{-1}.$$

En ajoutant les expressions conjuguées

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

on obtient une quantité réelle, 2α; le produit des mêmes expressions est aussi une quantité réelle, $\alpha^2 + \beta^2$.

La valeur absolue de la racine carrée de la quantité α^2+6^2 est appelée *module* de chacune des expressions $\alpha+6\sqrt{-1}$, $\alpha-6\sqrt{-1}$. Il suit de cette définition que le module d'une quantité réelle est la valeur absolue de cette quantité.

Pour que le module $\sqrt{\alpha^2+6^2}$ soit nul, il faut qu'on ait en même temps $\alpha=0$, $6=0$; dans ce cas, l'expression $\alpha+6\sqrt{-1}$ devient zéro. Réciproquement, pour que l'expression $\alpha+6\sqrt{-1}$ soit nulle, il faut que son module soit nul, puisque l'on doit avoir $\alpha=0$ et $6=0$.

L'égalité de deux expressions imaginaires entraîne l'égalité de leurs modules; mais la réciproque n'est pas vraie.

206. Le module de l'expression imaginaire qu'on a obtenue en multipliant $\alpha+6\sqrt{-1}$ par $\gamma+\delta\sqrt{-1}$, est

$$\sqrt{(\alpha\gamma-6\delta)^2+(\alpha\delta+6\gamma)^2}.$$

Or

$$(\alpha\gamma-6\delta)^2+(\alpha\delta+6\gamma)^2=(\alpha^2+6^2)(\gamma^2+\delta^2).$$

Le module ci-dessus est donc égal à $\sqrt{(\alpha^2+6^2)(\gamma^2+\delta^2)}$, ce qui revient à

$$\sqrt{\alpha^2+6^2}\times\sqrt{\gamma^2+\delta^2}.$$

Il suit de là que *Le module du produit de deux facteurs imaginaires est égal au produit des modules des deux facteurs*; d'où l'on conclut que *Le module du produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs* (*).

(*) D'après l'égalité $(\alpha^2+6^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma-6\delta)^2+(\alpha\delta+6\gamma)^2$, *le produit de deux nombres qui sont chacun la somme de deux carrés, est aussi la somme de deux carrés.* La manière dont on parvient ici à ce théorème est un exemple remarquable de la liaison qui peut souvent exister entre des propriétés en apparence très-éloignées les unes des autres.

En échangeant entre elles les lettres γ et δ, dans l'égalité ci-dessus, on obtient la suivante : $(\alpha^2+6^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\delta-6\gamma)^2+(\alpha\gamma+6\delta)^2$. Ainsi, *il y a toujours deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres dont chacun est la somme de deux carrés.*

Ce théorème conduit à un autre plus général, savoir, que le produit des facteurs α^2+n6^2 et $\gamma^2+n\delta^2$ peut être exprimé de deux manières différentes, par une somme de la forme A^2+nB^2. Pour démontrer ce dernier théorème, il suffit de remplacer dans les égalités ci-dessus 6 par $6\sqrt{n}$ et δ par $\delta\sqrt{n}$.

Pour qu'un produit de plusieurs facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que le module de ce produit soit nul (n° 205). Or ce module étant le produit des modules des facteurs imaginaires, qui sont des quantités réelles, il ne peut être nul qu'autant que le module de l'un des facteurs est zéro, ce qui exige que l'un des facteurs imaginaires soit nul. Donc, *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

207. En formant par des multiplications successives les puissances de $\sqrt{-1}$, on trouve d'abord

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}, \quad (\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}, \quad (\sqrt{-1})^4 = +1.$$

La puissance quatrième étant $+1$, si l'on formait les puissances supérieures, on retrouverait périodiquement les quatre résultats

$$\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}, \quad +1.$$

Si l'on représente par n un nombre entier quelconque, tous les nombres entiers seront compris dans les quatre expressions $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, et l'on aura toutes les puissances de $\sqrt{-1}$ par les formules

$$(\sqrt{-1})^{4n} = +1, \quad (\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1, \quad (\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$$

208. Soit à diviser l'expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par une quantité réelle γ. Si l'on suppose que le quotient soit $p + q\sqrt{-1}$, il faudra que l'on ait

$$\gamma(p + q\sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

ou bien

$$p\gamma + q\gamma\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

La dernière égalité exige que $p\gamma = \alpha$, $q\gamma = \beta$, d'où $p = \frac{\alpha}{\gamma}$, $q = \frac{\beta}{\gamma}$. Le quotient est donc $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{-1}$.

Soit à diviser l'expression imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par

$\gamma + \delta\sqrt{-1}$. Supposons que le quotient puisse être exprimé par $p + q\sqrt{-1}$; on devra avoir

$$(p + q\sqrt{-1})(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \alpha + 6\sqrt{-1},$$

ce qui revient à

$$p\gamma - q\delta + (p\delta + q\gamma)\sqrt{-1} = \alpha + 6\sqrt{-1}.$$

Cette équation se partage en deux autres

$$p\gamma - q\delta = \alpha, \quad p\delta + q\gamma = 6.$$

On tire de celles-ci :

$$p = \frac{\alpha\gamma + 6\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \quad q = \frac{6\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2};$$

le quotient demandé est donc

$$\frac{\alpha\gamma + 6\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{6\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

On parvient au même résultat en indiquant le quotient par une fraction, et en multipliant les deux termes de cette fraction par $\gamma - \delta\sqrt{-1}$; car on trouve ainsi :

$$\frac{\alpha + 6\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + 6\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1})}{(\gamma + \delta\sqrt{-1})(\gamma - \delta\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\alpha\gamma + 6\delta + (6\gamma - \alpha\delta)\sqrt{-1}}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + 6\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{6\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}\sqrt{-1}.$$

Il résulte du principe qui a été établi dans le nº 206, que *Le module du quotient de deux expressions imaginaires est le quotient de leurs modules;* et l'on peut le vérifier au moyen de l'expression ci-dessus du quotient

Racines carrées de $\alpha + 6\sqrt{-1}$. — Considérations sur les valeurs algébriques des racines de tous les degrés.

209. On peut obtenir les racines carrées de l'expression $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$ par les formules (8) et (9) du nº 192; il suffit de remplacer dans ces formules, a par α et b par -6^2; on trouve

ainsi

$$(1)\quad \sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1},$$

$$(2)\quad \sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}.$$

Il suit de là qu'une expression imaginaire, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, a, comme une quantité réelle, deux racines carrées de la même forme; car, dans chacune des formules (1) et (2), le carré du second membre ne changera pas, si l'on change à la fois le signe de la partie réelle et celui du coefficient de $\sqrt{-1}$.

Pour reconnaître si l'expression $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ a d'autres racines carrées que celles qui sont données par la formule (1), il faut chercher tous les couples de valeurs réelles de x et de y qui vérifient l'équation

$$(x+y\sqrt{-1})^2 = \alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Cette équation se partage en deux autres :

$$x^2-y^2=\alpha,\quad 2xy=\beta.$$

On conclut de celles-ci, en les élevant au carré et les ajoutant,

$$(x^2+y^2)^2=\alpha^2+\beta^2,\quad \text{d'où}\quad x^2+y^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2};$$

par suite on a

$$x^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2},\quad \text{d'où}\quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}},$$

$$y^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2},\quad \text{d'où}\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}.$$

Les valeurs de x et de y devant être réelles, la somme x^2+y^2 doit être une quantité positive, en sorte qu'il faut ne prendre pour cette somme que la valeur absolue de $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; de plus, les valeurs de x et de y devant vérifier l'équation $2xy=\beta$, il faut qu'elles aient le même signe lorsque β est une quantité positive, et des signes contraires lorsque β est une quantité négative.

On conclut de là que l'expression $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ a seulement

deux racines carrées de la forme $x+y\sqrt{-1}$, et qui sont égales et de signes contraires. En exprimant, suivant les notations ordinaires, ces deux racines carrées par $\pm\sqrt{\alpha+6\sqrt{-1}}$, on aura, si 6 est positif,

$$(3)\quad \pm\sqrt{\alpha+6\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}+\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

Si 6 est négatif, ou, ce qui revient au même, si l'expression proposée est $\alpha-6\sqrt{-1}$, 6 étant positif, les deux racines carrées de cette expression seront données par la formule

$$(4)\quad \pm\sqrt{\alpha-6\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}+\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

On peut remplacer les formules (3) et (4) par d'autres qui s'appliquent à la fois aux valeurs positives et négatives de 6. Pour cela, après avoir déterminé la valeur de l'une des inconnues x et y comme ci-dessus, il faut déterminer la valeur de l'autre inconnue au moyen de l'équation $2xy=6$. On trouve ainsi

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}+\alpha}{2}},\quad y=\pm\frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+6^2}+\alpha}};$$

ou, ce qui revient au même,

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}-\alpha}{2}},\quad x=\pm\frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+6^2}-\alpha}}.$$

On a donc

$$(5)\quad \pm\sqrt{\alpha+6\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}+\alpha}{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+6^2}+\alpha}}\sqrt{-1}\right);$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\quad \pm\sqrt{\alpha+6\sqrt{-1}}=\pm\left(\frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+6^2}-\alpha}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}\right).$$

210. Si l'on veut avoir les racines carrées de $+\sqrt{-1}$ et de

$-\sqrt{-1}$, il faudra faire dans les formules (3) et (4), $\alpha = 0$ et $\beta = 1$; on trouvera ainsi

$$\pm\sqrt{+\sqrt{-1}} = \pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Les racines carrées de $+\sqrt{-1}$ et de $-\sqrt{-1}$ sont les valeurs qu'on obtiendrait pour z en considérant l'équation $z^4 = -1$; car cette équation peut s'écrire ainsi : $(z^2)^2 = -1$, d'où $z^2 = \pm\sqrt{-1}$. D'un autre côté, l'équation $z^4 = -1$ exprime que z est une racine quatrième de -1. On voit donc qu'il y a quatre racines quatrièmes de -1, qui sont :

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

211. Pour obtenir les racines quatrièmes d'une quantité quelconque A, il faut résoudre l'équation

$$z^4 = A.$$

Supposons d'abord que la quantité A soit positive. Désignons par a le nombre dont la quatrième puissance est égale à A, et posons $z = ay$; l'équation $z^4 = A$ deviendra

$$a^4y^4 = a^4, \quad \text{d'où} \quad y^4 = 1, \quad \text{ou bien} \quad y^4 - 1 = 0.$$

$y^4 - 1$ étant le produit de $y^2 - 1$ par $y^2 + 1$, l'équation $y^4 - 1 = 0$ peut être remplacée par les suivantes :

$$y^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^2 + 1 = 0.$$

La première donne $y = \pm 1$, et la seconde donne $y = \pm\sqrt{-1}$. En multipliant les quatre valeurs de y par a, on a quatre racines quatrièmes de A, qui sont : $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$.

Si la quantité dont on veut avoir les racines quatrièmes est négative, en la représentant par $-A$, il faudra résoudre l'équation

$$z^4 = -A.$$

Représentons encore par a le nombre dont la quatrième puissance est égale à A, et posons $z = ay$; l'équation $z^4 = -A$ se changera dans la suivante :

$$a^4 y^4 = -a^4, \quad \text{ou} \quad y^4 = -1.$$

Il suit de là que l'on aura toutes les racines quatrièmes de $-A$ en multipliant par a les racines quatrièmes de -1, que nous avons obtenues dans le numéro précédent.

212. Soient k un nombre entier quelconque et A une quantité réelle ou même une expression imaginaire : si l'on pose l'équation

$$z^{2^k} = A, \tag{7}$$

les valeurs de z qui satisferont à cette équation seront les racines de A, du degré 2^k. Or, z^{2^k} étant le carré de $z^{2^{k-1}}$, les valeurs de $z^{2^{k-1}}$ seront les deux racines carrées de A. Chacune de ces deux valeurs de $z^{2^{k-1}}$ conduira de même à deux valeurs de $z^{2^{k-2}}$. Chacune de celles-ci donnera pareillement deux valeurs de $z^{2^{k-3}}$. En continuant ainsi, on obtiendra, par des extractions successives de racines carrées, un nombre de valeurs de z égal à 2^k; toutes ces valeurs étant des expressions de la forme $p + q\sqrt{-1}$, puisque les racines carrées d'une telle expression sont des expressions de la même forme.

Il est facile de prouver que toutes les valeurs de z que l'on obtiendra par ces calculs seront différentes; il suffit pour cela de faire voir que, si cette proposition est vraie pour l'équation $z^{2^{k-1}} = A$, elle sera vraie aussi pour l'équation $z^{2^k} = A$. Or, soient $m + n\sqrt{-1}$ et $m' + n'\sqrt{-1}$ deux valeurs différentes de z qui satisfont à l'équation $z^{2^{k-1}} = A$; les valeurs correspondantes de z pour l'équation $z^{2^k} = A$ seront les racines carrées de ces deux expressions imaginaires. Mais, d'après les formules du n° 209, les deux racines carrées de $m + n\sqrt{-1}$ seront différentes l'une de l'autre. Celles de $m' + n'\sqrt{-1}$ seront aussi différentes l'une de l'autre; de plus, chacune d'elles sera différente des deux racines carrées de

la première expression; autrement, les deux expressions $m+n\sqrt{-1}$ et $m'+n'\sqrt{-1}$ ne seraient pas différentes, puisqu'elles seraient les carrés de deux expressions identiques.

213. Si l'on considère l'équation

$$z^m = A, \tag{8}$$

m désignant un nombre entier quelconque, les valeurs de z qu'on déduira de cette équation seront les racines du degré m de A. Lorsque m est un nombre pair, il est de la forme $n\times 2^k$, n désignant un nombre impair; si l'on pose alors $z^{2^k}=y$, l'équation (8) devient

$$y^n = A. \tag{9}$$

Quand on pourra déterminer les valeurs de y qui vérifieront la dernière équation, on déduira de chaque valeur de y, par des extractions successives de racines carrées, un nombre de valeurs de z égal à 2^k.

Considérons le cas particulier où A est une quantité réelle, positive ou négative, et $n=3$; l'équation (9) est alors

$$y^3 = A. \tag{10}$$

Supposons qu'on ait extrait, par les procédés de l'arithmétique, la racine cubique de la valeur absolue de A, et désignons par a cette racine cubique prise avec le signe de A; on aura $A=a^3$, et si l'on pose $y=ax$, l'équation (10) deviendra

$$a^3x^3 = a^3;\quad \text{d'où}\quad x^3=1,\quad \text{ou bien}\quad x^3-1=0.$$

x^3-1 est divisible par $x-1$ (n° 49), et le quotient est x^2+x+1; de sorte que l'équation $x^3-1=0$ peut s'écrire ainsi :

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

Or, pour qu'un produit de facteurs réels ou imaginaires soit nul, il suffit et il faut que l'un des facteurs soit nul (n° 206). On obtiendra donc toutes les racines de l'équation $x^3-1=0$ en résolvant séparément les deux équations

$$x-1=0 \quad\text{et}\quad x^2+x+1=0.$$

La première donne $x=1$, et l'on déduit de la seconde

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

Il suit de là que l'unité a trois racines cubiques qui sont

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

En multipliant ces trois racines cubiques de l'unité par a, on aura toutes les racines cubiques de A.

Si l'on veut reconnaître à posteriori comment l'expression $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\sqrt{-1})$ est une racine cubique de l'unité, il faudra élever cette expression au cube; en l'élevant d'abord au carré, on obtient $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\sqrt{-1})$, et en multipliant ce résultat par $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\sqrt{-1})$, on a pour produit l'unité. On s'assurera de même que le cube de $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\sqrt{-1})$ est l'unité.

Ces derniers calculs montrent que chacune des deux racines cubiques imaginaires de l'unité est le carré de l'autre; de sorte que si l'on représente, pour abréger, l'une de ces racines par α, l'autre sera α^2; et si l'on continue de désigner par a la racine cubique réelle de A, les trois racines cubiques de A seront a, $a\alpha$, $a\alpha^2$.

214. Pour obtenir les racines sixièmes d'une quantité quelconque, il suffit de prendre les racines carrées de chacune des trois racines cubiques de cette quantité.

Supposons la quantité proposée positive; représentons-la par $+A^2$, et désignons par a^2 le nombre dont le cube est A^2; les trois racines cubiques de A^2 seront a^2, $a^2\alpha$, $a^2\alpha^2$. Les racines carrées de a^2 sont $\pm a$, et celles de $a^2\alpha^2$ sont $\pm a\alpha$. Pour trouver les racines carrées de $a^2\alpha$, on remarque que la relation $\alpha^3=1$ donne $\alpha^4=\alpha$; d'où il suit que les racines carrées de $a^2\alpha$ sont $\pm a\alpha^2$. Les racines sixièmes de A^2 sont donc $\pm a$, $\pm a\alpha$, $\pm a\alpha^2$.

On peut obtenir ces racines d'une autre manière ; en représentant l'une quelconque d'entre elles par z, on doit avoir

$$z^6 = A^2.$$

Désignons encore par a^2 le nombre dont le cube est $+A^2$; on aura $A^2 = a^6$; et si l'on pose $z = ay$, l'équation ci-dessus deviendra

$$a^6y^6 = a^6 ; \quad \text{d'où} \quad y^6 = 1, \quad \text{ou bien} \quad y^6 - 1 = 0.$$

$y^6 - 1$ étant le produit de $y^3 - 1$ par $y^3 + 1$, l'équation $y^6 - 1 = 0$ peut être remplacée par les deux suivantes :

$$y^3 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^3 + 1 = 0.$$

Les racines de l'équation $y^3 - 1 = 0$ étant $1, \alpha, \alpha^2$, celles de l'équation $y^3 + 1 = 0$ sont -1, $-\alpha$ et $-\alpha^2$. En multipliant ces six valeurs de y par a, on trouve, comme ci-dessus, que les racines sixièmes de A^2 sont $+a$, $+a\alpha$, $+a\alpha^2$, $-a$, $-a\alpha$, $-a\alpha^2$.

215. Les considérations que nous venons de présenter montrent que les racines dont le degré est une puissance de 2, ou le produit de 3 par une puissance de 2, ont autant de valeurs qu'il y a d'unités dans leur degré. On verra par la suite que cette proposition s'étend aux racines de tous les degrés ; de sorte qu'en désignant par m un nombre entier quelconque, une quantité réelle, ou même une expression de la forme $p + q\sqrt{-1}$, a toujours m racines du degré m, toutes les déterminations imaginaires de ces racines étant de la forme $p + q\sqrt{-1}$.

Résolution générale de l'équation du troisième degré.

216. Une équation du troisième degré à une inconnue peut contenir, avec la troisième puissance de l'inconnue, les puissances inférieures, et un terme indépendant de l'inconnue ; mais, comme il sera démontré dans la suite que l'on peut toujours ramener la résolution d'une équation à celle d'une autre qui ne renferme pas la puissance de l'inconnue immédiatement inférieure au degré de l'équation, nous supposerons que

cette réduction a été opérée; et, pour éviter les fractions, nous présenterons l'équation du troisième degré sous cette forme

$$(1) \qquad x^3 + 3px + 2q = 0.$$

Nous supposerons d'ailleurs que p et q sont des quantités réelles.

Si l'on fait

$$x = y + z,$$

on pourra écrire l'équation résultante comme il suit :

$$y^3 + z^3 + 3(yz + p)(y + z) + 2q = 0.$$

Cette dernière équation est évidemment vérifiée quand on pose

$$yz + p = 0 \quad \text{et} \quad y^3 + z^3 + 2q = 0.$$

Celles-ci donnent

$$y^3 z^3 = -p^3, \quad y^3 + z^3 = -2q;$$

on conclut de ces deux équations que y^3 et z^3 sont les deux racines de l'équation

$$t^2 + 2qt - p^3 = 0;$$

donc

$$y^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}, \quad z^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3},$$

et puisque $x = y + z$,

$$(2) \qquad x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Si l'on n'avait point égard aux valeurs algébriques des radicaux, la formule (2) ne donnerait qu'une seule valeur de x; mais chaque radical cubique ayant trois déterminations, la somme des deux radicaux fournira pour x neuf expressions différentes. Ces neuf valeurs de x ne conviennent pas toutes à l'équation proposée; car les valeurs de y et de z doivent vérifier les deux équations $yz = -p$, $y^3 + z^3 = -2q$; or, la première équation a été remplacée par $y^3 z^3 = -p^3$, et toute quantité ayant trois racines cubiques, l'équation $y^3 z^3 = -p^3$ comporte, pour le produit yz, trois déterminations différentes. Si l'on représente, comme dans le n° 213, les racines cubiques imaginaires de l'unité par α et α^2, les trois valeurs de yz correspondantes à $y^3 z^3 = -p^3$ sont $yz = -p$, $yz = -p\alpha$,

$yz = -p\alpha^2$; la formule (2) doit donc donner à la fois les racines de l'équation (1), et celles des équations qu'on obtiendrait en remplaçant p, soit par $p\alpha$, soit par $p\alpha^2$. Or, p étant une quantité réelle, on devra rejeter dans la formule (2) toutes les combinaisons des valeurs des deux radicaux cubiques dont le produit sera imaginaire.

217. Lorsque la quantité q^2+p^3 est positive, chaque radical cubique a une valeur réelle. Représentons, pour abréger, la valeur réelle du premier radical par A, et celle du second par B; les trois valeurs du premier radical seront A, αA, $\alpha^2 A$, et celles du second seront B, αB, $\alpha^2 B$. Or, en multipliant successivement les trois premières quantités par les trois dernières, et en observant que α et α^2 sont des expressions imaginaires, que $\alpha^3=1$, et que α^4 est imaginaire, puisque, à cause de $\alpha^3=1$, on a $\alpha^4=\alpha$, on voit que l'on n'obtient que trois produits réels, savoir, $A\times B$, $\alpha A\times\alpha^2 B$, $\alpha^2 A\times\alpha B$. Il suit de là que l'on doit seulement admettre pour x les trois valeurs

$$A+B,\quad \alpha A+\alpha^2 B,\quad \alpha^2 A+\alpha B.$$

La première valeur est réelle, et les deux autres sont imaginaires. On verra d'ailleurs, dans la suite, que l'équation ne peut pas admettre un plus grand nombre de racines.

Prenons pour exemple l'équation

$$x^3-6x-9=0.$$

On a $p=-2$, $q=-\frac{9}{2}$, d'où $\sqrt{q^2+p^3}=\frac{7}{2}$; ce qui donne

$$A=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=2,$$

$$B=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{\frac{2}{2}}=1.$$

Les trois racines sont donc

$$x=3,$$

$$x=-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\sqrt{-1})=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

$$x=-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\sqrt{-1})=\frac{1}{2}(-3-\sqrt{3}\sqrt{-1}).$$

On s'assurera aisément que ces trois valeurs de x vérifient l'équation proposée.

Lorsque la quantité q^2+p^3 est négative, ce qui exige que p soit négatif, les radicaux cubiques compris dans la formule (2) n'ont plus de valeur réelle; cependant toutes les racines sont réelles (*). Mais, pour déduire ces racines de la formule (2), il faudrait la débarrasser des imaginaires; et l'on ne peut y parvenir qu'en exprimant chaque radical cubique par une suite composée d'un nombre infini de termes. C'est ce qu'on appelle le *cas irréductible* de l'équation de troisième degré.

On a un exemple de ce cas dans l'équation

$$x^3 - 21x + 20 = 0;$$

il faut faire dans la formule (2) $p=-7$, $q=10$; on trouve

$$x = \sqrt[3]{-10+9\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{-10-9\sqrt{-3}}.$$

L'équation a trois racines réelles; car elle est vérifiée quand on remplace x par chacun des nombres 1, 4 et -5.

218. Lorsque la quantité q^2+p^3 est positive, la formule (2)

(*) Lorsque deux nombres substitués dans le premier membre d'une équation dont le second membre est zéro, donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent au moins une racine réelle de l'équation. En admettant cette proposition, qui sera démontrée dans la suite, il est facile de prouver que l'équation (1) a trois racines réelles lorsque $q^2+p^3<0$. En effet, supposons q positif, et puisque p doit être négatif, remplaçons-le par $-p$; on aura $p^3>q^2$, et l'équation pourra s'écrire ainsi

$$x(x^2-3p)+2q=0.$$

On peut donner à x une valeur négative telle, que x^2 soit plus grand que $3p$, et telle aussi, que la valeur absolue de $x(x^2-3p)$ soit plus grande que $2q$; alors le premier membre de l'équation aura une valeur négative, puisque x étant négatif et x^2-3p étant positif, le produit $x(x^2-3p)$ sera négatif. Pour $x=0$, on a un résultat positif. Pour $x=\sqrt{p}$, le premier membre de l'équation devient $-2p\sqrt{p}+2q$, donc il est négatif; car de $p^3>q^2$, on conclut $p\sqrt{p}>q$. Enfin, pour $x>\sqrt{3p}$, on a un résultat positif. Il suit de là que l'équation a une racine négative, une racine positive moindre que $\sqrt{p}$, et une autre racine positive comprise entre $\sqrt{p}$ et $\sqrt{3p}$. Si l'on changeait q en $-q$ dans l'équation, le résultat serait le même que si l'on changeait x en $-x$; par conséquent les racines changeraient seulement de signes, et l'équation aurait encore trois racines réelles.

présente encore une imperfection, qui consiste en ce qu'elle peut ne donner pour la racine réelle qu'une expression embarrassée de radicaux, quoique cette racine soit rationnelle. On en a un exemple dans l'équation

$$x^3 - 6x - 40 = 0.$$

Il faut faire dans la formule (2) $p = -2$, $q = -20$, ce qui conduit à

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

La racine se trouve ainsi exprimée sous une forme irrationnelle; cependant elle est commensurable, car l'équation est vérifiée quand on fait $x = 4$.

Pour déduire de la formule (2) la valeur exacte de la racine, lorsqu'elle est rationnelle, il faudrait exécuter sur chacun des radicaux cubiques compris dans la formule une transformation analogue à celle que nous avons exposée au sujet de l'expression $\sqrt{a + \sqrt{b}}$; mais cette transformation dépend elle-même de la recherche d'une racine rationnelle d'une équation du troisième degré.

Dans le cas où l'on a $q^2 + p^3 = 0$, les quantités A et B sont égales l'une et l'autre à la valeur réelle de $\sqrt[3]{-q}$; et comme $\alpha + \alpha^2 = -1$, on trouve

$$A + B = 2\sqrt[3]{-q}, \quad A\alpha + B\alpha^2 = -\sqrt[3]{-q}, \quad A\alpha^2 + B\alpha = -\sqrt[3]{-q}.$$

Les trois racines sont donc réelles, et deux d'entre elles sont égales.

CHAPITRE SEPTIÈME.

PROPOSITIONS SUR LES NOMBRES. FRACTIONS CONTINUES.

Propositions sur les diviseurs des nombres, sur les fractions et sur les racines des nombres entiers et fractionnaires.

219. THÉORÈME I[er]. — *Si un nombre* p *divise un produit* ab *de deux facteurs, et s'il est premier avec* a, *il divise* b (*).

Soit $a > p$, et supposons qu'on opère sur les nombres a et p comme si l'on voulait trouver leur plus grand commun diviseur; nommons q, q', etc., les quotients des divisions successives, et r, r', etc., les restes, on aura

$$a = pq + r, \quad p = rq' + r', \text{ etc.}$$

En multipliant ces égalités par b, et les divisant ensuite par p, il vient

$$\frac{ab}{p} = bq + \frac{rb}{p}, \quad b = \frac{br}{p} \times q' + \frac{r'b}{p}, \text{ etc.}$$

D'après la première égalité, puisque $\frac{ab}{p}$ est un nombre entier, il faut que $\frac{br}{p}$ soit aussi un nombre entier; d'après la deuxième égalité, $\frac{br}{p}$ étant un nombre entier, $\frac{br'}{p}$ doit être aussi un nombre entier; ainsi de suite. Or a et p étant premiers entre eux, l'un des restes r, r', etc., est égal à l'unité. Donc $\frac{b \times 1}{p}$ ou $\frac{b}{p}$ doit être un nombre entier.

(*) Cette proposition et quelques-unes de celles qui suivent sont démontrées dans les Traités d'Arithmétique; mais j'ai jugé à propos de les reproduire dans ce chapitre, afin de rendre sensible la liaison des principes, et de faire apprécier l'avantage que l'on trouve, pour la simplicité des démonstrations, dans l'emploi des notations et des règles de l'algèbre.

La démonstration ne changerait pas si l'on avait $a < p$.

Corollaire 1er. — Tout nombre premier p qui divise un produit $abcd$, divise un des facteurs de ce produit. Car, si p ne divise pas a, il est premier avec a, donc il doit diviser bcd. De même, si p ne divise pas b, il est premier avec b, donc il doit diviser cd. Enfin, si p ne divise pas c, il doit diviser d.

Corollaire II. — Tout nombre premier qui divise a^m divise aussi a, puisque $a^m = a \times a \times a \times$ etc.

Corollaire III. — Lorsqu'un nombre n est divisible par plusieurs nombres d, d', d'', etc., tels que chacun d'eux est premier avec tous les autres, le nombre n est divisible par le produit $dd'd''\ldots$. En effet, n étant divisible par d, on a $n = dq$, et q est un nombre entier. Puisque d' divise n, il doit diviser dq; or d' est premier avec d, donc il doit diviser q. Il suit de là que l'on a $q = d'q'$, q' étant un nombre entier; par conséquent $n = dd'q'$; le nombre n est donc divisible par dd'. En continuant ces raisonnements, on prouvera que n est divisible par $dd'd''\ldots$.

220. Théorème II. — *Un nombre* N *ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule manière.*

Soit $N = abcd\ldots$, les lettres a, b, c, d, etc., désignant des facteurs premiers égaux ou inégaux. Si l'on avait aussi $N = \alpha\beta\gamma\delta\ldots$, en désignant par α, β, γ, δ, etc., d'autres facteurs premiers, il en résulterait $abcd\ldots = \alpha\beta\gamma\delta\ldots$. D'après cette égalité, α divise le produit $abcd$, donc il divise un des facteurs: or tous ces facteurs sont premiers; par conséquent il faut que l'un d'eux soit égal à α. Supposons $a = \alpha$; en supprimant ces facteurs égaux, on obtiendra une nouvelle égalité au moyen de laquelle on prouvera que β doit être égal à l'un des facteurs b, c, d, etc.; ainsi de suite. Les facteurs des deux produits sont donc égaux chacun à chacun.

Corollaire 1er. — Supposons $N = a^n b^p c^q$, les facteurs a, b, c étant premiers, et les exposants n, p, q étant des nombres entiers positifs, il est évident que le nombre N aura pour diviseurs tous les produits qu'on pourra former avec les puissances des facteurs premiers a, b, c, marquées par les exposants depuis 0 jusqu'à n pour le premier facteur, depuis 0

jusqu'à p pour le deuxième, depuis o jusqu'à q pour le troisième; de plus, le nombre N n'aura pas d'autres diviseurs que ces produits, car, s'il en avait d'autres, il se décomposerait de plusieurs manières en facteurs premiers. Il suit de là que les diviseurs de N sont les termes qu'on obtiendra en formant le produit

$$(1+a+a^2+\ldots+a^n)(1+b+b^2+\ldots+b^p)(1+c+c^2+\ldots+c^q).$$

Ces termes sont tous différents, car il ne s'en trouve pas deux qui soient composés des mêmes facteurs premiers avec les mêmes exposants. Le nombre des diviseurs de N, en y comprenant l'unité et le nombre N, est donc

$$(n+1)(p+1)(q+1).$$

COROLLAIRE II. — La somme des diviseurs du nombre N est la valeur du produit ci-dessus; or $1+a+a^2\ldots+a^n$ est le quotient de $a^{n+1}-1$ par $a-1$ (n° 49); la somme des diviseurs de N est donc

$$\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{p+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{q+1}-1}{c-1}.$$

COROLLAIRE III. — Lorsque le nombre N est un carré, le nombre de ses diviseurs est impair; car les exposants n, p, q, etc., sont pairs; donc les nombres $n+1$, $p+1$, $q+1$, etc., sont impairs. Lorsque N n'est pas un carré, le nombre des diviseurs est impair; car un des exposants n, p, q, etc., est impair; donc un des facteurs $n+1$, $p+1$, etc., est pair. On parvient aux mêmes conclusions en remarquant que, si d est un diviseur de N plus petit que $\sqrt{N}$, le quotient de la division de N par d sera aussi un diviseur de N, et sera plus grand que $\sqrt{N}$. Il suit de là que, si la racine carrée de N n'est pas exacte, les diviseurs de N sont en nombre pair, puisque le nombre des diviseurs plus grands que $\sqrt{N}$ est égal à celui des diviseurs plus petits que $\sqrt{N}$. Si $\sqrt{N}$ est un nombre entier, ce nombre fait partie des diviseurs de N; par conséquent ils sont en nombre impair.

COROLLAIRE IV. — Si l'on voulait décomposer le nombre N

en deux facteurs, on pourrait prendre successivement, pour l'un des deux facteurs, chacun des diviseurs de N. Mais, si $N = dd'$, les deux diviseurs d et d' ne donnent qu'une seule décomposition; donc, lorsque le nombre N n'est pas un carré, le nombre des décompositions différentes de N en deux facteurs est la moitié du nombre des diviseurs, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(n+1)(p+1)(q+1)\ldots$ Quand N est un carré, on peut former ce nombre en multipliant sa racine par elle-même, et le nombre des décompositions est la moitié du nombre des diviseurs augmenté de 1.

Si les deux facteurs devaient être premiers entre eux, le nombre des décompositions ne dépendrait pas des exposants n, p, q, etc., et il serait le même que si l'on avait $N = abc\ldots$; il serait donc la moitié du produit $(1+1)(1+1)(1+1)\ldots$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\times 2^k$, ou 2^{k-1}, en nommant k le nombre des facteurs premiers différents de N.

Corollaire v.—D'après ce qui a été dit dans le corollaire 1er, les diviseurs communs à plusieurs nombres ne peuvent contenir que des facteurs premiers communs à ces nombres. Par conséquent, le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est le produit de tous les facteurs premiers, égaux ou inégaux, communs à ces nombres.

Corollaire vi. — Pour qu'un nombre soit divisible par plusieurs autres, il faut qu'il renferme tous les facteurs premiers égaux ou inégaux contenus dans chacun d'eux. Par conséquent, le plus petit nombre divisible par des nombres donnés est le produit des plus hautes puissances de tous les facteurs premiers différents qu'ils contiennent.

221. On peut obtenir le plus petit nombre entier divisible par des nombres donnés sans chercher leurs facteurs premiers. Soient a et b deux nombres, et d leur plus grand commun diviseur; on aura $a = a'd$, $b = b'd$, et les quotients a' et b' seront premiers entre eux. Soit A un nombre divisible par a; on aura $A = a'dq$, d'où $\frac{A}{b} = \frac{a'q}{b'}$; donc, pour que A soit aussi divisible par b, il faudra que b' divise $a'q$; et

puisque les nombres b' et a' sont premiers entre eux, b' devra diviser q. Il suit de là que A sera le plus petit nombre divisible par a et par b, si l'on pose $q = b'$, d'où $A = a'b'd$.

Pour trouver le plus petit nombre divisible par trois nombres a, b, c, on cherchera d'abord le plus petit nombre A divisible par a et b, et ensuite le plus petit nombre divisible par A et c. S'il y a plus de trois nombres, on agira de la même manière.

222. Théorème III. — *Pour qu'une fraction soit égale à une autre dont les deux termes sont premiers entre eux, il faut que les deux termes de la première soient respectivement égaux à ceux de la seconde multipliés par un même nombre entier.*

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux. Si l'on a $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, il en résultera $A = \frac{aB}{b}$; donc b divisera aB, et puisque b est premier avec a, il divisera B; on aura donc $B = bm$, en désignant par m un nombre entier; on en conclut $A = am$.

Corollaire Ier. — *Une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux est irréductible*; car, d'après le théorème précédent, elle ne peut être égale à aucun fraction exprimée avec des termes plus simples.

Corollaire II. — Pour que deux fractions irréductibles soient égales, il faut que les numérateurs soient égaux, ainsi que les dénominateurs.

223. Théorème IV. — *Les puissances d'un nombre fractionnaire ne peuvent être des nombres entiers.*

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction ou un nombre fractionnaire irréductible. La puissance $m^{ième}$ de ce nombre est $\frac{a^m}{b^m}$. Or a et b étant premiers entre eux, a^m et b^m sont aussi des nombres premiers entre eux; car, si un facteur premier divisait a^m et b^m, il devrait diviser a et b. Il est donc impossible que $\frac{a^m}{b^m}$ soit un nombre entier.

224. Théorème v. — *Pour qu'une fraction irréductible soit une puissance exacte du degré* m, *il faut que ses deux termes soient des puissances exactes de ce degré.*

Supposons qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ soit la puissance $m^{ième}$ d'une autre fraction irréductible $\frac{c}{d}$; on aura $\frac{a}{b} = \frac{c^m}{d^m}$. Or c et d étant premiers entre eux, les nombres c^m et d^m sont aussi premiers entre eux; la fraction $\frac{c^m}{d^m}$ est donc irréductible, et puisque $\frac{a}{b}$ est pareillement irréductible, il faut que l'on ait $a = c^m$ et $b = d^m$; ce qui démontre le théorème.

225. *Les nombres qui ne sont pas des puissances exactes ont des racines aussi approchées qu'on le veut.* Car, si un nombre A n'est pas une puissance exacte du degré m, en considérant une fraction $\frac{1}{p}$ de l'unité, aussi petite que l'on voudra, il existera deux multiples consécutifs de cette fraction, $\frac{a}{p}$, $\frac{a+1}{p}$, tels, que l'on aura $\left(\frac{a}{p}\right)^m < \text{A}$ et $\left(\frac{a+1}{p}\right)^m > \text{A}$; chacun de ces nombres $\frac{a}{p}$, $\frac{a+1}{p}$, sera la racine $m^{ième}$ de A à moins de $\frac{1}{p}$.

Notions sur les nombres incommensurables. — Propositions sur les puissances et les racines dont les degrés augmentent au delà de toute limite.

226. Quand deux grandeurs de la même espèce contiennent chacune exactement une troisième grandeur de cette espèce, celle-ci se nomme leur commune mesure. On dit, en outre, que deux grandeurs sont *commensurables* ou qu'elles sont *incommensurables*, suivant qu'elles ont ou qu'elles n'ont pas une commune mesure.

Si la commune mesure de deux grandeurs A et B est contenue m fois dans A et n fois dans B, *le rapport de* A *à* B

est le nombre $\frac{m}{n}$. Si la grandeur A est un multiple de l'autre grandeur B, et si elle la contient m fois, B est la commune mesure; et le rapport de A à B est le nombre entier m.

A défaut d'une commune mesure exacte, le rapport peut être connu approximativement, au moyen d'une partie aliquote quelconque de l'une des deux grandeurs, et en négligeant seulement une partie plus petite de l'autre. On obtiendra une approximation aussi grande que l'on voudra, en considérant des parties suffisamment petites.

227. Lorsque le rapport de deux grandeurs est déterminé par des conditions numériques, d'après lesquelles il ne peut être exprimé exactement par aucun nombre entier ou fractionnaire, comme lorsqu'il est $\sqrt{2}$, par exemple, les deux grandeurs sont incommensurables; puisque, si elles avaient une commune mesure, il en résulterait une expression numérique exacte du rapport.

On évalue toutes les grandeurs en les comparant à d'autres grandeurs déterminées, qui sont prises pour unités. Celles qui ont une commune mesure avec l'unité sont représentées par les nombres entiers et les fractions. Les autres donnent lieu aux nombres qu'on appelle *incommensurables* ou *irrationnels* (nº 150); ceux-ci comprennent, entre autres, toutes les racines des nombres qui ne sont pas des puissances exactes.

228. Toutes les opérations qui se font avec des nombres commensurables quelconques, s'étendent aux nombres incommensurables, sans exiger de nouvelles définitions; puisque les nombres incommensurables peuvent être remplacés par d'autres, commensurables, qui n'ont avec eux que des différences aussi petites qu'on le veut. Les théorèmes relatifs à ces opérations, qui sont employés pour établir les règles du calcul des monômes et des polynômes, subsistent également, et par la même raison, dans le cas de l'incommensurabilité des nombres. Ils peuvent donc être appliqués aux radicaux, comme on le voit dans le chapitre IV, pour ceux qui se rapportent aux puissances des produits et des quotients (nº 153).

229. Lemme 1er. — *Les puissances successives d'un nom-*

bre A plus grand que l'unité sont de plus en plus grandes, et elles croissent au delà de toute limite.

De ce que l'on a $A > 1$, on conclut $A^2 > A$, $A^3 > A^2, \ldots$, $A^{m+1} > A^m$.

En outre, si l'on pose $A - 1 = B$, on aura $A^2 - A > B$ et à fortiori $A^3 - A^2 > B, \ldots$, $A^m - A^{m-1} > B$. En ajoutant toutes ces relations on obtient $A^m - 1 > mB$ ou $A^m > 1 + mB$. Donc, pour que A^m surpasse une quantité donnée H, il suffira de prendre m de telle sorte que l'on ait $1 + mB > H$, ou $m > \frac{H-1}{B}$.

230. Lemme II. — *Les puissances successives d'un nombre* a *plus petit que l'unité sont de plus en plus petites, et elles s'approchent indéfiniment de zéro.*

De ce que l'on a $a < 1$, on conclut $a^2 < a$, $a^3 < a^2, \ldots$, $a^{m+1} < a^m$.

En outre, si l'on pose $A = \frac{1}{a}$, A sera plus grand que l'unité; on aura $a = \frac{1}{A}$, d'où $a^m = \frac{1}{A^m}$; donc, en désignant par h une quantité donnée aussi petite que l'on voudra, on satisfera à la condition $a^m < h$, si l'on satisfait à celle-ci, $\frac{1}{A^m} < h$, ou $A^m > \frac{1}{h}$. Or, d'après la proposition précédente, on peut toujours assigner une valeur de m qui satisfasse à la dernière condition.

231. Théorème IX. — *La racine du degré* m *d'un nombre diffère d'autant moins de l'unité que le degré* m *est plus grand, et l'on peut prendre* m *assez grand pour que cette racine diffère de l'unité d'une quantité aussi petite qu'on le veut.*

Considérons d'abord un nombre A plus grand que l'unité. Soient α la racine du degré m de A, et β la racine du degré $m+n$ du même nombre; les nombres α et β seront nécessairement plus grands que 1, et l'on aura $\alpha^m = \beta^{m+n} = \beta^m \times \beta^n$; donc $\alpha^m > \beta^m$; par conséquent $\alpha > \beta$.

Soit ε une quantité donnée aussi petite qu'on le voudra;

si l'on prend pour m une valeur telle, qu'on ait $(1+\varepsilon)^m > A$ (n° 229), la racine du degré m de A sera moindre que $1+\varepsilon$.

Considérons maintenant un nombre a moindre que l'unité. Soient α la racine du degré m de a, et β la racine du degré $m+n$ du même nombre; les nombres α et β seront plus petits que 1, et l'on aura $\alpha^m = \beta^{m+n} = \beta^m \times \beta^n$; donc $\alpha^m < \beta^m$; par conséquent $\alpha < \beta$.

Soit encore ε une quantité donnée aussi petite qu'on le voudra; si l'on prend pour m une valeur telle, qu'on ait $(1-\varepsilon)^m < a$ (n° 230), la racine du degré m de a sera plus grande que $1-\varepsilon$.

Continuation des propositions relatives aux diviseurs des nombres entiers.

232. Problème. — *Trouver la plus grande puissance d'un nombre premier θ, qui divise le produit $1.2.3\ldots n$.*

Soit n' la partie entière du quotient de la division de n par θ. Le produit $1.2.3\ldots n$ contient les facteurs θ, 2θ, $3\theta,\ldots, n'\theta$, et ces facteurs sont les seuls qui soient divisibles par θ. La plus haute puissance de θ qui divise le produit proposé, est donc la même que celle qui divise le produit $1.2.3\ldots n'\theta^{n'}$; on obtiendra donc l'exposant de cette puissance en ajoutant n' à l'exposant de la plus haute puissance de θ qui divisera le produit $1.2.3\ldots n'$. Si n' est plus grand que θ, soit n'' la partie entière du quotient de la division de n' par θ; on aura la plus haute puissance de θ qui divisera le produit $1.2.3\ldots n'$, en multipliant $\theta^{n''}$ par la plus haute puissance de θ qui divisera le produit $1.2.3\ldots n''$. Supposons qu'en nommant n''' la partie entière du quotient de n'' par θ, on ait $n''' < \theta$; le produit $1.2.3\ldots n'''$ ne sera pas divisible par θ, et la puissance demandée sera $\theta^{n'+n''+n'''}$.

Si l'on avait $n=\theta^m$, les nombres $n', n'',\ldots,$ seraient θ^{m-1}, $\theta^{m-2}\ldots 1$, et leur somme serait $\dfrac{\theta^m-1}{\theta-1}$, ou $\dfrac{n-1}{\theta-1}$.

233. Théorème iv. — *Soit* $\mathrm{m} =$ ou $> \mathrm{n}+\mathrm{p}+\mathrm{q}+$ etc., *le produit* $1.2.3\ldots \mathrm{n} \times 1.2\ldots\mathrm{p} \times 1.2\ldots\mathrm{q} \times$ etc., *est un diviseur de* $1.2.3\ldots\mathrm{m}$.

Il suffit de démontrer qu'un facteur premier quelconque θ, qui ne surpasse pas m, n'est pas contenu dans le premier produit à une puissance plus élevée que celle à laquelle il se trouve dans le second produit. Or soient m', n', p', q', etc., les parties entières des quotients de m, n, p, q, etc., divisés par θ; soient m'', n'', p'', q'', etc., les parties entières des quotients de m', n', p', q', etc., divisés par θ; et ainsi de suite. L'exposant de la plus haute puissance de θ qui divise $1.2.3\ldots m$ est $m' + m'' + m''' +$ etc.; l'exposant de la plus haute puissance de θ contenue dans le produit

$$1.2\ldots n \times 1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \ldots \times \text{etc.},$$

est

$$n' + n'' \ldots + p' + p'' \ldots + q' + q'' \ldots + \text{etc.}$$

Mais, puisque $m =$ ou $> n + p + q +$ etc., en divisant par θ, on a

$$\frac{m}{\theta} = \text{ ou } > \frac{n}{\theta} + \frac{p}{\theta} + \frac{q}{\theta} + \text{etc.},$$

et à fortiori, en ne prenant que les parties entières des quotients,

$$m' = \text{ ou } > n' + p' + q' + \text{etc.}$$

On conclut pareillement, de cette inégalité,

$$m'' = \text{ ou } > n'' + p'' + q'' + \text{etc.},$$

ainsi de suite. Donc, en ajoutant,

$$m' + m'' \ldots = \text{ou} > n' + n'' \ldots + p' + p'' \ldots + q' + q'' \ldots + \text{etc.}$$

234. Théorème v. — *Soit* p *un nombre premier avec* a; *si l'on divise par* p *les multiples successifs de* a *jusqu'à* (p—1) a, *les restes de ces divisions sont tous différents.*

Supposons que deux multiples ma et na, moindres que pa, divisés par p, donnent le même reste. En désignant les parties entières des quotients par q et q', on aura

$$ma = pq + r, \quad na = pq' + r'; \quad \text{d'où} \quad (m-n)a = p(q-q').$$

On conclut de là que p devrait diviser $(m-n)\,a$, et comme p est premier avec a, il faudrait que p divisât $m-n$; ce qui est impossible, puisque m et n sont moindres que p.

Remarque. Si l'on divise par p les multiples pa, $(p+1)a$, $(p+2)a$, etc., le premier pa donnera le reste zéro; et les suivants donneront les restes qu'on aura obtenus en divisant a, $2a$, etc., par p; de sorte que les restes se reproduiront périodiquement.

235. THÉORÈME VI. — p *étant un nombre premier qui ne divise pas* a, $a^{p-1}-1$ *est divisible par* p.

D'après la proposition précédente, si l'on divise par p les nombres a, $2a$, $3a \ldots (p-1)a$, les restes sont tous différents; ils sont moindres que p, et aucun d'eux n'est zéro, puisque p est premier avec a, et le multiplicateur de a est moindre que p. Donc ces restes sont tous les nombres depuis 1 jusqu'à $p-1$.

Considérons maintenant les égalités

$$a = pq_1 + r_1,\ 2a = pq_2 + r_2, \ldots, (p-1)a = pq_{p-1} + r_{p-1}.$$

Si l'on multiplie ces égalités membre à membre, le produit des seconds membres sera un multiple de p, augmenté du produit de tous les restes Or ce produit est celui des nombres de 1 à $p-1$. Donc

$$1.2.3\ldots(p-1)\,a^{p-1} = \mathrm{M}p + 1.2.3\ldots(p-1),$$

ou

$$1.2.3\ldots(p-1)\,(a^{p-1}-1) = \mathrm{M}p.$$

Il suit de la dernière égalité que p divise le produit $1.2.3\ldots(p-1)\,(a^{p-1}-1)$. Mais puisque p est premier, il est aussi premier avec chacun des nombres de 1 à $p-1$. Donc il divise $a^{p-1}-1$.

Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de Fermat*.

Lorsque p est premier avec a, sans être premier absolu, le théorème précédent doit être remplacé par celui-ci :

Si s *est le nombre des entiers plus petits que* p *et premiers avec lui,* p *divise* a^s-1.

On démontre ce théorème de la même manière que le précédent, en ne considérant que les multiples de a moindres que pa, et premiers avec p, et en remarquant que ces multiples

divisés par p donnent des restes qui sont aussi premiers avec p; car, d'après l'égalité $ma = pq + r$, si p et r avaient un facteur commun, ce facteur diviserait ma; donc p ne serait pas premier à la fois avec a et avec m. Il suit de cette observation que le produit des multiples de a moindres que pa, et premiers avec p, est un multiple de p, augmenté du produit de tous les multiplicateurs de a; puisque les restes, tous différents et premiers avec p, sont en même nombre que les multiplicateurs. Donc, en nommant R le produit des nombres premiers avec p et plus petits que p, on a $Ra^s = Mp + R$ ou $R(a^s - 1) = Mp$; d'où il résulte que p divise $a^s - 1$, puisqu'il est premier avec R, et il divise $R(a^s - 1)$. Ce dernier théorème comprend le précédent, comme cas particulier; car, lorsque p est premier, on a $s = p - 1$.

Il résulte aussi du second théorème que, lorsque a^{p-1} est la plus faible puissance de a dont la division par p donne le reste 1, p est premier.

Quand p n'est pas premier avec a, il n'existe aucune puissance de a qui, divisée par p, donne le reste 1; car, en supposant $a^m = pq + 1$, il s'ensuivrait que le facteur commun à a et p diviserait l'unité.

Remarque. Soit s' l'exposant de la plus faible puissance de a qui, divisée par p, donne le reste 1.

Les puissances de a inférieures à $a^{s'}$ donneront toutes des restes différents; car, en supposant $a^m = pq + r$, $a^n = pq' + r$, on en conclut $a^m - a^n = p(q - q')$ ou $a^n(a^{m-n} - 1) = p(q - q')$; p diviserait donc $a^n(a^{m-n} - 1)$. Mais puisque p est premier avec a, il est aussi premier avec a^n; donc p diviserait $a^{m-n} - 1$. Donc, si m et n étaient moindres que s', $a^{s'}$ ne serait pas la plus faible puissance de a conduisant au reste 1.

L'égalité $a^{s'} = pq + 1$ donne $a^{s'+1} = pqa + a$, par conséquent le reste de la division de $a^{s'+1}$ par p est le même que celui de la division de a par p. $a^{s'+2}$ donne le même reste que a^2; ainsi de suite. Donc, si l'on divise par p les puissances consécutives de a, les restes se reproduiront périodiquement.

Si s' est plus petit que s, en désignant, comme ci-dessus, par s, le nombre des entiers moindres que p et premiers avec p, s' sera un diviseur de s; car, d'après la périodicité des restes,

les seules puissances de a qui donneront le reste 1, seront $a^{s'}$, $a^{2s'}$, $a^{3s'}$, etc.

236. Problème. — *Trouver combien il y a de nombres entiers premiers avec un nombre donné* N, *et plus petits que ce nombre.*

Soit $N = aN'$, a étant un nombre premier, et N' un nombre qui peut être divisible par une puissance quelconque de a. Les nombres divisibles par a, dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, sont a, $2a$, $3a, \ldots, N'a$. Si on les exclut, les nombres qui restent sont premiers avec a, et il y en a un nombre égal à $N - N'$ ou $N'(a-1)$.

Soit $N = abN''$, a et b étant des facteurs premiers différents. La suite $1, 2, 3, \ldots, N$ contient des nombres qui sont premiers avec a sans être premiers avec b, d'autres qui sont premiers avec b sans être premiers avec a, et d'autres qui sont premiers avec ab. Suivant la formule précédente, les nombres premiers avec a sont en nombre égal à $N''b(a-1)$. Cherchons combien il se trouve dans ces nombres de multiples de b. Avant l'exclusion des multiples de a de la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, les multiples de b étaient b, $2b$, $3b, \ldots, N''ab$. Dans cette dernière suite, il y a autant de nombres premiers avec a qu'il s'en trouve dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N''a$; donc il y en a un nombre égal à $N''(a-1)$. En retranchant ce nombre de $N''b(a-1)$, on aura celui des nombres premiers avec le produit ab dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, lequel sera, par conséquent, $N''(a-1)(b-1)$.

Si $N = abcN'''$, on trouvera, par un raisonnement semblable, que le nombre des termes premiers avec abc, dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, sera $N'''(a-1)(b-1)(c-1)$. En effet, d'après la formule précédente, les nombres premiers avec ab, dans cette suite, sont en nombre égal à $N'''c(a-1)(b-1)$. Les multiples de c dans cette même suite sont c, $2c$, $3c, \ldots, N'''abc$; et ceux de ces multiples qui sont premiers avec ab, sont en nombre égal à celui des nombres premiers avec ab dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N'''ab$, lequel est $N'''(a-1)(b-1)$. On obtiendra donc le nombre des termes premiers avec abc de la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, en retranchant

$N'''(a-1)(b-1)$ de $N'''c(a-1)(b-1)$; ce qui donne $N'''(a-1)(b-1)(c-1)$.

S'il y avait un plus grand nombre de facteurs premiers, on obtiendrait une expression semblable aux précédentes.

Maintenant, supposons le nombre N décomposé en facteurs premiers, et soit $N=a^n b^p c^q\ldots$; le quotient de N par $abc\ldots$ sera $a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1}\ldots$. D'ailleurs les nombres premiers avec N seront aussi premiers avec $abc\ldots$, et les nombres premiers avec $abc\ldots$ seront premiers avec N. Donc le nombre des entiers premiers avec N, et moindres que N, sera

$$a^{n-1} b^{p-1} c^{q-1} (a-1)(b-1)(c-1).$$

Caractères de divisibilité des nombres par des diviseurs quelconques.

237. Soit N un nombre entier, écrit dans le système de numération dont la base est b. Concevons qu'on ait partagé ce nombre, en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, sauf la dernière qui pourra en avoir moins; et soient, en allant aussi de droite à gauche, A, B, C, D, ..., ces tranches considérées comme autant de nombres isolés; on aura

$$N = A + Bb^m + Cb^{2m} + Db^{3m} + \ldots.$$

On peut mettre cette expression du nombre N sous les trois formes suivantes :

$$\begin{aligned}
N &= b^m(B + Cb^m + Db^{2m} + \ldots) + A,\\
N &= [B(b^m-1) + C(b^{2m}-1) + D(b^{3m}-1) + \ldots]\\
&\quad + (A + B + C + D + \ldots),\\
N &= [B(b^m+1) + C(b^{2m}-1) + D(b^{3m}+1) + \ldots]\\
&\quad + (A + C + \ldots) - (B + D + \ldots).
\end{aligned}$$

Les premières parties de ces trois expressions de N sont respectivement divisibles par b^m, b^m-1, b^m+1 (n° 49); et de là résultent les conséquences ci-après :

1°. ***Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la*** m^ième^ ***puissance de la base du système, est le même que celui qu'on***

obtient en divisant sa première tranche de m *chiffres à droite par ce diviseur.*

2°. *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* m^{ième} *puissance de la base, diminuée d'une unité, est le même que celui qu'on obtient en divisant la somme des tranches de* m *chiffres par ce diviseur.*

3°. *Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre par un diviseur quelconque de la* m^{ième} *puissance de la base, augmentée d'une unité, est le même que celui qu'on obtient en divisant par le même diviseur la somme des tranches de* m *chiffres, de rang impair, moins la somme des tranches de* m *chiffres, de rang pair.*

Par conséquent, pour que la première division soit possible, il suffit, dans chaque cas, que la seconde, plus simple, se fasse exactement.

Lorsqu'on veut reconnaître, au moyen de ces règles, si un nombre N est divisible par un autre nombre p, il faut d'abord chercher quelle est la puissance de la base qui, divisée par p, donne pour reste o, 1 ou — 1.

Si le nombre p ne contient que des facteurs premiers de la base b, il y a une puissance de b exactement divisible par p; et l'on doit appliquer la première règle.

Lorsque le nombre p est premier avec la base, il existe une puissance de b qui, diminuée de 1, donne un nombre divisible par p (n° 235); de sorte qu'on peut appliquer la seconde règle.

Supposons que p soit un nombre premier, et soit b^m la plus faible puissance de b qui, diminuée de 1, donne un nombre divisible par p. Si m est un nombre pair $2n$, p divisera $b^n + 1$; car, puisque l'on a $b^{2n} - 1 = (b^n - 1)(b^n + 1)$, il faudra que p divise $b^n - 1$ ou $b^n + 1$, et, d'après l'hypothèse, il ne peut pas diviser $b^n - 1$.

Soit $p = 37$. En divisant les puissances successives de 10 par 37, on trouve que la troisième puissance, qui est 1000, donne le reste + 1; il en résulte que la divisibilité d'un nombre par 37 dépend de la divisibilité par 37 de la somme des tranches de trois chiffres.

Soit encore $p = 7$. La plus faible puissance de 10 qui, divisée par 7, donne pour reste $+1$, est 1 000 000; ainsi la divisibilité d'un nombre par 7 dépend de la divisibilité par 7 de la somme des tranches de six chiffres. Mais 1000 divisé par 7 donne pour reste -1 ; et il en résulte qu'on reconnaît aussi qu'un nombre est divisible par 7, quand la somme des tranches de trois chiffres, de rang impair, diminuée de la somme des tranches de trois chiffres, de rang pair, est divisible par 7.

Des fractions continues.

238. On appelle *fraction continue* une expression de cette forme :

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \text{etc.}}}}$$

En effectuant les calculs indiqués dans une semblable expression, on obtient pour résultat une fraction ordinaire qui est la valeur de la fraction continue. Soit, par exemple,

$$3 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{4}}};$$

on trouve successivement

$$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}, \quad \cfrac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{7}, \quad 5 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 5 + \frac{4}{7} = \frac{39}{7},$$

$$\cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{4}}} = \frac{14}{39}, \quad 3 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{4}}} = 3 + \frac{14}{39} = \frac{131}{39}.$$

Nous ne considérerons que les fractions continues dans lesquelles les numérateurs β, γ, δ, etc., sont égaux à l'unité, et

qui sont par conséquent de cette forme :

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

Nous supposerons, de plus, que a, b, c, d, etc., sont des nombres entiers positifs.

239. Les fractions continues de cette dernière forme se présentent toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires, ou des quantités irrationnelles, dont on peut avoir la valeur approchée à moins d'une unité. Supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque x, qui ne soit pas exprimable par un nombre entier. Si l'on cherche d'abord le nombre entier a qui approche le plus de la valeur de x, la différence $x-a$ sera une fraction plus petite que l'unité, qu'on pourra représenter par $\frac{1}{y}$, y étant un nombre plus grand que l'unité. Si l'on cherche de même le nombre entier b qui approche le plus de la valeur de y, la différence $y-b$ pourra être représentée par $\frac{1}{z}$, z étant un nombre plus grand que l'unité. En continuant ainsi, on aura

$$x=a+\frac{1}{y},\quad y=b+\frac{1}{z},\quad z=c+\frac{1}{u},\quad u=d+\frac{1}{v},\ \text{etc.};$$

d'où l'on conclut

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

Si, parmi les quantités y, z, u, v, etc., il s'en trouve une qui soit exprimée exactement par un nombre entier, la fraction continue se terminera. Dans le cas contraire, la fraction continue se prolongera indéfiniment.

240. Examinons le cas où la quantité qu'on veut mettre

en fraction continue est un nombre fractionnaire donné $\frac{A}{B}$, A et B étant des nombres entiers.

Le nombre entier qui approche le plus de cette quantité est le quotient de la division de A par B. Nommant a ce quotient et C le reste, on a

$$\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}=a+\frac{1}{\left(\frac{B}{C}\right)}.$$

Soient b le quotient de la division de B par C, et D le reste, on a

$$\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C}=b+\frac{1}{\left(\frac{C}{D}\right)}.$$

Sans que l'explication soit poussée plus loin, on conclut la règle suivante : *Pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue, il faut opérer sur les deux termes de cette fraction comme si l'on voulait trouver leur plus grand commun diviseur, en divisant d'abord le numérateur par le dénominateur. Si les quotients des divisions successives sont* a, b, c, d, *etc.* (*le premier quotient* a *pouvant être zéro*), *la fraction continue est*

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

On trouve par cette règle

$$\frac{1103}{887}=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}.$$

Comme la recherche du plus grand commun diviseur de

deux nombres conduit toujours à un reste nul, et par conséquent à un quotient qui est un nombre entier, *Toute quantité commensurable peut être exprimée par une fraction continue qui se termine.*

Réciproquement, *Toute fraction continue qui se termine est l'expression d'une quantité commensurable;* puisque l'on peut en obtenir exactement la valeur, exprimée par une fraction ordinaire.

Il suit de là qu'*Une quantité incommensurable ne peut donner qu'une fraction continue qui se prolonge indéfiniment.*

241. Pour montrer un exemple de la réduction d'une quantité irrationnelle en fraction continue, prenons l'expression

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}.$$

La racine carrée de 7 étant comprise entre 2 et 3, la quantité proposée est comprise entre $\frac{5}{2}$ et $\frac{6}{2}$; la partie entière de cette quantité est donc 2, et on peut poser

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}=2+\frac{1}{y}.$$

On conclut de là

$$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{7}-1}{2},\quad y=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{\sqrt{7}+1}{3}.$$

Puisque la racine carrée de 7 est comprise entre 2 et 3, la valeur de y est comprise entre $\frac{3}{3}$ et $\frac{4}{3}$; on posera donc

$$y=\frac{\sqrt{7}+1}{3}=1+\frac{1}{z}.$$

Cette relation donne

$$\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{7}-2}{3},\quad z=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\sqrt{7}+2.$$

En continuant de la même manière, on trouve

$$z=\sqrt{7}+2=4+\frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{u}=\sqrt{7}-2,\quad u=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}=1+\frac{1}{v},$$

$$\frac{1}{v}=\frac{\sqrt{7}-1}{3},\quad v=\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{2}=1+\frac{1}{t},$$

$$\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{7}-1}{2},\quad t=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{3},\quad \text{ou } t=y.$$

D'après ces calculs, le développement de $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ en fraction continue est

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}}}}$$

Cette fraction continue est périodique; car, à cause de $t=y$, les quatre dénominateurs 1, 4, 1, 1 se reproduiront indéfiniment, dans le même ordre.

242. Considérons la fraction continue littérale

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

On trouve, au moyen des règles relatives aux fractions,

$$a=\frac{a}{1},\quad a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{(abc+c+a)\,d+ab+1}{(bc+1)d+b},\ \text{etc.}$$

Les fractions

$$\frac{a}{1},\quad \frac{ab+1}{b},\quad \frac{(ab+1)c+a}{bc+1},\quad \frac{(abc+c+a)\,d+ab+1}{(bc+1)\,d+b},\ \text{etc.},$$

sont désignées sous le nom de *fractions convergentes* ou de *réduites*. Les fractions $\frac{a}{1}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, etc., sont nommées *fractions intégrantes*, et les quantités a, b, c, etc., sont appelées *quotients incomplets*. On verra bientôt la raison de ces différentes dénominations.

En examinant les réduites ci-dessus, on voit que, pour la troisième, *Le numérateur est le produit du numérateur de la réduite précédente par le dénominateur de la dernière fraction intégrante, augmenté du numérateur de la réduite qui précède de deux rangs; le dénominateur est pareillement le produit du dénominateur de la réduite précédente par le dénominateur de la dernière fraction intégrante, augmenté du dénominateur de la réduite qui précède de deux rangs.* On observe la même règle à l'égard de la quatrième réduite.

Pour démontrer que *cette règle s'applique généralement à toutes les réduites*, il suffit de faire voir que, si elle convient à trois réduites consécutives quelconques, elle convient aussi à la réduite suivante. A cet effet, considérons quatre réduites consécutives

$$\frac{P}{P'},\quad \frac{Q}{Q'},\quad \frac{R}{R'},\quad \frac{S}{S'}.$$

Nommons r le dénominateur de la dernière fraction intégrante comprise dans $\frac{R}{R'}$, s le dénominateur de la dernière fraction intégrante comprise dans $\frac{S}{S'}$, et supposons que l'on ait $R = Qr + P$, $R' = Q'r + P'$. La réduite $\frac{S}{S'}$ peut se déduire de $\frac{R}{R'}$ en y remplaçant r par $r + \frac{1}{s}$. On aura donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'} = \frac{s\,(Qr+P)+Q}{s\,(Q'r+P')+Q'} = \frac{Rs+Q}{R's+Q'}.$$

On voit par là que la réduite $\frac{S}{S'}$ se forme au moyen des réduites précédentes, suivant la règle énoncée ci-dessus.

Calculons, d'après cette règle, les réduites de la fraction continue

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

On forme d'abord les deux premières réduites, et les autres s'obtiennent ensuite comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 9 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{1}, & \frac{5}{4}, & \frac{46}{37}, & \frac{97}{78}, & \frac{143}{115}, & \frac{240}{193}, & \frac{1103}{887}. \end{array}$$

On écrit sur une même ligne les quotients incomplets successifs 9, 2, 1, 1, 4. On multiplie les deux termes 5 et 4 de la deuxième réduite par 9, et l'on ajoute respectivement aux produits les termes 1 et 1 de la première réduite; on a ainsi les deux termes 46 et 37 de la troisième réduite. On multiplie ces deux termes par 2, et l'on ajoute respectivement aux produits les deux termes 5 et 4 de la deuxième réduite; ce qui donne les deux termes 97 et 78 de la quatrième réduite. Ainsi de suite. La dernière réduite est la valeur exacte de la fraction continue.

Lorsque la fraction continue n'a pas de partie entière, on prend $\frac{0}{1}$ pour la première réduite.

243. *La valeur de la fraction continue est comprise entre deux réduites consécutives quelconques.*

Reportons-nous à la fraction continue littérale que nous avons considérée dans le numéro qui précède, et désignons par x la valeur de cette fraction continue. On voit immédiatement que la première réduite $\frac{a}{1}$ est plus petite que la quantité x,

puisqu'on néglige la quantité $\frac{1}{b+\text{etc.}}$. La deuxième réduite $a+\frac{1}{b}$ est plus grande que x, puisqu'on néglige une partie du dénominateur $b+\frac{1}{c+\text{etc.}}$. Le même raisonnement s'appliquerait aux réduites suivantes; mais on peut démontrer généralement la propriété énoncée, comme il suit.

En conservant les mêmes désignations que dans le n° **242** on a

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

Pour déduire la valeur de x de celle de $\frac{R'}{R}$, il suffirait de remplacer, dans l'expression de cette réduite, r par $r+\frac{1}{s+\text{etc.}}$. Nommons y cette dernière quantité, qui est toujours positive et plus grande que l'unité; on aura

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'},$$

d'où l'on conclut

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{(QP'-Q'P)y}{(Q'y+P')P'},\quad x-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{(Q'y+P')Q'}.$$

On voit par les deux dernières égalités que les deux différences $x-\frac{P}{P'}$, $x-\frac{Q}{Q'}$, sont des quantités de signes contraires; donc, si x est plus grand que $\frac{P}{P'}$, il sera moindre que $\frac{Q}{Q'}$; si, au contraire, x est plus petit que $\frac{P}{P'}$, il sera plus grand que $\frac{Q}{Q'}$. D'ailleurs, la première réduite $\frac{a}{1}$ est plus petite que x. Par conséquent, *Toutes les réduites de rang impair sont moindres que la valeur de la fraction continue, et toutes les réduites de rang pair sont plus grandes que cette valeur.*

244. La valeur absolue de la différence $x-\frac{Q}{Q'}$ est moin-

dre que celle de la différence $x - \frac{P}{P'}$, car y est plus grand que 1, et, d'après la règle du n° **242**, il est évident que Q' est plus grand que P'. Donc *chaque réduite approche plus de la fraction continue que la réduite précédente*. C'est cette propriété qui fait donner aux réduites le nom de *fractions convergentes*.

Il résulte des deux théorèmes ci-dessus, que les réduites de rang impair forment une suite croissante, et les réduites de rang pair forment une suite décroissante.

245. *La différence de deux réduites consécutives, exprimées suivant la règle du n° **242**, est égale à l'unité divisée par le produit des dénominateurs de ces deux réduites.*

Cette proposition se vérifie à l'égard des deux premières réduites, dont la différence est $\frac{ab+1}{b} - \frac{a}{1} = \frac{1}{b}$. Il suffit donc de prouver que, si elle est vraie pour deux réduites consécutives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, elle est également vraie pour la réduite $\frac{Q}{Q'}$ et la réduite suivante $\frac{R}{R'}$. Or

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'};\quad \text{donc}\quad \frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ'-P'Q}{Q'(Q'r+P')};$$

par hypothèse,

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \pm\frac{1}{P'Q'};\quad \text{d'où}\quad P'Q - PQ' = \pm 1;$$

donc

$$\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \mp\frac{1}{Q'R'},\quad \text{ou}\quad RQ' - QR' = \mp 1.$$

246. *Les réduites exprimées suivant la règle du n° **242** sont des fractions irréductibles.* Car, si les deux termes de la réduite $\frac{P}{P'}$ avaient un facteur commun, d'après l'égalité $P'Q - PQ' = \pm 1$, ce facteur commun diviserait l'unité. On voit, par la même égalité, que les numérateurs P et P' de

deux réduites consécutives, ou leurs dénominateurs Q et Q', sont premiers entre eux.

247. La valeur de la fraction continue étant comprise entre deux réduites consécutives quelconques $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, la différence entre cette valeur et la réduite $\frac{Q}{Q'}$ est moindre que la différence des fractions $\frac{R}{R'}$, $\frac{Q}{Q'}$. Or, on vient de voir que la valeur absolue de cette différence est $\frac{1}{R'Q'}$. Par conséquent, *L'erreur que l'on commet en prenant une réduite pour la valeur approchée de la fraction continue, est moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette réduite et de la réduite suivante.*

On peut obtenir une limite de l'erreur qui ne dépend pas du dénominateur de la réduite qui suit celle que l'on considère; car $R' = Q'r + P'$, et le quotient incomplet r n'est jamais moindre que l'unité; la fraction $\frac{1}{R'Q'}$ n'est donc pas plus grande que $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$; l'erreur est donc toujours moindre que cette dernière fraction.

On a $\frac{1}{Q'(Q'+P')} < \frac{1}{Q'^2}$; on peut donc prendre encore pour limite de l'erreur $\frac{1}{Q'^2}$. Cette dernière limite est quelquefois préférée, à cause de sa simplicité.

Soit $\frac{\alpha}{6}$ une fraction donnée; pour que la réduite $\frac{Q}{Q'}$ diffère de la fraction continue d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{6}$, il suffira que l'on ait $\frac{1}{Q'^2} < \frac{\alpha}{6}$ ou bien $Q' > \sqrt{\frac{6}{\alpha}}$, le signe $>$ n'excluant pas l'égalité.

On conclut de là que *L'on peut toujours obtenir exactement, ou avec autant d'approximation qu'on le veut, la valeur d'une quantité exprimée en fraction continue.* Car,

lorsque la fraction continue se termine, on peut en trouver la valeur exacte; et quand la fraction continue ne se termine pas, on parvient toujours à une réduite dont le dénominateur est assez grand pour que l'on obtienne l'approximation demandée, puisque les dénominateurs sont des nombres entiers qui vont toujours en augmentant (*).

248. Pour obtenir une limite moindre que l'erreur, il suffit de remarquer que, la valeur totale x de la fraction continue étant comprise entre les réduites $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{R}{R'}$, et différant moins de $\frac{R}{R'}$ que de $\frac{Q}{Q'}$ (nos 243 et 244), la différence de x et de $\frac{Q}{Q'}$ est plus grande que la moitié de la différence des deux réduites. Il suit de là que l'erreur que l'on commet en prenant la fraction $\frac{Q}{Q'}$ au lieu de x, est plus grande que $\frac{1}{2Q'R'}$.

249. Les limites de la différence entre la valeur de la fraction continue et une réduite $\frac{Q}{Q'}$ peuvent aussi se déduire de l'expression qu'on a formée dans le n° 243, pour représenter la valeur de la fraction continue.

En effet, puisque $x = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}$, il en résulte

$$x - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - QP'}{Q'(Q'y + P')}.$$

Or $PQ' - QP' = \pm 1$; et en désignant par r le dénomina-

(*) Quand une fraction continue peut être prolongée indéfiniment, les réduites tendent vers une limite fixe. Car, si l'on considère une réduite Z d'un rang aussi élevé qu'on le voudra, les réduites de rang impair qui précéderont Z, seront plus petites que Z et iront en croissant (nos 243 et 244); les réduites de rang pair, avant Z, seront plus grandes que Z et iront en décroissant. De plus, la réduite Z pouvant être prise aussi éloignée que l'on voudra, la différence de deux réduites consécutives antérieures à Z pourra devenir plus petite qu'une quantité quelconque donnée. La valeur d'une fraction continue qui ne se termine pas, est la limite vers laquelle tendent les réduites.

teur de la dernière fraction intégrante comprise dans la réduite qui suit $\frac{Q}{Q'}$, on a $y > r$ et $y < r + 1$. On conclut de là

$$x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'(Q'r + P')} \quad \text{ou} \quad x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'R'},$$

$$x - \frac{Q}{Q'} > \frac{1}{Q'(Q'r + Q' + P')} \quad \text{ou} \quad x - \frac{Q}{Q'} > \frac{1}{Q'(R' + Q')}.$$

250. *Une réduite quelconque exprime la valeur de la fraction continue plus exactement que toute fraction dont le dénominateur est moindre que celui de cette réduite.*

Nommons toujours x la valeur exacte de la fraction continue; et supposons qu'une fraction $\frac{m}{m'}$ approche plus de x qu'une réduite, $\frac{Q}{Q'}$. Il est clair que la proposition énoncée sera démontrée, si nous prouvons qu'on devra avoir $m' > Q'$.

Puisque la fraction $\frac{m}{m'}$ approche plus de x que $\frac{Q}{Q'}$, elle approchera aussi plus de x que la réduite précédente $\frac{P}{P'}$; et puisque la valeur de la fraction continue est comprise entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, il faudra, à fortiori, que la fraction $\frac{m}{m'}$ soit comprise entre ces réduites.

Il suit de là que la valeur absolue de la différence des fractions $\frac{P}{P'}$ et $\frac{m}{m'}$ sera moindre que la valeur absolue de la différence des deux réduites; de sorte que l'on aura

$$\frac{P}{P'} - \frac{m}{m'} < \frac{1}{P'Q'}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{Pm' - P'm}{P'm'} < \frac{1}{P'Q'};$$

donc

$$Pm' - P'm < \frac{m'}{Q'}.$$

Mais, P, P', m et m' étant des nombres entiers, $Pm' - P'm$ est au moins égal à 1. On doit donc avoir $m' > Q'$.

On peut aussi démontrer que l'on doit avoir $m > Q$. A cet effet, il faut remarquer que la fraction $\frac{m}{m'}$ étant comprise entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, la fraction $\frac{m'}{m}$ est comprise entre $\frac{P'}{P}$ et $\frac{Q'}{Q}$. La démonstration s'achève ensuite comme ci-dessus.

On prouve, d'une manière tout à fait semblable, que, si la fraction $\frac{m}{m'}$ approche plus de x qu'une réduite, et dans le même sens que cette réduite, les termes m et m' sont respectivement plus grands que ceux de la réduite suivante.

251. *Toute fraction continue périodique exprime l'une des racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont commensurables.*

Pour démontrer cette proposition d'une manière générale, supposons une fraction continue formée d'une partie non périodique qui comprend les fractions intégrantes $\frac{a}{1}, \frac{1}{b}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$, et d'une partie périodique composée des fractions intégrantes $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{1}{s}$, qui se reproduisent indéfiniment.

En représentant par y la valeur de la partie périodique, on a

$$(1) \qquad y = m + \cfrac{1}{n + \vdots + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \frac{1}{y}}}} \text{ (*)},$$

$$(2) \qquad x = a + \cfrac{1}{b + \vdots + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{l + \frac{1}{y}}}}.$$

(*) Si l'on désigne par y_{n-1} la valeur de la fraction continue composée de $n-1$ périodes, et par y_n la valeur de la fraction continue comprenant une

Soient $\frac{R}{R'}$ et $\frac{S}{S'}$ les deux réduites de la valeur de y qui correspondent aux deux fractions intégrantes $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{s}$, et soient $\frac{K}{K'}$ et $\frac{L}{L'}$ les deux réduites de la valeur de x qui correspondent aux deux fractions $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$. On aura

$$y = \frac{Sy + R}{S'y + R'}, \quad x = \frac{Ly + K}{L'y + K'}.$$

Or, en éliminant y entre ces deux équations, on parvient à une équation du second degré en x.

Au lieu de résoudre l'équation du second degré qui résulte de l'élimination de y, et qui donne deux valeurs de x, il est préférable de résoudre l'équation

$$y = \frac{Sy + R}{S'y + R'} \quad \text{ou} \quad S'y^2 + (R' - S)y - R = 0.$$

Le dernier terme de cette équation étant négatif, une des racines est négative; on ne devra prendre que la racine positive, et, au moyen de cette valeur de y, on obtiendra la valeur convenable de x.

On peut trouver, d'après les règles ordinaires, la signification de la valeur négative de y donnée par l'équation

$$S'y^2 + (R' - S)y - R = 0.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que la fraction conti-

---

période de plus, on a

$$y_n = m + \cfrac{1}{n + \vdots + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y_{n-1}}}}.$$

Quand n croît indéfiniment, y_{n-1} et y_n tendent vers la même limite, puisque pour $n = \infty$ les deux fractions continues que représentent y_{n-1} et y_n ont indéfiniment les mêmes réduites. Cette observation démontre l'exactitude de l'équation (1).

nue proposée soit celle-ci :

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{m + \text{etc.}}}}, \qquad \text{d'où} \quad y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{y}}}.$$

Si l'on représente la valeur négative de y par $-y'$, on aura

$$-y' = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}}}.$$

On déduit de là

$$y' + m = -\cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}}}, \quad \frac{1}{y'+m} = -n - \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}}, \quad n + \frac{1}{y'+m} = -\cfrac{1}{p - \cfrac{1}{y'}},$$

$$\cfrac{1}{n + \cfrac{1}{y'+m}} = -p + \frac{1}{y'}, \quad p + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{y'+m}} = \frac{1}{y'},$$

$$y' = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + y'}}}, \quad \text{ou bien} \quad y' = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \text{etc.}}}}}}.$$

Soit maintenant la fraction continue périodique mixte

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{m + \text{etc.}}}}}}.$$

En désignant par x' la valeur de x correspondante à la valeur négative de y, on a

$$x' = a + \cfrac{1}{b - p - \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}.$$

Supposons $b > p$, et posons $b - p = k$ et $z = n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}$,

on aura

$$k - \frac{1}{z} = k - 1 + \frac{z-1}{z} = k - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z-1}},$$

par conséquent

$$x' = a + \cfrac{1}{k - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{n - 1 + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}}.$$

Si l'on a $b < p$, on trouvera, en posant $p - b = k$,

$$x' = a - \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}}.$$

En opérant alors comme précédemment, on pourra ramener la valeur de x' à une fraction continue dont tous les termes seront positifs.

On ne peut pas avoir $b = p$, car la période commencerait alors à la fraction intégrante $\frac{1}{b}$.

Toute racine irrationnelle d'une équation du second degré dont les coefficients sont rationnels est représentée par une fraction continue périodique. Mais nous ne rapporterons pas la démonstration de cette proposition, pour laquelle on pourra consulter le *Traité de la résolution des équations numériques*, ou le tome Ier des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

252. On peut avoir à réduire en fraction continue une quantité irrationnelle dont on a la valeur exprimée en décimales. Si l'on demande, par exemple, quelles sont les fractions dont chacune donne la valeur du rapport de la circon-

férence au diamètre, avec plus d'approximation que toute fraction exprimée en termes moindres, il faudra trouver la valeur de π en fraction continue; d'après la proposition du n° 250, les réduites seront les fractions demandées. Or, en se bornant à sept décimales, la valeur de π est comprise entre 3,1415926 et 3,1415927. Il est naturel de penser que si l'on exprime chacun de ces deux nombres en fraction continue, les quotients incomplets communs aux deux fractions continues seront des quotients incomplets de π. Mais, pour qu'il ne reste aucun doute à cet égard, considérons généralement trois quantités u, v, x, telles que $u > x > v$. Supposons qu'on développe u et v en fractions continues et que l'on ait

$$u = a + \frac{1}{u'}, \quad u' = b + \frac{1}{u''}, \quad \text{etc.},$$

$$v = a + \frac{1}{v'}, \quad v' = b + \frac{1}{v''}, \quad \text{etc.};$$

il s'agit de prouver que l'on aura aussi

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad x' = b + \frac{1}{x''}, \quad \text{etc.}$$

Or, puisque x est compris entre u et v qui ont la même partie entière a, la partie entière de x est aussi a; de plus, la différence $x - a$ ou $\frac{1}{x'}$ est comprise entre $\frac{1}{u'}$ et $\frac{1}{v'}$; donc x' est compris entre u' et v'. De là on conclut que, puisque u' et v' ont la même partie entière b, la partie entière de x' est b, et la différence $x' - b$ ou $\frac{1}{x''}$ est aussi comprise entre u'' et v''. Les quotients incomplets communs de u et de v sont donc des quotients incomplets de x.

En faisant usage des valeurs ci-dessus de π, on obtient quatre quotients incomplets communs, qui sont 3, 7, 15, 1, et l'on a les réduites correspondantes

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}.$$

La deuxième réduite est le rapport d'Archimède; il est ap-

proché par excès, et l'erreur est comprise entre $\frac{1}{106 \times 7}$ ou $\frac{1}{742}$ et $\frac{1}{7(106+7)}$ ou $\frac{1}{791}$. La quatrième réduite est le rapport d'Adrien Metius; il est encore approché par excès. Le dénominateur de la réduite suivante, qu'on ne peut obtenir qu'en prenant la valeur de π avec un plus grand nombre de décimales, est 33102; il en résulte que l'erreur du rapport $\frac{355}{113}$ est comprise entre $\frac{1}{113 \times 33102}$ ou $\frac{1}{3740526}$ et $\frac{1}{113 \times (113+33102)}$ ou $\frac{1}{3753295}$.

CHAPITRE HUITIÈME.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

Résolution en nombres entiers de l'équation ax + by = c.

253. L'analyse indéterminée du premier degré a pour objet la recherche des solutions d'un problème du premier degré, dont les conditions ne donnent pas autant d'équations qu'il y a d'inconnues, et qui ne peut être résolu que par des valeurs des inconnues en nombres entiers positifs ou négatifs, ou seulement en nombres entiers positifs:

On appelle *solutions entières* les solutions qu'on obtient en n'admettant pour les inconnues que des nombres entiers.

254. Considérons l'équation générale du premier degré à deux inconnues

$$ax + by = c,$$

a, b, c étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

On peut supposer que les nombres a, b, c n'ont aucun facteur commun; car s'ils en avaient un, on le supprimerait, et l'équation serait ainsi ramenée à une autre plus simple, de la même forme. Cela posé, si les coefficients a et b ne sont pas premiers entre eux, l'équation n'admettra aucune solution entière. En effet, supposons que a et b aient un facteur commun m, on aura $a = a'm$, $b = b'm$, a' et b' étant des nombres entiers, et en divisant les deux membres de l'équation par m, on obtiendra

$$a'x + b'y = \frac{c}{m}.$$

Or, pour toutes les valeurs entières de x et de y, le premier membre de la dernière équation est un nombre entier, et puisque $\frac{c}{m}$ est une quantité fractionnaire, l'équation n'est pas vérifiée.

255. *Lorsque les coefficients* a *et* b *sont premiers entre eux, l'équation* $ax + by = c$ *a des solutions entières.*

En résolvant l'équation par rapport à x, on obtient

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Si l'on remplace successivement y par les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, a-1$, en effectuant, après chaque substitution, la division de $c - by$ par a, de manière que le reste soit positif (*), on aura a restes plus petits que a; tous ces restes seront différents; car, si deux valeurs différentes m et n de y, plus petites que a, donnaient des restes égaux, on aurait

$$c - bm = aq + r, \quad c - bn = aq' + r,$$

et il en résulterait

$$b(n - m) = a(q - q'), \quad \text{d'où} \quad \frac{b(n-m)}{a} = q - q';$$

il faudrait donc que $b(n - m)$ fût divisible par a, ce qui est impossible, puisque b est premier avec a, et m et n sont moindres que a.

Il suit de là qu'un des restes sera nul. Donc il existe une valeur entière de y, moindre que a, qui donne une valeur entière de x.

Les raisonnements seraient les mêmes pour l'équation $ax - by = c$; d'ailleurs les solutions de cette équation se déduisent de celles de l'équation $ax + by = c$, en changeant les signes des valeurs de y; donc, lorsque la dernière équation admet une solution entière, il en est de même de la première.

256. La proposition qui vient d'être établie peut aussi être démontrée au moyen des propriétés des fractions continues. Soit toujours l'équation

$$ax + by = c.$$

(*) Supposons qu'une des valeurs de $c - by$ soit négative, et représentons-la par $-p$. Si la division de p par a, faite suivant l'usage ordinaire, donne le reste r, en augmentant le quotient d'une unité, le reste sera $r - a$; il sera négatif, et sa valeur absolue sera plus petite que a. La division de $-p$ par a, en prenant le même quotient, donnera le reste positif $a - r$.

Supposons qu'on réduise $\frac{b}{a}$ en fraction continue, et représentons par $\frac{p}{q}$ l'avant-dernière réduite. Si cette réduite est de rang pair, on aura

$$ap - bq = +1, \quad \text{d'où} \quad apc - bqc = +c.$$

La dernière égalité prouve qu'on satisfera à l'équation en prenant $x = pc$, $y = -qc$.

Si la réduite $\frac{p}{q}$ est de rang impair, on aura

$$ap - bq = -1, \quad \text{d'où} \quad -apc + bqc = +c.$$

On vérifiera donc l'équation en prenant $x = -pc$, $y = qc$.

257. *Quand on connaît une solution entière de l'équation* ax + by = c, *on peut en obtenir une infinité d'autres.*

Soit $x = \alpha$, $y = 6$, la solution connue, on devra avoir $a\alpha + b6 = c$, et, en retranchant cette égalité de l'équation $ax + by = c$, il viendra

$$a(x - \alpha) = b(6 - y).$$

Pour que cette dernière équation soit vérifiée par des valeurs entières de x et de y, il faut que b divise le produit $a(x - \alpha)$; et, puisque b est premier avec a, il doit diviser $x - \alpha$. Il faut donc qu'on ait $x - \alpha = bt$, t désignant un nombre entier positif ou négatif. En remplaçant, dans l'équation ci-dessus, $x - \alpha$ par bt, on obtient $6 - y = at$. On doit donc avoir

$$x = \alpha + bt, \quad y = 6 - at.$$

L'indéterminée t pourra recevoir toutes les valeurs que l'on voudra, en nombres entiers positifs ou négatifs; et, pour chacune de ces valeurs, les valeurs de x et de y formeront une solution entière de l'équation proposée.

En donnant successivement à t les valeurs 0, 1, 2, etc., -1, -2, -3, etc., on obtiendra pour x les différents termes d'une progression arithmétique dont la raison sera le

coefficient de y; et les valeurs de y formeront une progression arithmétique dont la raison sera le coefficient de x (*).

258. On peut trouver les solutions entières d'une équation à deux inconnues, par une méthode indépendante des propositions précédentes. Soit l'équation

$$24x + 65y = 243. \tag{1}$$

En la résolvant par rapport à l'inconnue x qui a le plus petit coefficient, et en extrayant les entiers contenus dans la valeur de x, on trouve

$$x = \frac{243 - 65y}{24} = 10 - 2y + \frac{3 - 17y}{24}.$$

Pour qu'une valeur entière de y détermine une valeur entière de x, il faut et il suffit que $\frac{3 - 17y}{24}$ soit un nombre entier. Désignons par t ce nombre entier indéterminé, on aura

$$\frac{3 - 17y}{24} = t, \tag{2}$$

et

$$x = 10 - 2y + t. \tag{3}$$

La recherche des solutions entières de l'équation (1) est ainsi ramenée à celle des solutions entières de l'équation (2), dans

(*) M. Binet a indiqué le moyen suivant de représenter toutes les solutions entières de l'équation (1) $ax + by = c$ (*Journal de l'École Polytechnique*, 20e cahier). Il suffit d'avoir une solution entière de l'équation (2) $ax + by = 1$; car on en conclura une solution entière de l'équation (1), en multipliant les valeurs de x et de y par c. Or on déduit de l'équation (2), $x = \frac{1 - by}{a}$. Il faut donc trouver une valeur de y qui rende $by - 1$ divisible par a. Mais a étant premier avec b, si k est le nombre des entiers premiers avec a et moindres que a, $b^k - 1$ est divisible par a (n° 235); donc, en prenant $y = b^{k-1}$, on aura une valeur entière de x. Il résulte de là que les solutions entières de l'équation (1) pourront être représentées par les deux formules

$$y = cb^{k-1} + at, \quad x = -c\,\frac{b^k - 1}{a} - bt.$$

Si a est un nombre premier, on devra remplacer k par $a - 1$.

laquelle les coefficients des inconnues sont plus simples. On voit d'ailleurs qu'on ne peut obtenir une semblable réduction qu'en résolvant l'équation par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient.

En opérant sur l'équation (2) comme on a opéré sur la proposée, on trouve

$$y=\frac{3-24t'}{17}=-t+\frac{3-73t}{17}.$$

Il faut donc que $\frac{3-7t}{17}$ soit un nombre entier. En désignant ce nombre entier par t', il vient

$$(4)\qquad \frac{3-7t}{17}=t',$$

$$(5)\qquad y=-t+t'.$$

La recherche des solutions entières de l'équation (2) est ainsi ramenée à celle des solutions entières de l'équation (4).

En continuant les calculs de la même manière, il vient d'abord

$$t=\frac{3-17t'}{7}=-2t'+\frac{3-3t'}{7},$$

$$(6)\qquad \frac{3-3t'}{7}=t'',$$

$$(7)\qquad t=-2t'+t''.$$

On a ensuite

$$t'=\frac{3-7t''}{3}=1-2t''-\frac{t''}{3},$$

$$(8)\qquad \frac{t''}{3}=t''',$$

$$(9)\qquad t'=1-2t''-t'''.$$

L'équation (8) donne

$$(10)\qquad t''=3t'''.$$

Le coefficient de t'' dans l'équation (10) étant l'unité, on pourra attribuer à t''' une valeur entière quelconque, positive ou négative; on en déduira une valeur entière de t''; on

trouvera ensuite, au moyen des équations (9), (7), (5) et (3), les valeurs de t', t, y et x, qui seront toutes des nombres entiers.

Au lieu de calculer successivement, d'après chaque valeur de t''', les valeurs des indéterminées t'', t', t, pour parvenir à celles de y et de x, il est préférable d'exprimer y et x au moyen de la dernière indéterminée t'''. En substituant la valeur $3t'''$ de t'' dans l'équation (9), on trouve $t' = 1 - 7t'''$. Substituant cette valeur de t' et la valeur de t'' dans l'équation (7), on obtient $t = -2 + 17t'''$. Substituant de même la valeur de t et celle de t' dans l'équation (5), on trouve $y = 3 - 24t'''$. Enfin on obtient de la même manière $x = 2 + 65t'''$. Les différents systèmes de valeurs de x et de y se déduiront immédiatement des deux dernières formules, en attribuant à l'indéterminée t''' des valeurs entières quelconques, positives ou négatives.

259. Le procédé que nous venons d'employer fait reconnaître que, toutes les fois que les coefficients des inconnues dans l'équation proposée sont premiers entre eux, l'équation admet des solutions entières. Car on opère sur les coefficients des inconnues comme si l'on voulait trouver leur plus grand commun diviseur, et les coefficients des indéterminées, dans les équations successives auxquelles on est conduit, sont les restes successifs fournis par cette opération; or un de ces restes est nécessairement égal à l'unité : on fait donc toujours dépendre la recherche des solutions demandées de celle des solutions entières d'une dernière équation dans laquelle la pénultième indéterminée a pour coefficient l'unité; de sorte que, pour obtenir une valeur entière de cette pénultième indéterminée, il suffit d'attribuer une valeur entière à la dernière.

260. Les calculs ci-dessus sont susceptibles de plusieurs abréviations. Reprenons l'équation précédente, résolue par rapport à x,

$$x = \frac{243 - 65y}{24}.$$

Au lieu de prendre 2 pour le quotient en nombre entier de

65 par 24, ce qui donne le reste 17, on peut prendre 3 pour quotient; le reste est alors -7, et il vient

$$x = 10 - 3y + \frac{3+7y}{24}.$$

En posant $\frac{3+7y}{24} = t$, on trouve

$$y = \frac{24t-3}{7} = 3t + \frac{3t-3}{7}.$$

L'expression $\frac{3t-3}{7}$ doit être un nombre entier; or cette expression revient à $\frac{3(t-1)}{7}$, et, puisque les nombres 3 et 7 sont premiers entre eux, il faut que $t-1$ soit divisible par 7. Il suffit donc de poser $\frac{t-1}{7} = t'$; d'où $t = 7t' + 1$.

En calculant les valeurs de x et de y, exprimées en fonction de t', d'après les relations $x = 10 - 3y + t$, $y = 3t + 3t'$, $t = 7t' + 1$, on trouve $y = 3 + 24t'$, $x = 2 - 65t'$. Les deux dernières formules s'accordent avec celles que nous avons obtenues dans le numéro précédent, puisque les indéterminées t' et t'''' peuvent recevoir indifféremment des valeurs positives et des valeurs négatives.

On peut encore rendre les calculs plus simples; car, lorsqu'on a obtenu $x = 10 - 3y + \frac{3+7y}{24}$, on voit que, si l'on augmente de 1 le quotient de la division de 243 par 24, le reste sera -21; la partie fractionnaire de la valeur de y sera donc $\frac{7y-21}{24}$, ou $\frac{7(y-3)}{24}$; et, comme 24 est premier avec 7, il faudra que $y-3$ soit divisible par 24. De cette manière, on trouve immédiatement $y - 3 = 24t$; d'où $y = 3 + 24t$, et $x = 11 - 3y + 7t = 2 - 65t$.

261. Nous avons considéré jusqu'à présent toutes les solutions en nombres entiers, positifs ou négatifs; nous allons examiner le cas où l'on ne veut admettre que des solutions positives.

Reprenons l'équation $ax + by = c$. On peut supposer le terme c positif; car, s'il était négatif, on le rendrait positif en changeant les signes des deux membres. De cette manière, tous les cas que peuvent présenter les signes des termes sont renfermés dans les quatre équations :

$$ax + by = c, \qquad ax - by = c,$$
$$-ax + by = c, \qquad -ax - by = c,$$

a, b, c étant positifs.

La troisième équation ne diffère pas de la deuxième, et la quatrième ne peut pas avoir de solution positive; il suffit donc de considérer les deux premières.

On a vu que, si l'on représente par α et β deux nombres entiers satisfaisant à l'égalité $a\alpha + b\beta = c$, toutes les solutions entières de l'équation $ax + by = c$ sont comprises dans les formules

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at \quad (\text{n}^{\text{o}}\ 257).$$

Pour que les valeurs de x et de y soient positives, il faut que l'on ait

$$\alpha + bt > 0, \quad \beta - at > 0; \quad \text{d'où} \quad t > -\frac{\alpha}{b}, \quad t < \frac{\beta}{a}.$$

D'après ces inégalités, le nombre des solutions entières positives sera limité; cette conclusion était d'ailleurs manifeste par l'inspection de l'équation. Quand il n'y aura aucun nombre entier compris entre les deux nombres $-\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{a}$, l'équation ne pourra être vérifiée par aucun système de valeurs entières positives. Les inégalités $t > -\frac{\alpha}{b}$ et $t < \frac{\beta}{a}$ ne sont jamais contradictoires; car, de l'égalité $a\alpha + b\beta = c$, on conclut, puisque c est positif, $a\alpha + b\beta > 0$; par conséquent, $b\beta > -a\alpha$, et $\frac{\beta}{a} > -\frac{\alpha}{b}$.

Si l'on représente par A et B les deux nombres entiers positifs ou négatifs, respectivement inférieurs de moins d'une unité à $-\frac{\alpha}{b}$ et à $\frac{\beta}{a}$, les valeurs de t comprises entre $-\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{a}$ se-

ront $A+1$, $A+2, \ldots, B$; et le nombre des solutions entières et positives sera $B-A$. Mais la différence des fractions $\frac{\beta}{a}$ et $-\frac{\alpha}{b}$ est $\frac{b\beta+a\alpha}{ab}$ ou $\frac{c}{ab}$; par conséquent, si l'on désigne par q la partie entière du quotient de c par ab, la différence $B-A$ sera égale à q ou à $q+1$. Le nombre des solutions entières positives de l'équation sera donc q ou $q+1$.

L'équation $ax-by=c$ se déduit de la précédente par le changement de y en $-y$, et, en effectuant le même changement dans les valeurs ci-dessus de x et de y, on a

$$x=\alpha+bt, \quad y=-\beta+at.$$

Pour obtenir des solutions positives, il faudra prendre t de telle sorte que l'on ait $t>-\frac{\alpha}{b}$ et $t>\frac{\beta}{a}$. Or il existe un nombre infini de valeurs entières de t qui satisfont à ces deux conditions; car il suffit, pour qu'elles soient vérifiées l'une et l'autre, que t soit plus grand que la plus grande des deux quantités $-\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{a}$. Le nombre des solutions entières positives de l'équation est donc infini.

Résolution en nombres entiers d'un système quelconque d'équations du premier degré, dans lequel le nombre des inconnues surpasse celui des équations.

262. Soient les deux équations générales

$$(1) \qquad ax+by+cz=d,$$
$$(2) \qquad a'x+b'y+c'z=d'.$$

En éliminant une des inconnues, z par exemple, on obtient l'équation

$$(3) \qquad (ac'-ca')x+(bc'-cb')y=dc'-cd';$$

le système des équations (1) et (2) se trouve alors remplacé par celui des équations (1) et (3).

Si l'équation (3) admet des solutions entières, on déduira de cette équation les valeurs de x et de y exprimées par des fonctions entières d'une indéterminée t; et la question sera

réduite à trouver les valeurs entières de t pour lesquelles les valeurs de x et de y seront telles, qu'en les substituant dans l'équation (1) on obtienne une valeur entière de z. A cet effet on substituera dans l'équation (1) les valeurs de x et de y en fonctions de t, ce qui donnera une équation de la forme $mt + cz = k$. Si cette équation admet des solutions entières, elle conduira à des formules par lesquelles z et t seront exprimées au moyen d'une indéterminée t'; et en substituant la valeur de t en fonction de t' dans les valeurs de x et de y déduites de l'équation (3), on aura les trois inconnues x, y, z, exprimées en fonctions entières de l'indéterminée t'.

Lorsque les coefficients c et c' sont premiers entre eux, si l'équation (3) admet des solutions entières, le système des équations (1) et (2) en admet aussi; et, dans ce cas, chaque couple de valeurs entières de x et de y qui vérifient l'équation (3) donne, dans l'équation (1), une valeur entière de z. En effet, l'équation (3) peut s'écrire

$$c'(d - ax - by) = c(d' - a'x - b'y);$$

si x et y sont des nombres entiers, puisque, par hypothèse, c et c' sont premiers entre eux, c devra diviser $d - ax - by$; par conséquent, la valeur de z, dans l'équation (1), sera entière.

Il suit de là que, dans le cas où c et c' sont premiers entre eux, lorsque l'on aura obtenu, au moyen de l'équation (3), les valeurs de x et de y exprimées en fonctions entières de t, la substitution de ces valeurs dans l'équation (1) conduira à une équation qui donnera immédiatement une valeur de z en fonction entière de t.

263. Proposons-nous de trouver les solutions entières des trois équations

$$\begin{aligned} 13x + 5y - 2z + 4u &= 2559, \\ 8x + 7y + 3z - 5u &= 1595, \\ 11x - 3y + 5z - 7u &= 2157. \end{aligned}$$

En éliminant u entre la première équation et chacune des deux autres, on obtient

$$97x + 53y + 2z = 19175, \quad 135x + 23y + 6z = 26541.$$

L'observation qui vient d'être faite pourrait faire croire qu'on doit éliminer de préférence, entre ces deux équations, l'une des inconnues x et y, dont les coefficients sont premiers entre eux; mais les calculs sont plus simples en éliminant z, ce qui conduit à l'équation

$$39x + 34y = 7746.$$

Le système proposé se trouve ainsi remplacé par le suivant :

$$\begin{aligned} 13x + 5y - 2z + 4u &= 2559, \\ 97x + 53y + 2z &= 19175, \\ 39x + 34y &= 7746. \end{aligned}$$

On cherche les formules qui donnent les solutions entières de l'équation $39x + 34y = 7746$. Le coefficient de x admettant le facteur 3 qui divise 7746, et le coefficient de y admettant le facteur 2 qui divise aussi 7746, on peut abréger les calculs en posant $x = 2x'$, $y = 3y'$; l'équation devient

$$13x' + 17y' = 1291.$$

On conclut de celle-ci

$$y' = 1 + 13t, \quad x' = 98 - 17t;$$

par suite,

$$y = 3 + 39t, \quad x = 196 - 34t.$$

On substitue dans l'équation $97x + 53y + 2z = 19175$, les valeurs de x et de y exprimées en fonctions de l'indéterminée t, ce qui donne $1231t - 2z = -4$. On déduit de cette équation, en exprimant z et t au moyen d'une seconde indéterminée, $t = 2t'$, $z = 1231t' + 2$; et en remplaçant t par $2t'$ dans les valeurs précédentes de x et de y, on a $y = 3 + 78t'$, $x = 196 - 68t'$.

On substitue dans l'équation $13x + 5y - 2z + 4u = 2559$, les valeurs de x, y, z, exprimées en fonctions de l'indéterminée t', ce qui donne $739t' - u = 0$, d'où $u = 739t'$. La valeur de u en fonction de t' étant entière, les calculs sont terminés, et les formules qui déterminent les solutions entières du système proposé sont

$$x = 196 - 68t', \quad y = 3 + 78t', \quad z = 2 + 1231t', \quad u = 739t'.$$

Si l'on ne veut admettre que des solutions positives, il faudra que t' soit positif et moindre que $\frac{196}{68}$ ou $2\frac{15}{17}$. On obtiendra ainsi trois solutions, savoir :

pour $t'=0$, $x=196$, $y=3$, $z=2$, $u=0$;
pour $t'=1$, $x=128$, $y=81$, $z=1233$, $u=739$;
pour $t'=2$, $x=60$, $y=159$, $z=2464$, $u=1478$.

264. Considérons maintenant le cas où l'on n'a qu'une seule équation qui renferme plus de deux inconnues. Soit, par exemple, l'équation

$$15x+6y+20z=171.$$

En résolvant cette équation par rapport à l'inconnue y, qui a le plus petit coefficient, on obtient

$$y=\frac{171-15x-20z}{6}=28-2x-3z+\frac{3-3x-2z}{6}.$$

Pour que la valeur de y soit entière, x et z étant des nombres entiers, il faut que la quantité $\frac{3-3x-2z}{6}$ ait une valeur entière. En représentant cette valeur par t, on a l'équation

$$\frac{3-3x-2z}{6}=t, \quad \text{ou} \quad 2z+3x+6t=3.$$

Il ne s'agit plus que de trouver les solutions entières de cette équation, qui est plus simple que la précédente, puisque le coefficient qui était le plus petit est maintenant le plus grand.

En résolvant l'équation $2z+3x+6t=3$, par rapport à l'inconnue z qui a le plus petit coefficient, on obtient

$$z=\frac{3-3x-6t}{2}=1-x-3t+\frac{1-x}{2}.$$

Pour que la valeur de z soit entière, x et t étant des nombres entiers, il faut que $\frac{1-x}{2}$ ait une valeur entière. En représentant cette valeur par t', on a l'équation

$$\frac{1-x}{2}=t', \quad \text{d'où} \quad x=1-2t'.$$

On pourra attribuer à t' une valeur entière quelconque, et les valeurs correspondantes de x, z et y seront aussi entières.

En substituant la valeur de x dans celle de z, on trouve

$$z = 3t' - 3t;$$

et en substituant les valeurs de x et de z dans celle de y, on obtient

$$y = 26 - 5t' + 10t.$$

On aura toutes les solutions entières de l'équation proposée en attribuant aux indéterminées t et t' toutes les valeurs entières, positives et négatives, dans les formules

$$x = 1 - 2t', \quad z = 3t' - 3t, \quad y = 26 - 5t' + 10t.$$

Pour s'assurer de l'exactitude des opérations, il faut substituer les valeurs de x, z, y, en fonction des indéterminées t et t', dans l'équation proposée; cette équation devra être satisfaite quels que soient t et t'. On peut aussi opérer la vérification en éliminant les indéterminées t et t', entre les trois équations par lesquelles x, y et z sont exprimées en fonction de t et t'; on devra retrouver l'équation proposée.

Si l'on ne veut admettre que des valeurs positives de x, y, z, il faudra que l'on ait

$$1 - 2t' > 0, \quad 3t' - 3t > 0, \quad 26 - 5t' + 10t > 0.$$

La première condition revient à $t' < \frac{1}{2}$; les deux autres donnent

$$t < t', \quad t > \frac{5t' - 26}{10}.$$

Il faut donc que

$$t' > \frac{5t' - 26}{10}, \quad \text{d'où} \quad t' > -\frac{26}{5}.$$

D'après les deux conditions $t' > -\frac{26}{5}$ et $t' < \frac{1}{2}$, on ne peut donner à t' que les valeurs $-5, -4, -3, -2, -1, 0$.

Pour $t' = -5$, on doit avoir $t > -\frac{51}{10}$ et $t < -5$, ce qui permet seulement de prendre $t = -5$; d'où résultera $z = 0$.

Pour $t' = -4$, on doit avoir $t > -\frac{46}{10}$ et $t < -4$, ce qui permet de prendre $t = -4$.

Pour $t' = -3$, on doit avoir $t > -\frac{41}{10}$ et $t < -3$; par conséquent $t = -4, = -3$.

Pour $t' = -2$, on doit avoir $t > -\frac{36}{10}$ et $t < -2$; par conséquent $t = -3, = -2$.

Pour $t' = -1$, on doit avoir $t > -\frac{31}{10}$ et $t < -1$; par conséquent $t = -3, = -2, = -1$.

Pour $t' = 0$, on doit avoir $t > -\frac{26}{10}$ et $t < 0$; par conséquent $t = -2, = -1, = 0$.

Il y aura donc douze solutions entières positives; on en aurait seulement six si l'on excluait celles dans lesquelles $z = 0$.

265. Quel que soit le nombre des inconnues, dans une équation du premier degré, on reconnaît, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait dans le n° **254**, que, lorsqu'on a supprimé les facteurs communs à tous les coefficients et à la quantité connue, pour que l'équation admette des solutions entières, il faut que les coefficients soient premiers entre eux.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, soit l'équation

$$ax + by + cz + \ldots = k;$$

et supposons que a soit le plus petit coefficient.

En résolvant l'équation par rapport à x, on aura une valeur qui se composera d'une partie entière, et d'une partie fractionnaire dans laquelle les coefficients des inconnues y, z, etc., seront les restes que donneront les nombres b, c, etc., divisés par a; de sorte qu'ils seront moindres que a. Nommons ces restes b', c', etc.; en égalant cette partie fractionnaire à un nombre entier indéterminé, on aura l'équation

$$b'y + c'z \ldots + at = k'.$$

Les coefficients b', $c' \ldots a$ seront encore premiers entre eux;

car b', c', etc., étant les restes que donnent b, c, etc., divisés par a, tout nombre qui diviserait a, b', c', etc., diviserait a, b, c, etc.

En opérant sur la seconde équation de la même manière que sur la première, on en obtiendra une nouvelle, dans laquelle les coefficients des inconnues seront le plus petit des nombres b', c',... a, et les restes que donneront les autres divisés par ce plus petit coefficient; ces coefficients seront encore premiers entre eux.

Il suit de là que les calculs amèneront nécessairement une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues sera l'unité; puisque, tant que le plus petit coefficient ne sera pas l'unité, il ne divisera pas tous les autres coefficients; et on fera dépendre la résolution de l'équation, en nombres entiers, de celle d'une autre équation avec des coefficients moindres. Mais, lorsqu'on sera parvenu à une équation dans laquelle un des coefficients sera l'unité, on aura la valeur d'une inconnue en fonction entière de toutes les autres inconnues de cette équation; et on en conclura, pour toutes les autres inconnues des équations successives, y compris l'équation proposée, des valeurs qui seront des fonctions entières des mêmes quantités.

Il est manifeste que le nombre des quantités pour lesquelles on pourra prendre des nombres entiers quelconques, sera toujours égal à celui des inconnues de l'équation proposée, moins une.

Résolution en nombres entiers d'une équation du second degré à deux inconnues qui ne contient que la première puissance d'une des inconnues.

266. Les questions d'analyse indéterminée qui dépendent des équations d'un degré supérieur au premier, ne doivent pas trouver place dans ce Traité; mais, lorsqu'une équation du second degré à deux inconnues ne renferme pas la seconde puissance d'une de ces inconnues, la recherche des solutions entières de cette équation peut être regardée comme une question d'analyse indéterminée du premier degré.

Considérons l'équation générale

$$(1) \qquad mxy + nx^2 + px + qy + r = 0.$$

En la résolvant par rapport à y, on a

$$(2) \qquad y = -\frac{nx^2 + px + r}{mx + q},$$

et en effectuant la division de $nx^2 + px + r$ par $mx + q$,

$$y = -\frac{n}{m}x + \frac{nq - mp}{m^2} + \frac{mpq - nq^2 - m^2 r}{m^2(mx + q)};$$

d'où, en posant, pour abréger, $mpq - nq^2 - m^2 r = \mathrm{N}$,

$$(3) \qquad m^2 y = -mnx + nq - mp + \frac{\mathrm{N}}{mx + q}.$$

x et y devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{\mathrm{N}}{mx+q}$ soit un nombre entier. D'après cette condition, on calcule tous les diviseurs du nombre N, et l'on égale successivement $mx + q$ à chacun de ces diviseurs pris avec le signe + et avec le signe —. Si les équations qu'on obtient ainsi donnent des valeurs entières de x, on substitue successivement ces valeurs dans l'équation (3); il faut, pour que l'équation (1) ait des solutions entières, qu'il résulte de ces substitutions des valeurs entières de y.

Il est évident que le nombre des solutions entières est toujours limité, et qu'il peut n'en exister aucune.

EXEMPLES.

(On a indiqué seulement les solutions entières positives.)

$$2xy - 3x^2 + y = 1 \left\{ \begin{array}{ll} x = 0, & y = 1; \\ x = 3, & y = 4. \end{array} \right.$$

$$5xy = 2x + 3y + 18 \left\{ \begin{array}{ll} x = 1, & y = 10; \\ x = 3, & y = 2; \\ x = 7, & y = 1. \end{array} \right.$$

$$xy + x^2 = 2x + 3y + 29 \left\{ \begin{array}{ll} x = 4, & y = 21; \\ x = 5, & y = 7. \end{array} \right.$$

Quand le reste de la division de $nx^2 + px + r$

par $mx + q$ est zéro, l'équation (1) est de la forme $(mx + q)(ax + by + c) = 0$; on obtient toutes les solutions de cette équation en résolvant séparément les deux équations $mx + q = 0$, $ax + by + c = 0$.

267. Lorsque l'équation ne contient pas le produit xy, on ne peut plus faire usage de la méthode qui vient d'être exposée. On a, dans ce cas, $m = 0$, et l'équation est

$$(4) \qquad y = -\frac{nx^2 + px + r}{q}.$$

Supposons qu'une valeur entière $x = \alpha$ donne une valeur entière pour y. Si l'on pose $x = \alpha + qt$, t étant un nombre entier quelconque, on trouvera

$$y = -\frac{n\alpha^2 + p\alpha + r}{q} - (nqt^2 + 2n\alpha t + pt);$$

par hypothése, $n\alpha^2 + p\alpha + r$ est divisible par q; la valeur de y correspondante à $x = \alpha + qt$ sera donc un nombre entier. Comme cette conclusion a lieu quel que soit le signe de t, il en résulte que, si l'équation admet des solutions entières, il en existera pour lesquelles la valeur de x sera comprise entre zéro et q. Par conséquent, pour obtenir toutes les solutions entières, il suffira de substituer pour x, dans l'équation, les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, q - 1$; et chaque solution entière correspondante à un de ces nombres en fournira une infinité d'autres.

L'équation (4), dans laquelle il s'agit de trouver des valeurs de x qui rendent le polynôme $nx^2 + px + r$ multiple du nombre donné q, est ce que *Gauss* a nommé *congruence* du second degré; de même que l'équation $ax + by = c$, dans laquelle on cherche à rendre $ax - c$ multiple de b, est une congruence du premier degré.

CHAPITRE NEUVIÈME.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

Des progressions par différence.

268. On appelle *progression par différence*, ou *progression arithmétique*, une suite de nombres tels, que chacun d'eux est égal à celui qui le précède augmenté d'une quantité constante, qui se nomme la *raison* de la progression (*).

Suivant que la raison est positive ou négative, la progression est *croissante* ou *décroissante*.

En représentant par a, b, c, d, etc., des nombres en progression par différence, et par r la raison, on a

$$b = a + r, \quad c = a + 2r, \quad d = a + 3r, \text{ etc};$$

et, si l est le $n^{ième}$ terme, c'est-à-dire celui qui en a $n - 1$ avant lui,

$$(1) \qquad l = a + (n - 1)r.$$

La relation (1) fait connaître l'une des quatre quantités a, r, n, l, lorsque les trois autres sont connues.

269. Si l'on veut *insérer* m *moyens différentiels ou arithmétiques entre deux nombres donnés* a *et* l, on conclura de la relation (1)

$$r = \frac{l - a}{m + 1}.$$

Cette formule indique qu'*on obtiendra la raison en divisant*

(*) Trois termes consécutifs d'une progression par différence forment une *proportion par différence*, ou une *équidifférence*, dont les moyens sont égaux. Pour indiquer une semblable proportion, on écrivait $\div a.b.c$, ce qu'on lisait : *comme* a *est à* b (*par soustraction*), b *est à* c. Par suite, on indiquait la progression par différence de cette manière $\div a.b.c.d$, etc., c'est-à-dire *comme* a *est à* b, b *est à* c, c *est à* d, etc.

la différence des deux nombres donnés par le nombre des moyens augmenté de 1.

270. Nommons S la somme des termes de la progression;

$$S = a + (a + r) + (a + 2r) \ldots + (l + 2r) + (l - r) + l,$$

et en considérant les termes dans l'ordre inverse,

$$S = l + (l - r) + (l - 2r) \ldots + (a + 2r) + (a + r) + a.$$

En ajoutant ces deux égalités membre à membre et terme à terme, et en désignant par n le nombre des termes de la progression, on trouve

$$2S = (a + l)\,n,$$

d'où

$$(2) \qquad S = \frac{(a + l)\,n}{2}.$$

Donc *La somme des termes d'une progression par différence est égale à la demi-somme des termes extrêmes, répétée autant de fois qu'il y a de termes.*

En remplaçant l, dans la formule (2), par la valeur que donne l'équation (1), on trouve

$$(3) \qquad S = \frac{[2a + (n - 1)r]\,n}{2}.$$

271. Lorsque l'on connaît trois des cinq quantités a, r, n, l, S, on peut déterminer les deux autres, au moyen des équations (1) et (2) ou (1) et (3). En choisissant de toutes les manières deux inconnues, parmi ces cinq quantités, on a à résoudre dix problèmes. Si le nombre n des termes est inconnu, la question n'est possible qu'autant que l'on trouve pour n une valeur entière et positive.

Les équations (1) et (2) expriment toutes les relations entre les cinq quantités a, r, l, n, S, qui résultent de la loi de la progression; car, si l'on obtenait une troisième équation entre ces quantités, il s'ensuivrait que, deux de ces quantités étant données, on pourrait trouver les trois autres; or on voit immédiatement que, lorsqu'on ne donne que deux des quantités ci-dessus, la progression est toujours indéterminée.

Des progressions par quotient.

272. On appelle *progression par quotient*, ou *progression géométrique*, une suite de nombres tels, que chacun d'eux est égal à celui qui le précède multiplié par une quantité constante, qui se nomme la *raison* de la progression (*).

Suivant que la raison est plus grande ou plus petite que l'unité, la progression est *croissante* ou *décroissante*.

En représentant par a, b, c, d, etc., des nombres en progression par quotient, et par r la raison, on a

$$b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3, \text{ etc};$$

et, si l est le $n^{ième}$ terme,

$$(1) \qquad l = ar^{n-1}.$$

La relation (1) fait connaître l'une des quatre quantités a, r, n, l, lorsque les trois autres sont connues.

273. Si l'on veut *insérer* m *moyens géométriques entre deux nombres donnés* a *et* l, on conclura de la relation (1)

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

Cette formule indique que, *Pour obtenir la raison, il faut diviser les deux nombres donnés l'un par l'autre, et extraire du quotient la racine dont le degré est marqué par le nombre des moyens augmenté de* 1.

274. Nommons S la somme des termes de la progression;

$$(2) \qquad S = a + ar + ar^2 \ldots + ar^{n-1},$$

et en multipliant les deux membres par r,

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 \ldots + ar^{n-1} + ar^n.$$

En retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, on obtient

$$(r-1)S = ar^n - a,$$

(*) On indiquait la progression par quotient de cette manière $\div\!\div a : b : c : d$, etc., c'est-à-dire *comme* a *est à* b (*par division*), b *est à* c, c *est à* d, etc.

d'où

$$(3) \qquad S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},$$

et en remplaçant ar^{n-1} par l,

$$(4) \qquad S = \frac{lr - a}{r - 1}.$$

On peut vérifier à posteriori cette formule; car, en effectuant la division de $r^n - 1$ par $r - 1$, et multipliant le quotient par a, on retrouve la progression.

275. Lorsque l'on connaît trois des cinq quantités a, r, n, l, S, on peut trouver les deux autres, au moyen de l'équation (1) jointe à l'une des équations (2), (3) et (4).

En choisissant les deux inconnues de toutes les manières possibles, on a à résoudre dix problèmes; mais il n'y en a que quatre qui puissent être résolus par les seules règles que nous avons exposées jusqu'ici. Les autres, en exceptant seulement le cas où l'on donne $n = 3$, exigent la résolution d'une équation d'un degré supérieur au second, ou celle d'une équation avec l'inconnue en exposant.

On voit, comme dans le n° **271**, que les équations (1) et (3) expriment toutes les relations entre les cinq quantités a, r, n, l, S, qui résultent de la loi de la progression.

276. Quand on fait $r = 1$ dans la formule (3), il vient $S = \frac{0}{0}$. Mais, si l'on effectue d'abord la division de $r^n - 1$ par $r - 1$, on est ramené à l'équation (2), et en supposant $r = 1$, on obtient $S = na$.

Lorsque la raison est inconnue, l'équation (3) fait trouver la solution $r = 1$; car, en chassant le dénominateur, l'hypothèse $r = 1$ réduit les deux membres à zéro. Pour éviter cette solution étrangère à la question, il faut employer l'équation (2) au lieu de l'équation (3).

277. Lorsque la progression est décroissante, on peut écrire la formule (3) comme il suit :

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

Or, r étant un nombre plus petit que 1, à mesure que le nombre n augmente, la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$ devient de plus en plus petite; et l'on peut prendre n assez grand pour que $\frac{ar^n}{1-r}$ ait une valeur moindre que toute quantité donnée (nº 230). Donc, à mesure que l'on prend plus de termes consécutifs de la progression, à partir du premier, la somme S approche de plus en plus de $\frac{a}{1-r}$; et, si la progression est prolongée indéfiniment, on peut prendre assez de termes pour que leur somme diffère aussi peu qu'on le veut de $\frac{a}{1-r}$. Cette quantité est donc la *limite* de la somme de termes de la progression; et *la somme de tous les termes en nombre infini, est rigoureusement égale* à $\frac{a}{1-r}$.

278. Soit la progression 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc. On a $a=1$, $r=\frac{1}{2}$, $\frac{a}{1-r}=2$; ainsi la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs, à partir du premier terme, est toujours inférieure à 2; elle approche d'autant plus de 2 que l'on prend plus de termes; et la somme de tous les termes de la progression prolongée indéfiniment est égale à 2.

On peut parvenir à ces conclusions par la seule inspection de la progression. La somme des deux premiers termes diffère de 2 de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$; il s'ensuit que la somme des trois premiers termes diffère du même nombre 2 de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{8}$; celle des quatre premiers termes diffère donc de 2 de $\frac{1}{8}$; ainsi de suite. Donc, en général, la somme des n premiers termes diffère de 2 d'une quantité égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$. On peut donc prendre le nombre n assez grand pour que cette différence soit aussi petite qu'on le veut; et lorsque n est infini, cette différence est nulle.

279. La valeur d'une fraction décimale périodique est la

somme des termes d'une progression décroissante et indéfinie. Soit, par exemple, la fraction décimale

$$0,324\,324\,324 \text{ etc.}$$

Les différentes périodes forment une progression par quotient, dont la raison est $\frac{1}{1000}$; et, d'après la règle précédente, la valeur de la fraction prolongée indéfiniment est égale au quotient de la division de $\frac{324}{1000}$ par $1 - \frac{1}{1000}$, ou à $\frac{324}{999}$.

On retrouve ainsi la règle que l'on donne dans les Traités d'Arithmétique; on en conclut aisément celle qu'il faut suivre pour obtenir la fraction ordinaire équivalente à une fraction décimale périodique, dans laquelle la période ne commence pas immédiatement après la virgule.

Définition et propriétés générales des logarithmes.

280. Considérons deux progressions croissantes, l'une par quotient, commençant par l'unité; l'autre par différence, commençant par zéro; elles seront

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \text{etc.},$$
$$0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ 4d,\ \text{etc.}$$

Si l'on multiplie entre eux deux termes de la progression par quotient, q^m et q^n, le produit est q^{m+n}. En ajoutant les termes qui leur correspondent dans la progression par différence, lesquels sont md et nd, la somme est $(m+n)\,d$. Or q^{m+n} est le terme de la progression par quotient qui en a $m+n$ avant lui; et $(m+n)\,d$ est le terme de la progression par différence qui en a aussi $m+n$ avant lui. Donc, *En multipliant entre eux deux termes de la progression par quotient, et en ajoutant les termes correspondants de la progression par différence, on obtient deux termes qui se correspondent dans les deux progressions.*

281. Si la progression par quotient a été formée avec une raison très-peu supérieure à l'unité, la différence de deux termes consécutifs sera très-petite; par suite, en considérant

un nombre donné quelconque, plus grand que 1, il y aura un terme de la progression qui différera peu de ce nombre. De sorte qu'en supposant l'excès de la raison sur l'unité suffisamment voisin de zéro, on pourra concevoir que la progression comprenne tous les nombres, à un degré d'approximation aussi grand qu'on le voudra.

Lorsque les termes de la progression par quotient sont ainsi très-rapprochés les uns des autres, il faut que ceux de la progression par différence soient aussi très-rapprochés, pour éviter qu'ils deviennent très-grands, sans que ceux auxquels ils correspondent soient très-grands. Les termes de la progression par différence prennent alors le nom de Logarithmes. D'où résulte cette définition :

Les logarithmes des nombres sont les termes d'une progression par différence commençant à zéro, qui correspondent à ces nombres considérés comme faisant partie d'une progression par quotient commençant à l'unité.

Et, par la proposition qui a été établie dans le numéro précédent :

Le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.

Suivant la définition ci-dessus, *le logarithme de* 1 *est zéro.*

On indique le logarithme d'un nombre, en écrivant devant ce nombre l'abréviation log.

282. En considérant le produit $abcd$ comme formé des deux facteurs abc et d, on a, suivant la règle qui précède,

$$\log(abc \times d) = \log(abc) + \log d;$$

de même

$$\log(abc) = \log(ab) + \log c,$$

et

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

De là on conclut

$$\log(abcd) = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

Le logarithme du produit de tant de facteurs que l'on veut, est égal à la somme des logarithmes de tous les facteurs.

Soit c le quotient de la division de a par b; il en résulte $a = bc$,

$$\log a = \log b + \log c, \quad \log c = \log a - \log b.$$

Le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur.

La puissance du degré m de a est le produit de m facteurs égaux à a; donc

$$\log(a^m) = m \log a.$$

Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par le degré de la puissance.

Soit x la racine du degré m de a, ou $x = \sqrt[m]{a}$, il en résulte $x^m = a$,

$$m \log x = \log a, \quad \log x = \frac{\log a}{m}.$$

Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, divisé par le degré de la racine.

283. Ces propositions donnent le moyen d'abréger les calculs numériques, en recourant à des Tables dans lesquelles les nombres sont accompagnés de leurs logarithmes. On ne pouvait pas réunir deux progressions comme celles que nous avons supposées dans ce qui précède; car, même entre deux nombres peu éloignés l'un de l'autre, chaque progression doit renfermer une trop grande quantité de termes, à cause de la petitesse nécessaire de la différence entre deux termes consécutifs. Les Tables ne contiennent que les logarithmes des nombres entiers jusqu'à une certaine limite; on en déduit tous les autres par des moyens simples que nous expliquerons bientôt.

284. Quelque rapprochés que puissent être les termes de la progression par quotient, il y a toujours une infinité de nombres qui n'en font pas partie, et les nombres entiers sont compris parmi ceux-là. En se servant des logarithmes pour un calcul, on remplace en réalité les nombres avec lesquels on devrait opérer, par les termes de la progression par quotient qui en approchent le plus. D'un autre côté, les différences des

termes de la progression sont aussi en progression, avec la même raison. Elles vont donc en croissant; par suite, en prenant, au lieu d'un nombre désigné, l'un des deux termes consécutifs entre lesquels il est compris, l'erreur absolue peut être d'autant plus grande que le nombre est plus grand. Mais l'erreur relative a toujours la même limite; ce qui établit que l'emploi des logarithmes fera trouver le résultat d'un système d'opérations numériques, avec un degré d'approximation relative indépendant des grandeurs des nombres donnés.

285. La raison de la progression par différence pouvant être prise à volonté, on peut faire une infinité de systèmes de logarithmes, sans changer la progression par quotient. Mais le système le plus favorable pour la facilité des calculs est celui par lequel le nombre 10, qui est la base de la numération, a pour logarithme 1. On l'obtiendra en formant la progression par différence de manière qu'elle contienne autant de termes, depuis 0 jusqu'à 1, qu'il s'en trouvera dans la progression par quotient, depuis 1 jusqu'au terme qui différera assez peu de 10 pour qu'on puisse le regarder comme égal à ce nombre. On dit que ce système de logarithmes a pour *base* 10.

En général on nomme *base* d'un système quelconque de logarithmes, le nombre dont le logarithme est *un*.

286. Les logarithmes ont été inventés par Neper, savant Écossais. Il avait pris la raison de la progression par différence égale à l'excès de la raison de la progression par quotient sur l'unité; en sorte que les progressions qu'il considérait peuvent être représentées par

$$\begin{array}{lllll} 1, & 1+\alpha, & (1+\alpha)^2, & (1+\alpha)^3, & \text{etc.}, \\ 0, & \alpha, & 2\alpha, & 3\alpha, & \text{etc.}, \end{array}$$

α étant une quantité très-petite. Les logarithmes qui en résultent ont pour base un nombre incommensurable, qu'on désigne par la lettre e, et dont nous ferons connaître plus loin la valeur. Ils sont appelés *népériens*, du nom de leur inventeur. On les nomme aussi *hyperboliques*, parce qu'ils mesurent les parties de l'aire comprises entre l'hyperbole équilatère et ses

asymptotes. Les premières Tables de logarithmes suivant la base 10 furent publiées, en 1624, par *Briggs*, professeur à l'Université d'Oxford; il les construisit d'après la recommandation de Neper, à qui les avantages de ce système n'avaient pas échappé. Ces logarithmes sont appelés, par cette raison, *logarithmes de Briggs*. On les nomme aussi *logarithmes vulgaires*, parce que ce sont ceux qui servent le plus communément dans les calculs.

Des logarithmes vulgaires.

287. Les logarithmes vulgaires peuvent être obtenus en calculant seulement les termes des deux progressions depuis 1 jusqu'à 10, et depuis 0 jusqu'à 1. Si l'on prolonge ensuite ces progressions, on aura, dans la première, des termes qui se formeront en multipliant 10 successivement par chacun des termes de 1 à 10; de sorte qu'ils seront ces termes mêmes dans lesquels la virgule sera reculée d'un rang vers la droite. On parviendra ainsi à un terme égal à 100. Les suivants, jusqu'à 1000, reproduiront les mêmes nombres avec la virgule reculée d'un rang de plus. Ainsi de suite. La progression par différence, prolongée, reproduira les termes de 0 à 1, augmentés successivement de 1, puis de 2, de 3, etc.

288. Cette loi particulière des deux progressions conduit aux propositions suivantes :

Les logarithmes des puissances de 10 *sont les nombres entiers consécutifs.*

La partie entière du logarithme d'un nombre a autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre. Car si le nombre a n chiffres, il est au moins égal à 10^{n-1}, et il est plus petit que 10^n. Le logarithme est donc au moins égal à $n - 1$, et il est plus petit que n. Il a donc $n - 1$ pour partie entière.

Cette partie entière du logarithme est appelée *caractéristique*.

Les parties fractionnaires des logarithmes des nombres qui ne sont pas des puissances de 10, sont toujours exprimées en décimales.

Deux nombres dont l'un est égal à l'autre multiplié par une puissance de 10, *ont leurs logarithmes formés de la même partie décimale, avec des caractéristiques qui diffèrent d'autant d'unités qu'il y en a dans l'exposant de la puissance de* 10.

289. La dernière propriété apporte des facilités importantes dans les calculs, à cause de la fréquence des multiplications et des divisions par les puissances de 10, qui est l'effet de la numération avec ce nombre pour base; et c'est là la raison de l'avantage qu'il y a à prendre le même nombre pour base des logarithmes.

Les propositions énoncées dans le numéro précédent sont d'ailleurs renfermées dans les propositions générales de l'article **282**. Car, d'après celles-ci, le logarithme de 10 étant 1, celui d'une puissance de 10 doit être égal à l'exposant de la puissance; et, lorsqu'un nombre est multiplié ou divisé par une puissance de 10, le logarithme de ce nombre devant être augmenté ou diminué de celui de la puissance de 10, qui est un nombre entier, la partie décimale reste la même.

290. En toute rigueur, si l'on n'employait que les procédés qui ont été indiqués dans ce qui précède, il ne serait pas possible d'obtenir exactement dans la progression par quotient un terme égal à 10. Par suite, les logarithmes des puissances de 10 ne seraient pas les nombres entiers, ils en différeraient seulement très-peu. Mais lorsqu'il ne s'agit que de comprendre les usages des logarithmes, et non de les calculer effectivement, on peut supposer que cette inexactitude a été corrigée, sans se préoccuper des moyens auxquels il a fallu recourir. La supposition sera conforme à ce qui est réalisé dans les Tables, où le logarithme de 10 est exactement 1, et ceux de tous les nombres qui ne sont pas des puissances de 10 sont seulement approchées.

291. Les logarithmes, tels qu'ils ont été considérés jusqu'ici, s'appliqueraient seulement aux nombres plus grands que 1. Mais, lorsqu'on a des multiplications ou des divisions avec des nombres plus petits que 1, si l'on multiplie chacun

de ces nombres par une puissance de 10, de manière à les remplacer par d'autres plus grands que 1, et si l'on fait ensuite les multiplications ou les divisions, le résultat que l'on trouvera sera celui que l'on devait trouver, multiplié ou divisé par une certaine puissance de 10 ; de sorte que la correction qu'il exigera s'opérera par le déplacement de la virgule.

Afin de prévenir toute méprise relativement à la correction finale, on emploie le moyen que nous allons expliquer.

292. Considérons une fraction décimale, par exemple 0,008754. En la multipliant par 1000, on a le nombre 8,754. La caractéristique du logarithme de ce nombre est *zéro*. La partie décimale est la même que celle du logarithme du nombre entier 8754, et on voit dans les Tables qu'elle est 942 2065. On a donc $\log 8,754 = 0,942\,2065$. Ce logarithme étant celui d'un nombre 1000 fois plus grand que le nombre proposé, on remplace la caractéristique 0 par le nombre 3 au-dessus duquel on met le signe —. On a ainsi $\log 0,008754 = \bar{3},942\,2065$.

Supposons que le logarithme du numérateur d'une fraction ordinaire soit 2,685 6866, et celui du dénominateur, 4,743 4801. On pourra retrancher le second du premier, en augmentant celui-ci de 3. On aura ainsi le logarithme d'un nombre égal au produit de la fraction proposée par 1000. En faisant la soustraction, on obtient le reste 0,942 2065. Le logarithme de la fraction proposée sera $\bar{3},942\,2065$.

293. La caractéristique $\bar{3}$ provenant de ce que le nombre dont on veut avoir le logarithme doit être multiplié par 1000, pour que le produit ait une partie entière d'un seul chiffre, il s'ensuit qu'en général : *La caractéristique du logarithme d'un nombre décimal plus petit que* 1, *est égale au nombre qui marque le rang du premier chiffre significatif, à droite de la virgule, ce nombre étant pris avec le signe* —.

294. Si l'on veut avoir la quatrième puissance du nombre dont le logarithme est $\bar{3},942\,2065$, on multipliera d'abord la partie décimale du logarithme par 4 ; le produit sera 3,768 8260 ; celui de — 3 par 4 est — 12 ; le logarithme de la puissance cherchée sera $\bar{9},768\,8260$.

Dans le cas d'une extraction de racine, on devra diviser le logarithme; supposons qu'il soit $\bar{9},768\,8260$, et qu'il s'agisse d'une racine quatrième. On ajoutera $\bar{3}$ à la caractéristique $\bar{9}$, afin d'avoir un nombre divisible par 4, et on ajoutera en même temps 3 à la partie décimale. Le quotient sera $\bar{4},768\,8260$.

Disposition et usage des Tables.

295. Les Tables dont on se sert le plus communément en France, sont celles de *Lalande* et celles de *Callet*. Les premières contiennent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 10000; ils y sont exprimés avec cinq décimales. Les autres s'étendent jusqu'à 108000; les logarithmes y ont généralement sept décimales, et dans quelques parties ils en ont huit; les caractéristiques sont omises. Il faut résoudre avec ces Tables deux questions : 1° *Un nombre quelconque étant donné, trouver son logarithme ;* 2° *un logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.*

296. Suivant ce qui a été expliqué dans les articles précédents, on a le logarithme d'un nombre décimal en cherchant celui du nombre entier qui résulte de la suppression de la virgule; la caractéristique seulement est différente, et elle est toujours connue (nos 288 et 293). On obtient le logarithme d'un nombre fractionnaire, plus grand ou plus petit que 1, en retranchant le logarithme du dénominateur de celui du numérateur (nos 282 et 292). Si le nombre est composé d'un entier et d'une fraction, on le transforme en une seule expression fractionnaire. Il ne s'agit donc que de savoir trouver le logarithme d'un nombre entier quelconque.

Quand le nombre proposé est un de ceux qui sont contenus dans la Table, on trouve immédiatement le logarithme; il faut seulement rétablir la caractéristique, lorsqu'elle est omise.

Quand le nombre donné surpasse la limite de la Table, on sépare à sa gauche, par une virgule, autant de chiffres qu'il en faut pour former un nombre inférieur à cette limite, et qui soit le plus grand possible. Le nombre proposé est ainsi ramené à un nombre décimal. Soient n la partie entière, d la

partie décimale; soient l la partie décimale du logarithme de n, δ la différence des logarithmes des nombres n et $n+1$, qui se trouve toute calculée dans la Table, et δ' la différence inconnue des logarithmes des nombres n et $n+d$. On admet que les accroissements des logarithmes sont proportionnels à ceux des nombres, quand ceux-ci sont très-petits. On a ainsi $\delta' = \delta \times d$. En ajoutant la valeur de δ' à l, on obtient la partie décimale du logarithme du nombre $n+d$, qui est aussi celle du logarithme du nombre entier donné.

297. Occupons-nous maintenant de la seconde question : *Trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné.*

La caractéristique fait connaître l'ordre des plus hautes unités du nombre cherché; il suffit donc de considérer la partie décimale du logarithme; quand on a trouvé un nombre qui lui correspond, il reste seulement à multiplier ou à diviser ce nombre par une puissance convenable de 10.

Lorsque la partie décimale du logarithme se trouve dans la Table, on connaît immédiatement le nombre correspondant.

Lorsque cette partie décimale ne se trouve pas exactement dans la Table, on cherche celle qui en approche le plus sans la surpasser. Représentons par l cette partie décimale la plus approchée, par n le nombre entier correspondant, par l' la partie décimale du logarithme donné, par δ la différence des logarithmes de n et de $n+1$, par δ' la différence $l' - l$, et par $n+d$ le nombre cherché. On a, suivant la proportionnalité admise dans le numéro précédent, $d = \frac{\delta'}{\delta}$. On réduit la valeur de d en décimales et on l'ajoute au nombre n.

298. Les Tables de *Callet* contiennent dans les premières pages, sous le titre de Chiliade I, les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 1200, exprimés avec huit décimales, et placés en regard des nombres auxquels ils correspondent.

La Table qui suit donne les logarithmes des nombres entiers depuis 1020 jusqu'à 108 000. La colonne intitulée N contient les nombres depuis 1020 jusqu'à 10 800. Leurs logarithmes sont dans la colonne suivante, marquée o. Les nombres isolés qu'on remarque sur la gauche de cette colonne sont censés

écrits au-dessous d'eux-mêmes, de manière que chaque ligne soit remplie.

Les parties décimales des logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 10800, sont aussi celles des logarithmes des nombres de 10 en 10, depuis 10200 jusqu'à 108000. On obtient les logarithmes des nombres intermédiaires au moyen des colonnes suivantes, qui sont marquées 1, 2, 3, ..., 9. Ainsi, pour avoir le logarithme de 27796, on cherche dans la colonne N le nombre 2779; on s'avance dans la ligne horizontale qui contient ce nombre, jusqu'à la colonne marquée 6; on y trouve les quatre derniers chiffres du logarithme; les trois premiers sont donnés par le nombre isolé le plus voisin, en remontant dans la colonne marquée 0. On obtient ainsi, avec la caractéristique,

$$\log 27796 = 4,4439823.$$

En agissant de la même manière pour le nombre 27798, on ne trouve rien à la colonne marquée 8, dans la ligne qui répond à 2779; il faut alors descendre à la ligne inférieure, qui donne les quatre derniers chiffres du logarithme; les trois premiers sont ceux qui se trouvent sur la même ligne horizontale, dans la colonne marquée 0; on obtient ainsi

$$\log 27798 = 4,4440136.$$

La différence des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs est écrite dans la dernière colonne à droite, intitulée *dif.*, en tête de la petite Table la plus voisine de ces nombres. Elle est indiquée comme si elle était un nombre entier; mais ses unités sont de l'ordre du dernier chiffre des logarithmes. La Table qui se trouve au-dessous donne les produits de cette différence par les nombres 0,1, 0,2, 0,3, ..., 0,9; elle sert à trouver le produit de la même différence par la fraction décimale qui s'ajoute au nombre entier dont on doit prendre d'abord le logarithme, quand le nombre proposé est plus grand que 108000.

Soit le nombre 14518469. On sépare les cinq premiers chiffres à gauche, ce qui donne 14518,469. On trouve que la partie décimale du logarithme de 14518 est 0,1619068. La

Table des différences la plus voisine est celle qui répond à 299 ; et les nombres qui correspondent à 4,6,9, considérés comme des dixièmes, sont 120, 179, 269. On en conclut que $299 \times 0{,}4 = 120$; $299 \times 0{,}06 = 17{,}9$; $299 \times 0{,}009 = 2{,}69$. On obtient le logarithme cherché en ajoutant aux dernières unités du logarithme de 14518 les nombres 120, 17,9, 2,69.

Voici le type du calcul :

log	14518.................	0,161 9068
Pour	0,4................	120
Pour	0,06....	179
Pour	0,009.....	269
log	14518469............	7,161 9209

De 100 000 à 108 000, les logarithmes ont huit chiffres décimaux, et les nombres isolés de la colonne marquée o en ont quatre. A cela près, tout est de même que pour les nombres au-dessous de 100 000.

Dans les quatre premières pages, on n'a pu placer les Tables des parties des différences que de deux en deux. Lorsqu'on devra prendre quelque partie de l'une des différences qui n'est pas accompagnée de la Table de ses parties, il faudra prendre cette partie dans la Table précédente et dans la suivante; on ajoutera 1 à celle que donnera la dernière, si celle que donne la première la surpasse de 2.

299. Supposons maintenant qu'on veuille trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné. Soit, par exemple, 161 9209 la partie décimale de ce logarithme. On cherche parmi les logarithmes des nombres de quatre chiffres, contenus dans la colonne marquée o, celui qui approche le plus du logarithme donné, sans le surpasser; et l'on prend le nombre correspondant, qui est 1451. On avance dans la même ligne horizontale, jusqu'à ce qu'on rencontre le nombre qui approche le plus du nombre 9209, formé par les quatre dernières figures du logarithme. Ce nombre le plus approché est 9068, qui se trouve dans la colonne 8. La différence entre 9209 et 9068 est 141. On cherche dans la Table de différences la plus voisine, le nombre qui approche le plus de 141 sans le surpasser. Ce nombre est 120; il répond à 4, c'est-à-dire 0,4. La diffé-

rence entre 141 et 120 est 21. On multiplie 21 par 10; on cherche le nombre le plus approché du produit 210; il est 209 et il répond à 0,7. On conclut de là que le nombre demandé est 14158,47, sauf l'ordre des plus hautes unités.

On peut disposer le calcul comme on le voit ci-dessous :

$\log x = 0,161\,9209$		
Pour	161 9068	14518
1er reste	141	0,4
2e reste	21	0,07
		$x = 14518,47$

300. La supposition que les accroissements des logarithmes sont proportionnels à ceux des nombres n'est pas exacte; mais l'erreur qui en résulte dans la résolution de la première des deux questions ci-dessus, est au-dessous d'une unité du dernier chiffre des logarithmes. Il n'est pas possible de placer ici une explication tout à fait précise sur ce sujet; mais les considérations suivantes en fournissent une suffisamment plausible.

Si des différences égales des nombres produisaient des différences égales des logarithmes, la proportionnalité supposée aurait lieu rigoureusement. Or, en examinant les différences des logarithmes des nombres entiers consécutifs, qui sont écrites dans la Table de *Lalande*, pour tous les nombres de 1000 à 10000 (*), et dans celle de *Callet*, pour les nombres de 10200 à 108000, on voit que ces différences se maintiennent les mêmes dans un intervalle toujours assez étendu, et qui le devient de plus en plus à mesure que les nombres sont plus grands. On doit conclure de là que la proportion entre les différences des nombres et celles des logarithmes s'écarte peu de l'exactitude, quand les nombres sont suffisamment grands; et qu'elle s'en écarte d'autant moins qu'ils sont plus grands.

Lorsqu'on revient d'un logarithme au nombre, l'erreur de la partie du nombre donnée par le quotient $\frac{\delta'}{\delta}$ est due prin-

(*) Nous parlons seulement des Tables de Lalande à cinq décimales; celles dans lesquelles on en a mis sept entraînent dans des longueurs de calcul qui font perdre une grande partie de l'avantage des logarithmes.

cipalement à l'inexactitude du logarithme. Si l'on suppose que celui-ci soit seulement fautif d'une unité du dernier chiffre, il en sera de même de la différence δ', ce qui occasionnera sur la fraction $\frac{\delta'}{\delta}$ une erreur égale à $\frac{1}{\delta}$. Or, dans la Table de Callet, la différence δ varie entre 425 et 44. L'erreur du nombre que l'on obtiendra pourra donc s'élever depuis $\frac{1}{425}$ jusqu'à $\frac{1}{44}$. De sorte que le quotient $\frac{\delta'}{\delta}$ fournit au plus deux chiffres exacts; et il peut n'en fournir qu'un seul.

L'erreur absolue pouvant ainsi être $\frac{1}{425}$, quand le nombre est peu supérieur à 10000; plus grande, quand il est plus grand; et suivant un accroissement à très-peu près proportionnel à celui du nombre; l'erreur relative est au-dessous de $\frac{1}{4\,000\,000}$.

Avec les Tables de Lalande, elle est seulement au-dessous de $\frac{1}{40\,000}$.

Quand on a ajouté plusieurs logarithmes, ou quand on a multiplié un logarithme donné par un nombre entier, celui qui en résulte peut être fautif de plusieurs unités du dernier chiffre, et l'erreur que l'on commet dans l'évaluation du nombre demandé devient plus grande.

301. On appelle *complément arithmétique* d'un logarithme ce qu'il faut lui ajouter pour que la somme soit égale à 10. D'après cette définition, on obtient le complément arithmétique d'un logarithme en retranchant le premier chiffre significatif (à droite) de 10, et les autres chiffres de 9.

Quand un logarithme doit être formé avec plusieurs autres au moyen de l'addition et de la soustraction, on peut ne faire qu'une seule addition en se servant des compléments arithmétiques. A cet effet, on prend les compléments des logarithmes qui doivent être soustraits, et l'on fait la somme de ces compléments et des autres logarithmes. Il est facile de voir que cette somme surpasse celle qu'on devait obtenir d'autant de dizaines que l'on a pris de compléments; de sorte qu'il faut

soustraire ces dizaines, de la partie entière de la somme. Lorsqu'elle ne les contient pas, on a une caractéristique négative.

Si l'on avait à soustraire un logarithme plus grand que 10, il faudrait former le complément de ce logarithme en le retranchant du nombre de dizaines immédiatement supérieur à la caractéristique; mais ce cas se rencontre rarement, et c'est par cette raison qu'on définit les compléments arithmétiques comme nous l'avons fait.

Exemples de calculs effectués par les logarithmes.

1er Exemple. — Soit $x = \frac{239 \times 827 \times 543}{76 \times 17}$; on demande la valeur de x.

$$
\begin{aligned}
\log 239 &= 2,3783979 \\
\log 827 &= 2,9175055 \\
\log 543 &= 2,7347998 \\
\text{Compl.}\log 76 &= 8,1191864 \\
\text{Compl.}\log 17 &= 8,7695511 \\
\hline
\log x &= 4,9194407
\end{aligned}
$$

Pour	9194390 ...	83069
1er reste	17...	03
2e reste	1...	002
		$x = 83069,32$

Par le calcul direct, on trouve $x = 83069,333$; de sorte que l'emploi des logarithmes ne fait trouver que les six premiers chiffres.

En n'employant pas les compléments, on aurait dû faire deux additions et une soustraction, au lieu d'une seule addition.

2e Exemple. — Calculer la 64e puissance de 2.

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300 \\
64 \times \log 2 &= 19,2659200 \\
2^{64} &= 18\,446\,750\,000\,000\,000\,000.
\end{aligned}
$$

Le produit du logarithme de 2 par 64 peut être fautif de près de 32 unités du septième ordre, et comme la différence des logarithmes de 18446 et de 18447 est 236 unités du

même ordre, l'erreur que l'on commet dans l'évaluation du nombre demandé peut s'élever à près de $\frac{32}{236}$ de l'unité du cinquième chiffre en partant de la gauche (nº 300); on n'est donc certain que de l'exactitude des cinq premiers chiffres. On peut prendre le logarithme de 2 avec deux ou trois décimales de plus; car les Tables de Callet contiennent, à la suite des deux parties dont nous avons parlé, les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1200, calculés avec 20 décimales. On aura alors le logarithme de $(2)^{64}$ à moins d'une unité du 7ᵉ ordre, et l'on en déduira une valeur plus exacte du nombre demandé. On trouve de cette manière

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}301\,029\,995 \\ 64 \log 2 &= 19{,}265\,9197 \\ 2^{64} &= 18\,446\,740\,000\,000\,000\,000. \end{aligned}$$

Ce résultat est exact jusqu'au septième chiffre.

3ᵉ Exemple. — Calculer $\sqrt[5]{\left(\frac{23}{417}\right)^3}$.

$$\begin{aligned} \log 23 &= 1{,}361\,7278 \\ \log 417 &= 2{,}620\,1361 \\ \log \frac{23}{417} &= \bar{2}{,}741\,5917 \\ 3 \text{ fois } \log \frac{23}{417} &= \bar{4}{,}224\,7751 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{5} \times \log \frac{23}{417} = \bar{1}{,}244\,9550, \quad \text{d'où} \quad \sqrt[5]{\left(\frac{23}{417}\right)^3} = 0{,}17577.$$

La caractéristique — 1 indique que les plus hautes unités du nombre cherché sont des dixièmes; par conséquent, si l'on peut se contenter de connaître ce nombre à moins de 0,000 01, il suffit d'obtenir les cinq premières figures; de sorte qu'il n'est pas nécessaire de recourir aux différences des logarithmes.

On pourrait éviter les caractéristiques négatives, comme il suit: En ajoutant au logarithme de 23 le complément arithmétique de celui de 417, on obtient une somme 8,741 5917, qui est le logarithme de $\frac{23}{417}$ augmenté de 10 unités; le produit de

cette somme par 3 est 26,224 7751; c'est le logarithme de $\left(\frac{23}{417}\right)^3$ augmenté de 30 unités; la division de ce produit par 5 donne le quotient 5,244 9550, qui est le logarithme du nombre cherché, augmenté de 6 unités. On obtiendra donc ce nombre en cherchant celui qui a pour logarithme 5,244 9550, et le divisant par 10^6.

Si l'on veut calculer la racine septième de $\left(\frac{23}{417}\right)^3$, la division de 26,224 7751 par 7 donnera un quotient qui surpassera le logarithme de la racine demandée de $\frac{30}{7}$; et si l'on cherchait le nombre correspondant à ce logarithme trop fort, il faudrait le diviser par celui dont le logarithme est $\frac{30}{7}$. On évitera l'excès fractionnaire en augmentant ou en diminuant le nombre 26,224 7751 d'assez d'unités pour qu'il surpasse le logarithme de $\left(\frac{23}{417}\right)^3$ d'un multiple de 7. Si l'on diminue, par exemple, ce nombre de 2, la division par 7 donnera un quotient qui sera le logarithme de la racine demandée, augmenté de 4. On en déduira la valeur de cette racine, comme dans l'exemple précédent.

Intérêts composés et annuités.

302. L'intérêt est composé, lorsque le prêteur, au lieu de retirer chaque année l'intérêt du capital, le laisse entre les mains de l'emprunteur, pour le faire valoir conjointement avec la somme primitive, pendant l'année suivante.

Soit r l'intérêt de 1 franc pour un an, qu'on nomme le *denier de l'intérêt*. L'intérêt de 100 francs pour le même temps, ou le taux de l'intérêt, sera $100\,r$. L'intérêt d'une somme a pendant un an, sera ar, et le capital a sera devenu après un an, $a + ar$; de sorte qu'en représentant par a' la somme due à cette époque, on a

$$a' = a(1 + r).$$

Si le capital a' est placé pendant une deuxième année, il de-

vient pareillement, à la fin de cette année,

$$a'' = a'(1 + r) = a(1 + r)^2.$$

Si le capital a'' reste placé pendant une troisième année, il devient, à la fin de cette année,

$$a''' = a''(1 + r) = a(1 + r)^3;$$

ainsi de suite. Donc, après n années, le capital primitif a devient

$$(1) \qquad A = a(1 + r)^n.$$

En appliquant les logarithmes à cette formule, on trouve

$$\log A = \log a + n \log(1 + r).$$

Au moyen de cette relation, on obtient la valeur de l'une des quatre quantités A, a, r, n, lorsque les trois autres quantités sont connues.

303. Supposons que le prêteur joigne chaque année au capital une nouvelle somme, qui doit aussi produire des intérêts composés, jusqu'au moment du remboursement. Désignons par $a, b, c, d, \ldots, l$, les sommes qu'il place au commencement de la première année, de la deuxième, de la troisième, de la quatrième, etc.; et par A la somme qu'il doit recevoir au bout de n années.

La somme a, restée entre les mains de l'emprunteur pendant n années, sera devenue $a(1 + r)^n$.

La somme b qui sera placée pendant $n - 1$ années, deviendra $b(1 + r)^{n-1}$.

La somme c qui sera placée pendant $n - 2$ années, deviendra $c(1 + r)^{n-2}$; ainsi de suite.

Enfin, la dernière somme ne sera placée que pendant une année, et donnera $l(1 + r)$.

On aura donc

$$A = a(1 + r)^n + b(1 + r)^{n-1} + c(1 + r)^{n-2} \ldots + l(1 + r).$$

Dans le cas particulier où $a = b = c = d \ldots = l$, le second membre de l'équation précédente devient une progression par quotient dont le premier terme est $a(1 + r)$, et la raison $(1 + r)$. On a donc (n° 274)

$$A = \frac{a(1 + r)[(1 + r)^n - 1]}{r}.$$

On calculera par les logarithmes la valeur du terme $(1+r)^n$, et l'on achèvera ensuite aisément les calculs.

304. Une *annuité* est un payement qu'un débiteur effectue chaque année, pour rembourser, en un certain temps, un capital avec ses intérêts. Nommons A le capital qu'il s'agit de rembourser, et a la somme qu'on doit payer annuellement pendant n années. Les payements effectués par le débiteur avant la fin du remboursement, peuvent être considérés comme des avances faites au prêteur sur ce remboursement, et dont la valeur dépend du temps qui s'écoule entre l'une de ces époques et l'autre. Ainsi, le premier payement qui a lieu $n-1$ années avant l'époque du dernier remboursement, étant rapporté à cette époque, vaut $a(1+r)^{n-1}$; le second payement, rapporté à la même époque, vaut $a(1+r)^{n-2}$; et ainsi des autres, jusqu'au dernier qui vaut seulement a. Mais la somme prêtée A vaut, entre les mains de l'emprunteur, après n années, $A(1+r)^n$. On doit donc avoir

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \ldots + a;$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Dans cette équation, A est le *prix* de l'annuité, parce que c'est la somme qu'elle représente; a est la *quotité* de l'annuité; r est le *denier* de l'intérêt; enfin n exprime la *durée* de l'annuité. On peut déterminer l'une de ces quatre quantités quand on connaît les trois autres. La détermination de r dépendrait d'une équation du degré n. Pour trouver la valeur de n, on tire de l'équation ci-dessus

$$(a - Ar)(1+r)^n = a, \quad \text{d'où} \quad (1+r)^n = \frac{a}{a - Ar}.$$

En appliquant les logarithmes, il vient

$$n \log(1+r) = \log a - \log(a - Ar);$$

d'où

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}.$$

CHAPITRE DIXIÈME.

PUISSANCES ET RACINES DES MONOMES. CALCUL DES RADICAUX DE DEGRÉS QUELCONQUES. EXPOSANTS FRACTIONNAIRES. EXPOSANTS NÉGATIFS. LOGARITHMES CONSIDÉRÉS COMME EXPOSANTS.

---

305. Pour obtenir la puissance $m^{ième}$ d'un monôme entier, il faut faire la puissance $m^{ième}$ du coefficient et multiplier les exposants par m; et pour la puissance $m^{ième}$ d'une fraction, il faut faire la puissance $m^{ième}$ de chacun des deux termes.

Donc, pour extraire la racine $m^{ième}$ d'un monôme entier qui est une puissance $m^{ième}$ exacte, il faut extraire la racine $m^{ième}$ du coefficient et diviser les exposants par m; et pour extraire la racine $m^{ième}$ d'une fraction, il faut extraire la racine du même degré de chacun des deux termes.

306. Nous avons dit qu'en désignant par A une quantité quelconque et par m un nombre entier positif, il existe m racines $m^{ièmes}$ de A; ou, en d'autres termes, l'expression $\sqrt[m]{A}$ a m valeurs (n° 215). Quand la quantité A est positive, parmi les m valeurs de $\sqrt[m]{A}$ il y en a une réelle et positive, et il n'y en a qu'une; car deux nombres différents, élevés à une même puissance, ne peuvent pas reproduire le même nombre. Cette valeur est ce qu'on nomme la *racine* $m^{ième}$ *arithmétique* de A, ou la *valeur arithmétique du radical* $\sqrt[m]{A}$.

Nous considérerons seulement, dans ce qui va suivre, les valeurs arithmétiques des radicaux.

307. Ce qui a été dit au sujet de l'addition et de la soustraction des quantités radicales du second degré (n° 152), s'applique aux quantités radicales de tous les degrés.

308. *On multiplie et on divise l'un par l'autre deux radicaux de même indice, en faisant la multiplication ou la*

division des quantités placées sous le signe radical, et mettant le résultat sous un radical du même degré.

Il faut démontrer que

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}, \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Or la $m^{ième}$ puissance du produit $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$ est $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \times \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$ ou $a \times b$; donc le produit $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$ est la racine $m^{ième}$ de $a \times b$. On démontre de même la seconde égalité.

309. On conclut de la règle qui vient d'être établie,

$$\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b} = a \sqrt[m]{b}.$$

Donc, *Lorsque la quantité placée sous un radical du degré* m, *a des facteurs qui sont des puissances exactes du même degré, on peut prendre séparément les racines de ces facteurs, et multiplier leur produit par la racine indiquée du produit des autres facteurs.* C'est ce qu'on appelle *faire sortir des facteurs du radical.* Réciproquement, *Lorsqu'un radical est multiplié par des facteurs rationnels, on peut mettre ces facteurs sous le radical, en les élevant à la puissance de même degré que le radical.* C'est ce qu'on appelle *faire entrer les facteurs sous le radical.*

Quand on doit ajouter ou soustraire des quantités radicales dissemblables, il faut examiner si ces quantités ne peuvent pas être rendues semblables par la simplification des radicaux. On a ainsi, par exemple :

$$\sqrt[3]{16a^3 b} = 2a\sqrt[3]{2b}, \quad \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6 b^4} = \frac{5abc}{d}\sqrt[3]{2b};$$

par suite,

$$\sqrt[3]{16a^3 b} \pm \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6 b^4} = \left(2a \pm \frac{5abc}{d}\right)\sqrt[3]{2b}.$$

310. *La valeur arithmétique d'un radical n'est pas changée quand on multiplie l'indice par un nombre entier, en élevant en même temps la quantité placée sous le signe radical à la puissance du degré marqué par ce nombre.*

C'est-à-dire que

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}.$$

Car, $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$; et, en élevant les deux membres à la $n^{ième}$ puissance, $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n$; donc $\sqrt[m]{a}$ est la racine du degré mn de a^n.

Ce principe donne le moyen de ramener des radicaux quelconques à avoir le même indice. *Il suffit de multiplier l'indice de chaque radical par le produit de tous les autres indices, en élevant la quantité qui est sous le radical à la puissance marquée par ce produit.*

On peut aussi faire prendre aux radicaux, pour indice commun, le plus petit multiple de tous les indices.

Suivant l'égalité $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$, *lorsque l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité qui est sous le radical ont un facteur commun, on peut les diviser l'un et l'autre par ce facteur.*

311. *Pour faire le produit de plusieurs radicaux de degrés différents, et pour diviser l'un par l'autre deux radicaux de degrés différents, on réduit les radicaux au même indice, et l'on applique la règle du* n° 308.

On a ainsi,

$$\sqrt[3]{a^2 b} \times \sqrt[4]{ab^3} \times \sqrt[6]{a^5 b} = \sqrt[12]{a^8 b^4} \times \sqrt[12]{a^3 b^9} \times \sqrt[12]{a^{10} b^2} = \sqrt[12]{a^{21} b^{15}}$$
$$= ab\sqrt[12]{a^9 b^3} = ab\sqrt[4]{a^3 b},$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{\sqrt[7]{a^4 b^3}} = \frac{\sqrt[35]{a^{21} b^{14}}}{\sqrt[35]{a^{20} b^{15}}} = \sqrt[35]{\frac{a}{b}}.$$

312. *On élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité qui est sous le radical.* Car

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \ldots = \sqrt[m]{a \times a \times a \ldots} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Lorsque l'indice du radical est divisible par l'exposant de la puissance, on peut effectuer l'opération en divisant le premier de ces deux nombres par le second. Cette règle résulte de

la précédente et de celle du n° 310; puisque, d'après ces deux règles,

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$$

313. *On extrait la racine du degré* m *d'un radical, en multipliant l'indice par* m; *ou en extrayant, si cela est possible, la racine du degré* m *de la quantité qui est sous le radical.* Ainsi :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \text{et} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^p}.$$

En effet, puisque la puissance du degré m de $\sqrt[mn]{a}$ est $\sqrt[n]{a}$, il s'ensuit que $\sqrt[mn]{a}$ est la racine du degré m de $\sqrt[n]{a}$. Pareillement, la puissance $m^{ième}$ de $\sqrt[n]{a^p}$ est $\sqrt[n]{a^{mp}}$; donc $\sqrt[n]{a^p}$ est la racine du degré m de $\sqrt[n]{a^{mp}}$.

Observations sur les radicaux considérés algébriquement.

314. Quand on considère les radicaux dans toute la généralité que l'algèbre comporte, les règles que nous avons exposées dans les numéros précédents peuvent conduire à des résultats inexacts.

Soient, par exemple, les deux radicaux $\sqrt{-a}$ et $\sqrt[3]{-a}$, en supposant a positif. Si l'on applique à ces radicaux le principe du n° 310, en élevant la quantité sous le radical au carré et multipliant l'indice par 2, on trouve

$$\sqrt{-a} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2}, \quad \sqrt[3]{-a} = \sqrt[6]{(-a)^2} = \sqrt[6]{a^2}.$$

Or chacune de ces égalités est inexacte; car dans la première, $\sqrt{-a}$ est imaginaire, et $\sqrt[4]{a^2}$ a deux valeurs réelles. Dans la seconde égalité, le premier membre n'a qu'une seule valeur réelle qui est négative; et le second a deux valeurs réelles, dont l'une est positive.

A la vérité, si l'on se reporte à ce qui a été dit dans le chapitre VI, sur les racines quatrièmes et les racines sixièmes d'une quantité, on voit qu'en considérant les radicaux dans

toute leur généralité, les quatre valeurs de $\sqrt[4]{a^2}$ comprennent les deux valeurs de $\sqrt{-a}$; et les six valeurs de $\sqrt[6]{a^2}$ comprennent les trois valeurs de $\sqrt[3]{-a}$. Mais les égalités ci-dessus restent toujours inexactes; puisque, dans chacune d'elles, le second membre admet plus de valeurs que le premier.

315. En appliquant au produit de $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$ la règle du n° 308, on trouve

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)\times(-a)}=\sqrt{a^2}.$$

Or $\sqrt{a^2}$ admet les deux déterminations $+a$ et $-a$; cependant il semble que le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ étant le carré de $\sqrt{-a}$, on ne peut admettre, sans se contredire, que ce produit soit autre chose que $-a$.

Cette contradiction tient à ce que l'on attribue au produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ une signification trop restreinte, en le confondant mal à propos avec le carré de $\sqrt{-a}$. En effet, lorsque l'on prend les radicaux dans toute leur généralité, $\sqrt{-a}$ admet deux déterminations de signes contraires; et si l'on représente ces deux déterminations par $+\alpha$ et $-\alpha$, le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ admet les quatre déterminations $+\alpha\times+\alpha$, $+\alpha\times-\alpha$, $-\alpha\times+\alpha$, $-\alpha\times-\alpha$; les deux dernières ne diffèrent pas des deux premières; et celles-ci, qui sont $+\alpha^2$ et $-\alpha^2$, donnent précisément les deux valeurs de $\sqrt{a^2}$; puisque, α désignant une valeur de $\sqrt{-a}$, on a $\alpha^2=-a$ et $-\alpha^2=+a$. Mais, lorsqu'il s'agit du carré de $\sqrt{-a}$, chacune des déterminations $+\alpha$ et $-\alpha$ ne devant être multipliée que par elle-même, on n'obtient qu'un résultat unique, $+\alpha^2$.

Les observations que nous venons de faire sur le produit $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, s'appliquent également au produit $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$. D'après la règle du n° 308, ce produit s'exprime par $\sqrt{a^2}$: or $\sqrt{a^2}$ admet les deux valeurs $+a$ et $-a$, et lorsque l'on envisage chacun des facteurs du produit $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ dans toute sa généralité, ce produit comporte en effet les deux déterminations $+a$ et $-a$; mais si l'on doit multiplier seulement cha-

cune des déterminations de $\sqrt{a}$ par elle-même, le produit ne peut être que $+a$.

316 Les difficultés que l'on rencontre quand on considère des radicaux imaginaires, ou lorsque, les radicaux admettant des valeurs réelles, il faut avoir égard à leurs valeurs imaginaires, tiennent à ce que les déterminations imaginaires sont toutes confondues dans l'expression radicale, sans qu'on puisse établir entre elles aucune distinction. Ces difficultés disparaissent lorsque l'on considère séparément les déterminations imaginaires des radicaux, exprimées par des radicaux réels et positifs combinés avec le symbole $\sqrt{-1}$.

Supposons, par exemple, que l'on veuille connaître le produit de $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-b}$. Si l'on représente par α et β les racines carrées positives des nombres a et b, les deux déterminations de $\sqrt{-a}$ seront $+\alpha\sqrt{-1}$ et $-\alpha\sqrt{-1}$, et celles de $\sqrt{-b}$ seront $+\beta\sqrt{-1}$ et $-\beta\sqrt{-1}$. En multipliant chacune des déterminations du premier radical par chacune de celles du second, on obtient deux produits différents, $+\alpha\beta$ et $-\alpha\beta$, qui sont précisément les deux valeurs du radical $\sqrt{ab}$. Mais, si l'on doit multiplier seulement $+\alpha\sqrt{-1}$ par $+\beta\sqrt{-1}$, ou $-\alpha\sqrt{-1}$ par $-\beta\sqrt{-1}$, en d'autres termes, s'il faut ne multiplier entre elles que les déterminations des radicaux proposés formées avec une même détermination de $\sqrt{-1}$, il n'en résulte qu'un produit unique, qui est $-\alpha\beta$.

Examinons encore le cas où l'on aurait à multiplier $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt{-1}$. Désignons par $+\beta$ et $-\beta$ les déterminations de $\sqrt{-1}$, et par α la valeur arithmétique de $\sqrt[4]{a}$. Les quatre déterminations de $\sqrt[4]{a}$ seront (n° 211)

$$+\alpha, \quad -\alpha, \quad +\alpha\times\beta, \quad -\alpha\times\beta.$$

En multipliant ces quatre déterminations par les deux déterminations de $\sqrt{-1}$, $+\beta$ et $-\beta$, on obtient quatre produits différents, savoir :

$$+\alpha\times\beta, \quad -\alpha\times\beta, \quad +\alpha\times\beta^2, \quad -\alpha\times\beta^2.$$

Or, 6 étant une détermination de $\sqrt{-1}$, on a $6^2 = -1$, et, par suite, $+\alpha \times 6^2 = -\alpha$, $-\alpha \times 6^2 = +\alpha$. Les quatre expressions résultantes de la multiplication de $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt{-1}$ ne sont donc autre chose que les quatre déterminations de $\sqrt[4]{a}$; de sorte que l'on a $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt[4]{a}$. Mais cette égalité n'est exacte qu'autant que l'on attribue aux radicaux toute leur généralité : elle offrirait un sens absurde si l'on ne considérait que la valeur arithmétique de $\sqrt[4]{a}$; puisque le premier membre serait imaginaire, tandis que le second membre serait réel.

317. Dans chacun des trois derniers exemples, l'expression du produit des deux radicaux, pris dans toute leur généralité, s'accorde avec les règles des nos 308 et 311 ; il faut seulement observer, au sujet du produit de $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt{-1}$, que, si l'on réduisait les radicaux au même indice en multipliant entre eux les deux indices 4 et 2, on obtiendrait une expression fautive; car cette expression, qui serait $\sqrt[8]{a^2} \times \sqrt[8]{1}$ ou $\sqrt[8]{a^2}$, comprendrait, outre les valeurs du produit proposé, les quatre valeurs de $\sqrt[4]{-a}$. En général, quand les radicaux doivent être considérés algébriquement, on peut toujours suivre, pour la multiplication et la division des radicaux de même indice, la règle 308; et quand les indices sont différents, on peut appliquer la règle du n° 311, en ayant soin de ramener les radicaux au *plus petit indice commun*. Pour former la $n^{ième}$ puissance d'un radical du degré m, il faut chercher le plus grand commun diviseur d des nombres n et m, diviser l'indice m du radical par d, et élever la quantité qui est sous le radical à la puissance marquée par le quotient de la division de n par d. Enfin, pour extraire la racine $n^{ième}$ d'un radical du degré m, il faut, dans tous les cas, multiplier l'indice m par n. Les lecteurs qui voudront connaître les démonstrations de ces différentes propositions, les trouveront dans les *Leçons d'Algèbre* de M. LEFÉBURE DE FOURCY.

De l'exposant fractionnaire et de l'exposant négatif.

318. La formation des exposants pour les racines des mo-

nômes, conduit à substituer au signe radical une indication plus commode.

Lorsqu'on doit extraire la racine du degré n de a^m, si m n'est pas divisible par n, on donne à la quantité a l'exposant fractionnaire $\frac{m}{n}$; c'est-à-dire qu'au lieu d'écrire $\sqrt[n]{a^m}$, on écrit $a^{\frac{m}{n}}$.

Les exposants fractionnaires sont soumis aux mêmes règles que les exposants entiers; on le démontre au moyen des règles du calcul des radicaux, comme on le voit ci-dessous.

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}$$

$$= a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{n}};$$

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[pn]{a^m} = a^{\frac{m}{np}};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}\ (*).$$

319. Les observations que nous avons faites au sujet des différentes valeurs des radicaux, s'appliquent aux puissances dont les exposants sont fractionnaires : ainsi,

---

(*) « Le calcul des exposants fractionnaires, dit Lacroix, est un des exemples » les plus remarquables de l'utilité des signes, lorsqu'ils sont bien choisis. L'a- » nalogie qui règne entre les exposants fractionnaires et ceux qui sont entiers, » rend les règles qu'il faut suivre dans le calcul de ceux-ci applicables à celui » des autres; tandis qu'il faut des règles particulières pour le calcul des radi- » caux, parce que le signe $\sqrt{}$ qui les exprime n'a aucune liaison avec l'opération » qui les engendre. Plus on avance dans l'algèbre, plus on reconnaît les nom- » breux avantages qu'a produits dans cette science la notation des exposants, » imaginée par Descartes. »

puisque l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ est équivalente à $\sqrt[n]{a^m}$, elle admet comme celle-ci n valeurs. Mais on ne considère habituellement que la *valeur arithmétique*, ce qui exige que la quantité a soit positive; et ce que nous venons de dire au sujet des règles relatives aux exposants fractionnaires, ne doit être entendu que dans ce sens. On a ainsi $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}$, puisque les radicaux $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[np]{a^{mp}}$ ont la même valeur arithmétique; mais, lorsqu'on doit avoir égard à toutes les déterminations des expressions irrationnelles, l'égalité ci-dessus cesse d'être exacte.

320. Lorsqu'on doit diviser a^m par a^n, si $n = m + p$, le quotient est $\frac{1}{a^p}$. D'un autre côté, si l'on retranche, dans ce cas, l'exposant du diviseur de celui du dividende, on obtient a^{-p}. On est conduit par là à convenir que l'expression a^{-p} sera regardée comme équivalente à $\frac{1}{a^p}$.

En considérant, au moyen de cette convention, les différents cas de la multiplication et de la division, pour les quantités avec des exposants négatifs, on trouve les résultats suivants :

$$a^{-m} \times a^n = \frac{1}{a^m} \times a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)};$$

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n = a^{m+n};$$

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{-m+n}.$$

On a aussi

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = a^{mn}.$$

Il suit de là que les exposants négatifs sont soumis aux mêmes règles que les exposants positifs.

321. *Les puissances d'un nombre quelconque* a, *positif et différent de l'unité, peuvent produire tous les nombres.*

Pour démontrer cette proposition, supposons d'abord $a > 1$.

Si l'on forme les puissances entières de a, a^0, a^1, a^2, a^3, etc., on obtient une suite de nombres qui croissent de manière à s'élever au delà de toute limite (229).

Représentons par $\frac{m}{n}$ une fraction quelconque, m et n étant des nombres entiers positifs. On aura $a^{\frac{m}{n}} > 1$; car, puisque $a > 1$, on a aussi $a^m > 1$; par conséquent $\sqrt[n]{a^m}$ ou $a^{\frac{m}{n}}$ ne peut être qu'un nombre plus grand que 1. De plus, la valeur de $a^{\frac{m}{n}}$ est d'autant plus grande que l'exposant est plus grand ; car en désignant par α et β deux exposants positifs quelconques, $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \times a^\beta$: or, puisque $a^\beta > 1$, on a $a^\alpha \times a^\beta > a^\alpha$.

Posons $\beta = \frac{1}{n}$, n étant un nombre entier, il viendra $a^{\alpha+\beta} - a^\alpha = a^\alpha \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = a^\alpha \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$; or on peut donner au nombre n une valeur assez grande pour que $\sqrt[n]{a}$ diffère aussi peu qu'on le veut de 1 (n° 231) ; on pourra donc faire prendre au nombre β une valeur assez petite pour que la différence $a^{\alpha+\beta} - a^\alpha$ soit aussi petite que l'on voudra.

Désignons maintenant par x et y deux quantités variables et assujetties à vérifier l'équation

$$y = a^x.$$

D'après les explications qui précèdent, si l'on donne à x une suite de valeurs très-rapprochées les unes des autres, depuis 0 jusqu'à $+\infty$, on obtiendra pour y une suite de valeurs très-rapprochées les unes des autres ; de sorte que, si x croissait d'une manière continue depuis 0 jusqu'à $+\infty$, y passerait par tous les états de grandeur depuis 1 jusqu'à $+\infty$.

Concevons que l'on donne aussi à x des valeurs négatives ; à cet effet, posons $x = -x'$. L'équation ci-dessus deviendra

$$y = a^{-x'}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{a^{x'}} ;$$

et puisqu'en faisant passer x' par tous les états de grandeur depuis zéro jusqu'à $+\infty$, on pourra obtenir pour $a^{x'}$ tous les nombres depuis 1 jusqu'à l'infini, on trouvera pour $\frac{1}{a^{x'}}$, ou y, tous les nombres depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{\infty}$, ou zéro.

Lorsque $a < 1$, en posant $a = \frac{1}{b}$, on a $b > 1$, et l'équation $y = a^x$ se change dans la suivante :

$$y = \left(\frac{1}{b}\right)^x, \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{b^x}.$$

En faisant passer x par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à $+\infty$, on obtiendra pour b^x tous les nombres depuis 1 jusqu'à $+\infty$; par conséquent on aura pour y tous les nombres depuis 1 jusqu'à zéro. Si l'on fait ensuite passer x par tous les états de grandeur depuis zéro jusqu'à $-\infty$, il en résultera pour b^x toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à zéro ; par conséquent on trouvera pour y tous les nombres depuis 1 jusqu'à l'infini.

La proposition énoncée est donc démontrée.

Des logarithmes considérés comme exposants.

322. Les logarithmes qui ont été trouvés par les progressions, se présentent d'une manière plus simple et plus directe d'après les propositions qui ont été expliquées en dernier lieu. Ils sont alors *les exposants des puissances auxquelles on doit élever un nombre constant,* nommé BASE, *pour reproduire tous les autres nombres.* Suivant cette définition, si x, x', x'', sont les logarithmes des nombres y, y', y'', dans le système dont la base est a, on a

$$y = a^x, \quad y' = a^{x'}, \quad y'' = a^{x''}.$$

On en conclut

$$yy'y'' = a^{x+x'+x''}, \quad \frac{y}{y'} = a^{x-x'}, \quad y^m = a^{mx}, \quad \sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}.$$

Donc

$$\log yy'y'' = x + x' + x''; \quad \log \frac{y}{y'} = x - x';$$

$$\log y^m = mx; \quad \log \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m};$$

ou bien

$$\log yy'y'' = \log y + \log y' + \log y'';$$

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y';$$

$$\log y^m = m \times \log y; \quad \log \sqrt[m]{y} = \frac{\log y}{m}.$$

On retrouve ainsi toutes les propositions du n° 282.

323. D'après la définition ci-dessus, *le logarithme de* 1 *est toujours* 0, *et celui de la base est* 1.

En outre, suivant l'explication du n° 321 :

Lorsque la base est un nombre plus grand que 1, *les logarithmes des nombres plus grands que* 1 *sont positifs; ceux des nombres plus petits que* 1 *sont négatifs; et le logarithme de* 0 *est* $-\infty$.

Lorsque la base est un nombre plus grand que 1, *les logarithmes des nombres plus grands que* 1 *sont négatifs; ceux des nombres plus petits que* 1 *sont positifs; et le logarithme de zéro est* $+\infty$.

Comme les logarithmes ne sont ordinairement employés que pour abréger les calculs numériques, on ne considère que les logarithmes des nombres positifs, et l'on suppose toujours que la base est un nombre positif. *Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes* (*).

324. Soit une progression quelconque par quotient

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3, \text{ etc.}$$

(*) Quelques géomètres ont pensé qu'en raison des valeurs algébriques des radicaux, on devrait admettre que les nombres négatifs peuvent avoir des logarithmes; mais l'examen de ces difficultés ne doit pas trouver place dans ce Traité.

Les logarithmes des différents termes sont

$$\log a, \quad \log a + \log q, \quad \log a + 2\log q, \quad \log a + 3\log q, \text{ etc.}$$

Donc, lorsque des nombres sont en progression par quotient, leurs logarithmes sont en progression par différence.

Si $a = 1$, $\log a = 0$, et l'on est ramené à la définition des logarithmes qui a été donnée dans le chapitre précédent.

325. Supposons que les logarithmes soient connus par rapport à une base a, et que l'on veuille obtenir le logarithme d'un nombre n par rapport à une autre base b; en le désignant par x, il faudra que l'on ait

$$b^x = n.$$

Si l'on prend les logarithmes des deux membres de cette équation, dans le système dont la base est a, il vient

$$x \times \log b = \log n, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\log n}{\log b} = \log n \times \frac{1}{\log b}.$$

Donc, *Pour obtenir les logarithmes de tous les nombres par rapport à la nouvelle base* b, *il suffit de multiplier leurs logarithmes dans le système dont la base est* a, *par la quantité constante* $\frac{1}{\log b}$, *en prenant* $\log b$ *dans la base* a.

Dans les parties élevées des mathématiques, on emploie fréquemment les logarithmes népériens, et l'on regarde tous les autres logarithmes comme étant formés au moyen de ceux-là. On appelle alors *module* d'un système de logarithmes, la quantité constante par laquelle il faut multiplier les logarithmes népériens, pour obtenir ceux du système désigné. D'après ce qu'on vient de voir, en indiquant les logarithmes népériens par la seule lettre l, le module des logarithmes dont la base a est $\frac{1}{la}$. Ce module est aussi le logarithme du nombre e par rapport à la base a; car, en exprimant celui-ci par $\log e$, on a $\log e = le \times \frac{1}{la}$, ou $\log e = \frac{1}{la}$, puisque $le = 1$.

326. Les applications des logarithmes comprennent la réso-

lution des équations dans lesquelles une inconnue est en exposant. On a déjà résolu, dans le numéro précédent, l'équation $a^x = b$, qui a donné $x = \frac{\log b}{\log a}$.

Si l'on a l'équation $a^{b^x} = c$, on posera $b^x = y$; il viendra $a^y = c$, d'où $y = \frac{\log c}{\log a}$; et en mettant la valeur de y dans l'équation $b^x = y$, on en conclura

$$x = \frac{\log(\log c) - \log(\log a)}{\log b}.$$

Soit encore l'équation

$$a^{x+2} - \frac{b}{a^{x-1}} = c.$$

En posant $a^x = z$, il vient

$$a^2 z - \frac{ab}{z} = c, \quad \text{ou} \quad a^2 z^2 - cz = ab.$$

La dernière équation fait connaître la valeur de z; et si cette inconnue admet une valeur positive, on obtient la valeur correspondante de x en appliquant à l'équation $a^x = z$ ce qui a été dit ci-dessus.

327. Les explications que nous avons données dans les nos 302 et 304, au sujet des intérêts composés et des annuités, supposent que le nombre n est entier. On pourrait convenir d'étendre la formule (1) [page 251] aux valeurs fractionnaires de n. De cette manière, on obtiendrait, dans le calcul des intérêts, des résultats plus réguliers qu'en prenant, selon l'usage ordinaire, l'intérêt proportionnel au temps pour lequel le capital est placé, qu'on nomme *intérêt simple*. Supposons, par exemple, qu'un capital a ait été prêté à intérêt simple, pour un intervalle de temps t. L'intérêt de 1 franc pour un an étant r, l'intérêt de la somme a pour le temps t est art, et le prêteur, à l'expiration de ce temps, reçoit $a(1+rt)$. S'il place cette somme pendant un autre intervalle de temps t', celle qu'il reçoit à l'expiration de ce temps est égale à cette somme multipliée par $1+rt'$; de sorte qu'elle est $a(1+rt)(1+rt')$. Si la somme a eût été placée à intérêt simple, pour le temps

$t+t'$, elle n'eût produit que $a[1+r(t+t')]$; ce qui est moindre que le résultat précédent, puisque

$$(1+rt)(1+rt')=1+r(t+t')+r^2tt'.$$

En calculant les intérêts par la formule de la page 251, le capital a, placé pendant le temps t, produit $a(1+r)^t$; cette somme $a(1+r)^t$, placée pendant le temps t', produit $a(1+r)^t\times(1+r)^{t'}$, ou $a(1+r)^{t+t'}$. La somme a, placée pendant le temps $t+t'$, produit également $a(1+r)^{t+t'}$.

Si, dans la formule que nous venons de rappeler, on prend pour inconnue a, qui est la valeur actuelle de la somme A payable après le temps n, ou la valeur de la somme A à une époque antérieure de n, on obtient $a=\dfrac{A}{(1+r)^n}$, ou $a=A(1+r)^{-n}$; ce qui est la même formule, dans laquelle l'exposant n a été remplacé par $-n$.

328. Relativement aux annuités, supposons qu'en prenant n pour inconnue on obtienne une valeur fractionnaire. Représentons cette valeur par $m+k$, m étant un nombre entier, et k un nombre plus petit que 1. On aura dans ce cas, d'après la formule (2) [page 252].

$$a\,\frac{(1+r)^{m+k}-1}{r}=A(1+r)^{m+k}.$$

Soit $1+r=z$, d'où $r=z-1$; en effectuant la division de $z^{m+k}-1$ par $z-1$, on trouve que le quotient est

$$z^{m+k-1}+z^{m+k-2}+z^{m+k-3}\ldots+z^k+\frac{z^k-1}{z-1}.$$

En remplaçant $\dfrac{(1+r)^{m+k}-1}{r}$ par ce quotient, et remettant $1+r$ au lieu de z, on obtient l'égalité

$$A(1+r)^{m+k}=a\left[(1+r)^{m+k-1}+(1+r)^{m+k-2}\ldots+(1+r)^k+\frac{(1+r)^k-1}{r}\right].$$

Le premier membre de cette égalité exprime la valeur du capital A, après le temps $m+k$. Les termes

$$a(1+r)^{m+k-1},\quad a(1+r)^{m+k-2},\ldots,\quad a(1+r)^k,$$

expriment les valeurs acquises après le même temps par m sommes égales à a, remboursées au prêteur, la première à la fin de la première année depuis le moment de l'emprunt; la deuxième à la fin de la deuxième année; ainsi de suite; et la $m^{ième}$ à la fin de la $m^{ième}$ année. Donc, après ces m remboursements égaux, d'année en année, le débiteur, pour s'acquitter, devra payer, à la fin du temps k, compté du commencement de la $m+1^{ième}$ année, une somme égale à $a\frac{(1+r)^k-1}{r}$. Cette somme est moindre que a, puisque, k étant un nombre plus petit que l'unité, $(1+r)^k < 1+r$.

Si le dernier remboursement ne doit être effectué qu'à la fin de la $m+1^{ième}$ année, la somme $a\frac{(1+r)^k-1}{r}$ devra porter intérêt pendant le temps $1-k$; par conséquent, elle deviendra

$$\frac{a(1+r)^k-1}{r}(1+r)^{1-k}, \quad \text{ou} \quad a\frac{(1+r)-(1+r)^{1-k}}{r}.$$

Cette dernière somme est encore moindre que a, car, $1-k$ étant positif, on a $(1+r)^{1-k} > 1$.

CHAPITRE ONZIÈME.

COMBINAISONS, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS. BINÔME DE NEWTON. PUISSANCES ET RACINES DES POLYNÔMES. NOMBRES FIGURÉS ET SOMMATION DES PILES DE BOULETS.

Des combinaisons, des arrangements et des permutations.

329. Les *combinaisons* ou les *produits différents* de m lettres n à n, sont tous les groupes de n lettres que l'on peut former avec les m lettres, de manière que deux d'entre eux diffèrent au moins par une lettre. Ainsi, les combinaisons ou les produits 2 à 2 des quatre lettres a, b, c, d, sont ab, ac, ad, bc, bd, cd. Les combinaisons ou les produits 3 à 3 de ces quatre lettres, sont abc, abd, acd, bcd.

On forme les *permutations* de n lettres en écrivant ces n lettres les unes à la suite des autres, de toutes les manières possibles. Par exemple, les permutations des deux lettres a et b sont ab, ba; les permutations des trois lettres a, b, c, sont abc, acb, cab, bac, bca, cba.

Les *arrangements* de m lettres n à n sont les résultats que l'on obtient en réunissant n des m lettres, et les disposant entre elles de toutes les manières possibles. Ainsi, les arrangements 2 à 2 des trois lettres a, b, c, sont ab, ba, ac, ca, bc, cb.

Nous allons établir les formules qui donnent le nombre des arrangements de m lettres n à n, celui des permutations de n lettres, et celui des produits de m lettres n à n.

330. Si l'on avait à faire les *arrangements* de m lettres 2 à 2, il suffirait d'écrire successivement, à la suite de chaque lettre, chacune des $m - 1$ autres lettres. On obtiendrait ainsi $m(m-1)$ arrangements.

Pour faire les arrangements de m lettres 3 à 3, il faudrait

écrire successivement, à la suite de chacun des arrangements 2 à 2, chacune des $m-2$ autres lettres; et le nombre d'arrangements qu'on formerait ainsi serait $m(m-1)(m-2)$.

On voit de la même manière que le nombre des arrangements de m lettres 4 à 4 est $m(m-1)(m-2)(m-3)$.

On conclut de là que le nombre des arrangements de m lettres n à n est

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1). \tag{1}$$

Si l'on voulait donner à l'explication qui vient d'être faite une forme plus générale, on la présenterait comme il suit :

Pour faire tous les arrangements de m lettres n à n, si l'on avait ceux des m lettres $n-1$ à $n-1$, il suffirait d'écrire successivement, à la suite de chacun de ceux-ci, les $m-(n-1)$ autres lettres. Par conséquent, *le nombre des arrangements de* m *lettres* n *à* n *est égal à celui des arrangements de* m *lettres* n — 1 *à* n — 1, *multiplié par* m — (n — 1) *ou* m — n + 1. Mais le nombre des arrangements de m lettres 1 à 1 est évidemment m; le nombre des arrangements de m lettres 2 à 2 est donc $m(m-1)$; celui des arrangements de m lettres 3 à 3 est $m(m-1)(m-2)$; ainsi de suite; et le nombre des arrangements n à n est $m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$.

331. On obtient le nombre des *permutations* de n lettres en faisant $m=n$ dans la formule (1), ce qui donne $n(n-1)(n-2)\dots 2\times 1$, ou, en renversant l'ordre des facteurs,

$$1.2..3\dots(n-1)n. \tag{2}$$

On peut parvenir à cette formule sans la faire résulter de celle du nombre des arrangements. En effet, deux lettres a, b, ne donnent que deux permutations ab, ba. Pour faire les permutations de trois lettres, il suffit d'écrire successivement, à la suite de chacune de ces trois lettres, les deux permutations des deux autres; on obtiendra donc 2×3 permutations. Pour faire les permutations de quatre lettres, il suffit d'écrire successivement, à la suite de chacune de ces lettres, les 2×3 permutations des trois autres lettres; on obtiendra ainsi $2\times 3\times 4$ permutations. Ce raisonnement pouvant être con-

tinué indéfiniment, il en résulte que le nombre des permutations de n lettres est $1.2.3\ldots n$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

332. Soit C le nombre des *combinaisons* ou des *produits différents* de m lettres n à n. Représentons par A le nombre des arrangements de m lettres n à n, et par P le nombre des permutations de n lettres. Il est clair que, si l'on avait formé les combinaisons ou les produits différents de m lettres n à n, on obtiendrait les arrangements de ces m lettres n à n en faisant dans chacun des produits différents toutes les permutations des n lettres. Il suit de là que le nombre des arrangements est égal au produit du nombre des combinaisons par celui des permutations, de sorte qu'on a $C \times P = A$, d'où $C = \frac{A}{P}$; et en remplaçant A et P par les valeurs qu'on a obtenues précédemment,

$$(3) \qquad C = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

333. Cette formule peut être établie sans le secours des deux précédentes. A cet effet, désignons, avec M. *Cauchy*, par $(m)_n$ le nombre des combinaisons de m lettres a, b, c, d, etc., prises n à n. Parmi ces combinaisons, celles qui renferment la lettre a sont évidemment en nombre égal au nombre des combinaisons des $m-1$ autres lettres $n-1$ à $n-1$, ou $(m-1)_{n-1}$. Le nombre des combinaisons qui renferment la lettre b est pareillement $(m-1)_{n-1}$; et de même pour chacune des autres lettres. Mais en formant toutes les combinaisons qui renferment la lettre a, puis celles qui renferment la lettre b, etc., on obtient n fois chaque combinaison; car, si $n=3$, par exemple, la combinaison abc se trouve parmi celles qui renferment a, parmi celles qui renferment b, et parmi celles qui renferment c. On conclut de là

$$(m)_n = \frac{m}{n}(m-1)_{n-1}.$$

En remplaçant successivement m et n par $m-1$ et $n-1$,

puis par $m-2$ et $n-2$, etc., on trouve

$$(m-1)_{n-1}=\frac{m-1}{n-1}(m-2)_{n-2},$$

$$(m-2)_{n-2}=\frac{m-2}{n-2}(m-3)_{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m-n+2)_2=\frac{m-n+2}{2}(m-n+1)_1.$$

La valeur de $(m)_n$ se déduit de ces diverses relations, en les multipliant membre à membre, et remarquant que $(m-n+1)_1$ n'est autre que $m-n+1$.

334. Le nombre des combinaisons de m lettres n à n ne pouvant être qu'un nombre entier, il résulte de la formule (3) que le produit de m nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres entiers. Cette proposition est d'ailleurs une conséquence de celle qui a été démontrée dans le n° 233; car, si l'on multiplie les deux termes de l'expression du nombre C par $1.2.3\ldots(m-n)$, elle devient

$$(4)\qquad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots(m-n)}.$$

Celle-ci est un cas particulier de celle que l'on a considérée dans le n° 233.

335. *Le nombre des combinaisons de* m *lettres* m — n *à* m — n, *est égal à celui des combinaisons de* m *lettres* n *à* n. Car, si l'on divisait successivement le produit des m lettres par chacun de leurs produits n à n, on obtiendrait évidemment tous les produits $m-n$ à $m-n$ de ces lettres. On conclut aussi cette proposition de l'expression (4); car elle ne change pas quand on remplace n par $m-n$.

336. Si l'on veut former toutes les combinaisons n à n de m lettres a, b, c, etc., on pourra opérer comme il suit:

Les combinaisons 1 à 1 sont les lettres elles-mêmes. On obtiendra toutes les combinaisons 2 à 2 en écrivant successivement, à la droite de chaque lettre, chacune des lettres suivantes. Au moyen des combinaisons 2 à 2, on formera les

combinaisons 3 à 3, en mettant successivement, à la droite de chacune des combinaisons 2 à 2, chacune des lettres qui suivront la dernière lettre de cette combinaison. On passera de la même manière des combinaisons 3 à 3 aux combinaisons 4 à 4; ainsi de suite. Il est clair que l'on trouvera de cette manière toutes les combinaisons demandées; car si l'on considère une de ces combinaisons, *bef...k*, les lettres étant disposées suivant l'ordre alphabétique, on aura formé la combinaison *be*; au moyen de celle-ci, on aura obtenu la combinaison *bef*; ainsi de suite. De plus, aucune combinaison ne se trouvera répétée; puisque, les lettres se succédant toujours dans l'ordre alphabétique, chaque combinaison contenant p lettres n'aura pu résulter que d'une seule des combinaisons $p-1$ à $p-1$.

337. Nous avons supposé jusqu'ici que chaque combinaison devait ne pas contenir deux fois la même lettre. Supposons actuellement que chaque lettre puisse être combinée avec elle-même et avec toutes les autres, et désignons par $(M)_n$ le nombre des combinaisons n à n que l'on pourra former ainsi avec m lettres. Puisque chaque combinaison contient n lettres, le nombre total des lettres, dans l'ensemble des combinaisons, est $n \times (M)_n$; et puisque le nombre des lettres différentes est m, chaque lettre est répétée un nombre de fois égal à $\frac{n}{m} \times (M)_n$. Mais si, dans chacune des combinaisons qui contiennent la lettre a, on supprimait une fois cette lettre, on devrait obtenir toutes les combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$. Dans ces combinaisons $n-1$ à $n-1$, la lettre a est répétée, d'après la formule précédente, un nombre de fois égal à $\frac{n-1}{m} \times (M)_{n-1}$; et puisqu'on a supprimé une fois la lettre a dans chaque combinaison, cette lettre était d'abord écrite un nombre de fois égal à $\frac{n-1}{m} \times (M)_{n-1} + (M)_{n-1}$. On a donc l'équation

$$\frac{n}{m} \times (M)_n = \frac{n-1}{m} \times (M)_{n-1} + (M)_{n-1},$$

ou bien

$$(M)_n = \frac{m+n-1}{n} (M)_{n-1}.$$

En remplaçant successivement n par $n-1$, puis par $n-2$, etc., on obtient

$$(M)_{n-1}=\frac{m+n-2}{n-1}(M)_{n-2},$$

$$(M)_{n-2}=\frac{m+n-3}{n-2}(M)_{n-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(M)_2=\frac{m+1}{2}(M)_1.$$

On conclut de ces équations, en multipliant membre à membre, et en observant que $(M)_1=m$,

$$(M)_n=\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots n}.$$

Il résulte de cette formule que le nombre des combinaisons de m lettres n à n, quand chaque lettre peut entrer plusieurs fois dans la même combinaison, est égal au nombre des combinaisons, sans répétition, de $m+n-1$ lettres n à n (*).

338. Si l'on avait à former les combinaisons de m lettres n à n, en admettant la répétition des lettres, on suivrait une marche semblable à celle qui a été indiquée dans le n° 336. Mais alors, pour obtenir les combinaisons 2 à 2, il faudrait mettre successivement, à la suite de chaque lettre, cette lettre elle-même et chacune des lettres suivantes; pour obtenir les combinaisons 3 à 3, on écrirait successivement, à la suite de chacune des combinaisons 2 à 2, la dernière lettre de cette combinaison et chacune des lettres suivantes; ainsi de suite.

339. Si l'on permutait les lettres de toutes les manières possibles, dans chacune des combinaisons dont nous venons de nous occuper en dernier lieu, on n'aurait pas le même nombre de permutations pour une combinaison formée de n lettres différentes, et pour une combinaison dans laquelle une

(*) On pourrait remplacer l'explication du n° 333 par une autre semblable à celle du n° 337. Mais, malgré l'avantage de plus d'uniformité, j'ai préféré conserver, à l'égard des combinaisons sans répétition, l'explication la plus simple et la plus directe.

ou plusieurs lettres se trouveraient répétées; en sorte que le nombre total des permutations et le nombre des combinaisons ne peuvent plus se déduire l'un de l'autre. Mais il est facile d'obtenir directement le nombre des permutations de toutes les combinaisons, ou le nombre des arrangements n à n de m lettres, dans lesquels chaque lettre peut être répétée.

Le nombre des arrangements 1 à 1 est évidemment le nombre même des lettres. Si l'on voulait former les arrangements des m lettres 2 à 2, il suffirait d'écrire successivement, à la suite de chaque lettre, cette lettre et chacune des autres; car, en faisant suivre la lettre a de cette lettre elle-même et de chacune des autres, on a tous les arrangements dans lesquels la lettre a occupe le premier rang. De même, en écrivant après la lettre b, cette lettre et chacune des autres, on a tous les arrangements dans lesquels la lettre b occupe le premier rang. On obtiendra ainsi m^2 arrangements 2 à 2. Si l'on veut former les arrangements des m lettres 3 à 3, il faudra écrire successivement, à la suite de chacun des arrangements 2 à 2, chacune des m lettres; par là on aura m^3 arrangements. On verra de même que le nombre des arrangements 4 à 4 sera m^4, etc. Le nombre des arrangements n à n sera donc m^n.

Développement des puissances entières et positives d'un binôme, ou binôme de NEWTON.

340. On nomme *formule du binôme* de NEWTON, ou simplement *binôme de Newton*, une formule découverte par NEWTON, au moyen de laquelle on obtient une puissance quelconque du binôme $x+a$, sans passer par les puissances précédentes.

En formant par la multiplication les puissances successives de $x+a$, on trouve

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La loi des exposants de x et de a dans ces résultats est évi-

dente. A l'égard des coefficients, on voit que ceux du premier terme et du dernier terme sont l'unité, que celui du second terme est l'exposant de la puissance, et que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux; mais, à partir de la quatrième puissance, on n'aperçoit pas la loi d'après laquelle se forment les coefficients des termes qui suivent les deux premiers.

Pour rendre la composition des produits plus manifeste, en évitant les réductions qui donnent naissance aux coefficients, il suffit de multiplier entre eux des binômes dont les seconds termes soient différents; comme on le voit ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l}
(x+a)(x+b) = x^2 + a & x + ab \\
+ b &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + a & x^2 + ab & x + abc \\
+ b & + ac & \\
+ c & + bc &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l|l}
(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + a & x^3 + ab & x^2 + abc & x + abcd \\
+ b & + ac & + abd & \\
+ c & + bc & + acd & \\
+ d & + ad & + bcd & \\
 & + bd & & \\
 & + cd & &
\end{array}$$

Dans chacun de ces produits, l'exposant de x va en diminuant d'une unité depuis le premier terme, où il est égal au nombre des facteurs binômes, jusqu'au dernier terme, où il est nul. Le coefficient du premier terme est l'unité; le coefficient du second terme est la somme des seconds termes des binômes; celui du troisième terme est la somme des produits de ces mêmes seconds termes pris deux à deux; ainsi de suite. Le dernier terme est le produit des seconds termes des binômes.

On démontre que cette loi est générale, en faisant voir que, si elle est vraie pour le produit de m binômes, elle sera vraie aussi pour le produit de $m+1$ binômes.

Supposons donc qu'on ait formé le produit de m binômes $x+a$, $x+b$, ..., $x+k$. Désignons par P_1 la somme des seconds termes des binômes, par P_2 la somme des produits différents de ces seconds termes pris deux à deux, par P_3 la

somme de leurs produits trois à trois, ainsi de suite, enfin par P_m le produit de tous ces seconds termes; et admettons que le produit des binômes proposés soit

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + P_3 x^{m-3} \ldots + P_m.$$

En multipliant ce polynôme par un nouveau binôme $x + l$, on obtient le produit ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{r} x^{m+1} + P_1 \\ + l \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^m + P_2 \\ + lP_1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^{m-1} + P_3 \\ + lP_2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x^{m-2} \ldots + P_m \\ . + lP_{m-1} \end{array}\right| \begin{array}{r} x \\ + lP_m. \end{array}$$

La loi des exposants de x n'a pas changé. Quant aux coefficients, celui du premier terme est toujours égal à l'unité, et celui du second terme est la somme des seconds termes des $m + 1$ binômes. Le coefficient du troisième terme se compose de la somme des produits deux à deux des seconds termes des m facteurs binômes du premier produit, augmentée de la somme de ces mêmes seconds termes multipliée par l; ce qui forme évidemment la somme des produits différents des seconds termes des $m + 1$ binômes pris deux à deux. Le coefficient du quatrième terme se compose de la somme des produits trois à trois des seconds termes des m facteurs du premier produit, augmentée de la somme des produits deux à deux de ces seconds termes multipliés par l; ce qui forme évidemment la somme des produits différents des seconds termes des $m + 1$ binômes pris trois à trois. Ainsi de suite. Enfin, le dernier terme est égal au produit des seconds termes des m premiers facteurs binômes multiplié par l; il est donc le produit des seconds termes des $m + 1$ binômes.

De ce que la loi supposée vraie pour m facteurs est vraie aussi pour $m + 1$ facteurs, on conclut, puisqu'elle est vérifiée pour deux facteurs, qu'elle est vraie pour trois; étant vraie pour trois facteurs, elle est vraie pour quatre; ainsi de suite; donc elle est générale (*).

(*) On peut reconnaître la loi des coefficients des puissances de x dans le produit $(x + a)(x + b)\ldots(x + k)$, d'un nombre quelconque de binômes, sans procéder par induction. En effet, ce produit est la somme de tous ceux que l'on peut former en prenant un terme dans chacun des binômes et multipliant entre eux tous ces termes. Le produit des premiers termes des binômes est x^m; celui

dente. A l'égard des coefficients, on voit que ceux du premier terme et du dernier terme sont l'unité, que celui du second terme est l'exposant de la puissance, et que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux; mais, à partir de la quatrième puissance, on n'aperçoit pas la loi d'après laquelle se forment les coefficients des termes qui suivent les deux premiers.

Pour rendre la composition des produits plus manifeste, en évitant les réductions qui donnent naissance aux coefficients, il suffit de multiplier entre eux des binômes dont les seconds termes soient différents; comme on le voit ci-dessous :

$$(x+a)(x+b) = \begin{array}{l|l} x^2+a & x+ab \\ \quad\;\, +b & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = \begin{array}{l|l|l} x^3+a & x^2+ab & x+abc \\ \quad\;\, +b & \quad\;\, +ac & \\ \quad\;\, +c & \quad\;\, +bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = \begin{array}{l|l|l|l} x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd \\ \quad\;\, +b & \quad\;\, +ac & \quad\;\, +abd & \\ \quad\;\, +c & \quad\;\, +bc & \quad\;\, +acd & \\ \quad\;\, +d & \quad\;\, +ad & \quad\;\, +bcd & \\ & \quad\;\, +bd & & \\ & \quad\;\, +cd & & \end{array}$$

Dans chacun de ces produits, l'exposant de x va en diminuant d'une unité depuis le premier terme, où il est égal au nombre des facteurs binômes, jusqu'au dernier terme, où il est nul. Le coefficient du premier terme est l'unité; le coefficient du second terme est la somme des seconds termes des binômes; celui du troisième terme est la somme des produits de ces mêmes seconds termes pris deux à deux; ainsi de suite. Le dernier terme est le produit des seconds termes des binômes.

On démontre que cette loi est générale, en faisant voir que, si elle est vraie pour le produit de m binômes, elle sera vraie aussi pour le produit de $m+1$ binômes.

Supposons donc qu'on ait formé le produit de m binômes $x+a$, $x+b$, ..., $x+k$. Désignons par P_1 la somme des seconds termes des binômes, par P_2 la somme des produits différents de ces seconds termes pris deux à deux, par P_3 la

somme de leurs produits trois à trois, ainsi de suite, enfin par P_m le produit de tous ces seconds termes; et admettons que le produit des binômes proposés soit

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + P_3 x^{m-3} \ldots + P_m.$$

En multipliant ce polynôme par un nouveau binôme $x + l$, on obtient le produit ci-dessous :

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} x^{m+1} + P_1 & x^m + P_2 & x^{m-1} + P_3 & x^{m-2} \ldots + P_m & x \\ + l & + lP_1 & + lP_2 & \ldots + lP_{m-1} & \quad + lP_m. \end{array}$$

La loi des exposants de x n'a pas changé. Quant aux coefficients, celui du premier terme est toujours égal à l'unité, et celui du second terme est la somme des seconds termes des $m + 1$ binômes. Le coefficient du troisième terme se compose de la somme des produits deux à deux des seconds termes des m facteurs binômes du premier produit, augmentée de la somme de ces mêmes seconds termes multipliée par l; ce qui forme évidemment la somme des produits différents des seconds termes des $m + 1$ binômes pris deux à deux. Le coefficient du quatrième terme se compose de la somme des produits trois à trois des seconds termes des m facteurs du premier produit, augmentée de la somme des produits deux à deux de ces seconds termes multipliés par l; ce qui forme évidemment la somme des produits différents des seconds termes des $m + 1$ binômes pris trois à trois. Ainsi de suite. Enfin, le dernier terme est égal au produit des seconds termes des m premiers facteurs binômes multiplié par l; il est donc le produit des seconds termes des $m + 1$ binômes.

De ce que la loi supposée vraie pour m facteurs est vraie aussi pour $m + 1$ facteurs, on conclut, puisqu'elle est vérifiée pour deux facteurs, qu'elle est vraie pour trois; étant vraie pour trois facteurs, elle est vraie pour quatre; ainsi de suite; donc elle est générale (*).

(*) On peut reconnaître la loi des coefficients des puissances de x dans le produit $(x + a)(x + b) \ldots (x + k)$, d'un nombre quelconque de binômes, sans procéder par induction. En effet, ce produit est la somme de tous ceux que l'on peut former en prenant un terme dans chacun des binômes et multipliant entre eux tous ces termes. Le produit des premiers termes des binômes est x^m; celui

coefficient du terme qui en a n avant lui, ce terme sera $Ka^n x^{m-n}$; et par le changement de x en a et de a en x, il deviendra $Kx^n a^{m-n}$. Le terme $Kx^n a^{m-n}$ devra donc se trouver aussi dans le développement, et il en aura n après lui. Le coefficient du terme qui en a n après lui est donc le même que celui du terme qui en a n avant lui.

345. Pour obtenir le développement de $(x-a)^m$, il suffit de changer a en $-a$, dans le développement de $(x+a)^m$. Par ce changement, les termes de rang pair, qui contiennent des puissances impaires de a, prennent le signe $-$, et les termes de rang impair ne changent pas de signe; on a donc

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots$$

346. En supposant $x=1$ et $a=1$, dans la formule qui donne le développement de $(x+a)^m$, on voit que *La somme des coefficients, en y comprenant les coefficients des deux termes extrêmes, est égale à* 2^m.

En faisant les mêmes suppositions dans la formule qui donne le développement de $(x-a)^m$, on reconnaît que *La somme des coefficients des termes de rang impair est égale à la somme des coefficients des termes de rang pair.*

347. En appliquant la formule du binôme au développement de la puissance $m^{ième}$ de chacune des expressions imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et en ayant égard à ce qui a été dit sur les puissances de $\sqrt{-1}$ (n° 207), on trouve les deux formules ci-après:

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m = \begin{cases} \alpha^m - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4 + \ldots \\ + \left[m\alpha^{m-1} - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}\beta^2 + \ldots\right]\beta\sqrt{-1}, \end{cases}$$

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^m = \begin{cases} \alpha^m - \dfrac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4 - \ldots \\ - \left[m\alpha^{m-1} - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}\beta^2 + \ldots\right]\beta\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Puissances des polynômes.

348. Soit le polynôme $a+b+c+d+$ etc., qu'on doit élever à la $m^{ième}$ puissance. Si l'on fait $b+c+d+\ldots=x$, on aura à développer $(a+x)^m$. Si l'on fait ensuite $c+d+\ldots=y$, les puissances de x seront celles du binôme $b+y$; ainsi de suite. On parviendrait ainsi au développement de $(a+b+c+d+\ldots)^m$; et on pourrait trouver par ce moyen l'expression d'un terme quelconque, ou le terme général du développement. Mais on parvient aussi à reconnaître la composition des puissances d'un polynôme, par une autre considération fort simple, et sans passer par les puissances d'un binôme.

Si l'on formait par la multiplication le produit de m polynômes égaux à $a+b+c+d+$ etc., sans faire aucune réduction de termes semblables, les termes du produit seraient tous les produits formés avec un terme quelconque du premier facteur, un terme quelconque du second facteur, ainsi de suite jusqu'au $m^{ième}$ facteur; c'est-à-dire, tous les arrangements m à m des lettres a, b, c, d, etc., avec répétition des lettres (n° 339). Après la réduction des termes semblables, les termes du produit, abstraction faite des coefficients, seront les combinaisons m à m des lettres a, b, c, d, etc., prises chacune une ou plusieurs fois; et le coefficient de chaque combinaison sera le nombre des permutations qui pourront être effectuées entre toutes les lettres qui s'y trouveront contenues. Il ne s'agit donc que de trouver l'expression de ce nombre de permutations.

Considérons à cet effet un produit quelconque $a^n b^p c^q \ldots$ de m facteurs. Si les facteurs étaient tous différents, le nombre des permutations serait $\text{P}=1.2.3\ldots m$. Quand n facteurs deviennent égaux, les permutations qui ne différaient entre elles que par la disposition de ces facteurs sont rendues identiques. Or, le nombre des permutations différentes seulement les unes des autres par la disposition de n facteurs, est celui des permutations de ces n facteurs; donc il est $1.2.3\ldots n$. Donc, en nommant P' le nombre des permutations dans le cas de l'égalité de n facteurs, tous les autres étant différents,

$P' = \frac{P}{1.2\ldots n}$. Si d'autres facteurs, en nombre p, deviennent égaux entre eux, sans être égaux aux premiers, le nombre des permutations se réduira de la même manière; de sorte qu'il deviendra $\frac{P'}{1.2\ldots p}$, ou $\frac{P}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots p}$. Ainsi de suite. Le nombre des permutations qui pourront être effectuées dans le produit proposé $a^n b^p c^q \ldots$ est donc

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \ldots} \ (*).$$

Il suit de là que le terme général de $(a+b+c+d+\ldots)^m$ est

$$(1) \qquad \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots p \times 1.2\ldots q\ldots} a^n b^p c^q \ldots,$$

avec la condition

$$(2) \qquad n+p+q+\ldots = m.$$

Pour obtenir tous les termes de $(a+b+c+d+\ldots)^m$, on devra donner aux exposants n, p, q, etc., dans la formule (1), toutes les valeurs entières positives, y compris zéro, qui vérifieront l'équation (2); et si $n=0$, par exemple, il faudra ne pas tenir compte de la suite $1.2.3\ldots n$; car les nombres par lesquels on doit diviser $1.2.3\ldots m$, sont seulement les nombres de permutations correspondants aux différents groupes de facteurs égaux contenus dans le produit $a^n b^p c^q \ldots$ On pourra aussi former toutes les combinaisons différentes m à m des lettres a, b, c, etc., prises chacune une ou plusieurs fois, comme cela a été expliqué dans le n° 338; et donner ensuite à chacune de ces combinaisons le coefficient déterminé par la formule (1).

Si N est le nombre des termes différents du polynôme $a+b$

(*) Si l'on prend pour exemple le produit a^3b^2, ou $aaabb$, le nombre des permutations différentes de ce produit sera $\frac{2.3.4.5}{2.3 \times 2}$, ou 10. On peut le vérifier en formant ces permutations. A cet effet, on écrira d'abord la lettre b à toutes les places dans le produit aaa; on mettra ensuite, dans tous les résultats, la seconde lettre b à gauche de la première, et on la fera successivement avancer jusqu'à la première place.

$+c+d+$ etc., le nombre des termes de $(a+b+c+d+\ldots)^m$ sera donné par la formule du n° 337, dans laquelle il faudra remplacer m par N et n par m. La somme de tous les coefficients sera N^m.

349. Si l'on avait à former une puissance d'un polynôme ordonné suivant les puissances de x

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots,$$

le terme général deviendrait

$$\frac{1.2.3\ldots m\times a^n b^p c^q\ldots}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots p\times 1.2\ldots q\times\ldots}x^{p+2q+3r+\ldots}.$$

Pour obtenir tous les termes dans lesquels x aurait un même exposant k, il faudrait déterminer les exposants n, p, q, r, etc., au moyen des deux équations

$$n+p+q+r+\ldots=m,\quad p+2q+3r+\ldots=k.$$

Mais, si l'on voulait avoir tous les termes de la puissance, ou même seulement tous ceux dans lesquels l'exposant de x ne surpasserait pas une limite donnée, il y aurait peu d'avantage à se servir des formules générales que nous venons d'établir; et il serait plus commode d'opérer par la multiplication.

Extraction des racines des polynômes.

350. On a vu, dans l'Arithmétique, comment on déduit de la composition du carré et du cube de la somme de deux nombres, les règles relatives à l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique des nombres. On déduit pareillement, de la connaissance des deux premiers termes x^m+max^{m-1} du développement de $(x+a)^m$, les règles qu'il faut suivre pour extraire les racines de degrés quelconques des nombres; et elles sont analogues à celles qui concernent les racines carrées et cubiques; mais comme ces règles trouvent peu d'applications, nous passerons immédiatement à l'extraction des racines des polynômes.

351. Supposons qu'on ait à extraire la racine $m^{ième}$ d'un polynôme P.

Le polynôme P étant le produit de m facteurs égaux à la racine cherchée, si l'on conçoit que ce polynôme et la racine soient ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une lettre x, le premier terme du polynôme P sera le produit de m facteurs égaux au premier terme de la racine ; par conséquent, le premier terme de la racine sera la racine $m^{ième}$ du premier terme de P.

Afin de ne pas avoir à faire plusieurs explications semblables, supposons que l'on ait obtenu un nombre quelconque de termes de la racine, et cherchons comment on pourra obtenir le terme suivant.

Soient A la somme des termes connus de la racine, et B la somme des autres termes ; on aura $P = (A + B)^m$; d'où, en nommant R le reste $P - A^m$,

$$R = mA^{m-1}B + \frac{m(m-1)}{1.2}A^{m-2}B^2 + \ldots.$$

Désignons par α le premier terme de la racine, et par λ le terme de B qui contient le plus fort exposant de x, et qui est celui que l'on veut trouver. Le terme qui contient le plus haut exposant de x dans le produit $mA^{m-1}B$, sera $m\alpha^{m-1}\lambda$. Les termes de plus fort exposant dans les produits $A^{m-2}B^2$, $A^{m-3}B^3$, etc., seront $\alpha^{m-2}\lambda^2$, $\alpha^{m-3}\lambda^3$, etc. Or, l'exposant de x dans $\alpha^{m-1}\lambda$ surpasse celui de cette lettre dans $\alpha^{m-2}\lambda^2$, puisque l'un des facteurs α du premier produit est remplacé dans le second par λ, qui contient x à une moindre puissance que α. Par une raison semblable, l'exposant de x dans $\alpha^{m-3}\lambda^3$ est moindre que dans $\alpha^{m-2}\lambda^2$; ainsi de suite.

Il suit de là que le terme de R qui contient le plus fort exposant de x est égal à $m\alpha^{m-1}\lambda$. Par conséquent, pour obtenir le terme λ, il faut diviser le premier terme de R par $m\alpha^{m-1}$.

Cette conclusion jointe à ce qui a été dit pour la détermination du premier terme de la racine, donne la règle suivante :

Pour extraire la racine m^{ième} *d'un polynôme* P, *ordonnez-le suivant les puissances d'une lettre. Prenez la racine* m^{ième} *du premier terme; vous aurez le premier terme de la racine. Divisez le* 2^e *terme de* P *par* m *fois la* (m—1)^{ième} *puissance*

du premier terme de la racine; vous aurez le 2^e terme de cette racine. Retranchez de P *la* m^ième *puissance de la somme des deux termes trouvés, et divisez le premier terme du reste par* m *fois la* $(m-1)^{\text{ième}}$ *puissance du premier terme de la racine; vous aurez le* 3^e *terme. Ainsi de suite.*

Lorsque le polynôme P est une puissance exacte, ces opérations conduisent à un reste nul. Réciproquement, quand on parvient à un reste nul, le polynôme P est une puissance exacte; et la quantité qu'on a trouvée est sa racine.

352. Les réductions qui se produisent à chaque soustraction amènent toujours un reste nul, ou un reste par lequel on reconnaît que le polynôme proposé n'est pas une puissance. En effet, supposons le polynôme P du degré mp. L'extraction de la racine $m^{ième}$ du premier terme donnera un terme α du degré p; le reste $P-\alpha^m$ sera au plus du degré $mp-1$; et en divisant le premier terme de ce reste par $m\alpha^{m-1}$, on aura un terme dont le degré sera au plus $mp-1-(m-1)p$, ou $p-1$. Soient A la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs résultant de l'opération, R le reste $P-A^m$, et λ le terme qu'on trouvera en divisant le premier terme de R par $m\alpha^{-1}$. La quantité qu'on soustraira de R sera $(A+\lambda)^m-A^m$, ou $mA^{m-1}\lambda+$ etc. Cette quantité contiendra le terme $m\alpha^{m-1}\lambda$, qui sera égal au premier terme de R; et ses autres termes, suivant ce qui a été expliqué ci-dessus, auront des degrés moindres. Donc, après la soustraction, le degré du reste sera inférieur à celui de R. Donc aussi le terme qu'on trouvera après λ sera d'un degré moindre que celui-ci.

Quand il y a une racine exacte, son dernier terme est la racine $m^{ième}$ du dernier terme du polynôme. Donc, lorsqu'on aura obtenu un terme dont le degré sera moindre que celui qui sera déterminé par cette condition, on sera assuré que l'opération ne se terminera pas.

353. Le polynôme P étant $Ax^{mp}+Bx^{mp-1}+$ etc., l'opération fait trouver des termes entiers par rapport à x, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un reste R du degré $mp-p-1$, ou d'un degré moindre. On a ainsi décomposé le polynôme P en deux parties, dont l'une est la puissance $m^{ième}$ d'un polynôme entier

par rapport à x, et l'autre est du degré $mp-p-1$, ou de degré moindre. Il n'existe qu'une seule décomposition semblable d'un polynôme donné; car les termes qui résultent de l'opération, jusqu'à ce que l'on soit parvenu au reste R, ne dépendent pas des termes du polynôme P dont le degré est moindre que $mp-p$; par conséquent, si Q est l'ensemble des termes qu'on a trouvés, et si Z est un polynôme d'un degré moindre que $mp-p$, et tel que $P-Z$ soit une puissance $m^{ième}$, la racine $m^{ième}$ de $P-Z$ sera Q; et, par suite, on aura $Z=R$.

354. Quand le premier terme du polynôme P n'est pas une puissance $m^{ième}$, on peut multiplier ce polynôme par un facteur a dépendant d'une seule puissance de x, de manière que le premier terme du produit Pa ait une racine exacte. Si Q est la racine $m^{ième}$ de Pa, celle de P est $\frac{Q}{\sqrt[m]{a}}$.

Comme la racine $m^{ième}$ du premier terme du polynôme Pa est rationnelle, l'opération ne peut faire trouver que des termes rationnels; par conséquent, pour qu'elle se termine, il faut que le dernier terme de Pa soit aussi une puissance $m^{ième}$.

355. Au lieu d'ordonner suivant des puissances décroissantes, on peut ordonner suivant des puissances croissantes; il n'y aura rien de changé aux calculs, et l'explication sera aussi la même. Dans ce cas, on reconnaîtra que le polynôme proposé n'est pas une puissance, quand on obtiendra un terme dont le degré surpassera celui de la racine $m^{ième}$ du dernier terme.

356. Lorsque le polynôme proposé ne contient aucun dénominateur littéral ou numérique, s'il est une puissance $m^{ième}$, sa racine ne peut pas être fractionnaire; par conséquent on est assuré que l'opération ne se terminera pas, lorsqu'on parvient à un reste dont le premier terme n'est pas divisible par m fois la $(m-1)^{ième}$ puissance du premier terme de la racine.

357. On n'a pas eu égard, pour l'extraction de la racine $m^{ième}$ des polynômes, à ce qui a été dit des diverses racines d'un même degré d'une quantité quelconque (n° 215); mais on verra dans la suite que ces racines se déduisent de l'une d'entre

elles ; et on les trouverait toutes par la règle ci-dessus, si l'on considérait successivement toutes les racines $m^{\text{ièmes}}$ du premier terme du polynôme.

Triangle arithmétique et nombres figurés.

358. D'après la loi des exposants de x et de a dans le développement de $(x+a)^m$, et sans connaître celle des coefficients, on peut poser

$$(x+a)^m = x^m + \mathrm{A}ax^{m-1} + \mathrm{B}a^2x^{m-2} + \mathrm{C}a^3x^{m-3} + \ldots .$$

En multipliant par $x+a$, il vient

$$\begin{aligned}(x+a)^{m+1} = x^{m+1} &+ \mathrm{A}ax^m + \mathrm{B}a^2x^{m-1} + \mathrm{C}a^3x^{m-2} + \ldots .\\ &+ ax^m + \mathrm{A}a^2x^{m-1} + \mathrm{B}a^3x^{m-2} + \ldots .\end{aligned}$$

On conclut de là que *Le coefficient d'un terme de la* $(\mathrm{m}+1)^{\text{ième}}$ *puissance de* $\mathrm{x}+\mathrm{a}$, *est la somme du coefficient du terme du même rang et de celui du terme précédent dans la puissance* $\mathrm{m}^{\text{ième}}$.

359. En se fondant sur cette proposition, on peut former les coefficients des puissances successives de $x+a$, comme on le voit dans le tableau suivant :

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,...
	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,...
		1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,...
			1,	4,	10,	20,	35,	56,...
				1,	5,	15,	35,	70,...
					1,	6,	21,	56,...
						1,	7,	28,...
							1,	8,...
								1,...

La première colonne est formée d'un seul terme qui est 1. La deuxième colonne est formée du nombre 1 écrit deux fois. On forme la troisième colonne en plaçant à côté de chaque terme de la deuxième colonne, le nombre qu'on obtient en ajoutant à ce terme celui qui est au-dessus : on trouve ainsi pour le premier terme de la troisième colonne, 1 + 0 ou 1 ;

le deuxième terme est $1+1$ ou 2; et le troisième terme est $0+1$ ou 1. La quatrième colonne se déduit de la troisième comme celle-ci de la deuxième. Ainsi de suite. Les deux termes de la deuxième colonne pouvant être considérés comme les coefficients de la première puissance de $x+a$, il résulte de la règle ci-dessus que les termes de la troisième colonne sont les coefficients du développement de $(x+a)^2$; que ceux de la quatrième colonne sont les coefficients du développement de $(x+a)^3$, etc.

Ce tableau, inventé par Pascal, a reçu le nom de *triangle arithmétique*; il peut être prolongé indéfiniment.

360. Il suit de la composition du triangle arithmétique, que le $p^{ième}$ terme d'une ligne horizontale quelconque est la somme des p premiers termes de la ligne horizontale précédente. Car, si l'on considère, par exemple, le sixième terme de la quatrième ligne, qui est 56; il a été formé en ajoutant les deux nombres 21 et 35 qui sont placés à sa gauche, dans la troisième ligne et dans la quatrième; mais 35 est la somme des termes 15 et 20 de ces deux lignes; 20 est la somme des termes 10 et 10 des mêmes lignes; le terme 10 de la quatrième ligne est la somme des termes 6 et 4; enfin, 4 est la somme des termes 3 et 1; on a donc $56 = 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1$.

361. Le principe sur lequel est fondée la construction du triangle arithmétique, et la propriété que nous venons de faire remarquer, peuvent se déduire de la théorie des combinaisons. En effet, le coefficient du $(n+1)^{ième}$ terme de la $(m+1)^{ième}$ puissance de $x+a$ est égal au nombre des combinaisons de $m+1$ lettres prises n à n. Or, ces combinaisons peuvent être considérées comme composées de deux parties, savoir : des combinaisons qui ne renferment pas une des lettres, a par exemple, et dont le nombre est celui des combinaisons de m lettres n à n; et des combinaisons qui renferment la lettre a, et dont le nombre est celui des combinaisons de m lettres $n-1$ à $n-1$. D'après cela, en faisant usage de la même notation que dans le n° 333, on a

$$(1) \qquad (m+1)_n = (m)_n + (m)_{n-1};$$

cette égalité démontre la proposition qui a été établie dans le n° 358.

Pour démontrer par la théorie des combinaisons, que le $p^{ième}$ terme d'une ligne horizontale du triangle arithmétique est la somme des p premiers termes de la ligne horizontale précédente, il faut remarquer que le premier terme de la $(n+1)^{ième}$ ligne horizontale du triangle arithmétique appartenant à la $(n+1)^{ième}$ colonne verticale, il s'ensuit que le $p^{ième}$ terme de la $(n+1)^{ième}$ ligne horizontale est dans la $(n+p)^{ième}$ colonne verticale; de sorte qu'il est l'un des coefficients du développement de $(x+a)^{n+p-1}$; et il est le coefficient du $(n+1)^{ième}$ terme de ce développement, puisqu'il occupe dans la colonne verticale le $(n+1)^{ième}$ rang. Ce terme est donc le nombre des combinaisons de $n+p-1$ lettres prises n à n, ou $(n+p-1)_n$.

Cela posé, si l'on remplace, dans la formule (1), m par $n+p-2$, on obtient la suivante :

$$(n+p-1)_n = (n+p-2)_n + (n+p-2)_{n-1};$$

et en remplaçant successivement dans celle-ci p par $p-1$, par $p-2, \ldots$, par $p-(p-2)$ ou 2, on forme une suite d'égalités desquelles on conclut, en observant que $(n)_n = 1$,

$$(n+p-1)_n = (n+p-2)_{n-1} + (n+p-3)_{n-1} \ldots + (n)_{n-1} + 1.$$

Cette égalité démontre le principe qu'il s'agissait d'établir; car le $p^{ième}$ terme de la $(n+1)^{ième}$ ligne étant $(n+p-1)_n$, les p premiers termes de la $n^{ième}$ ligne sont, dans l'ordre décroissant, $(n+p-2)_{n-1}$, $(n+p-3)_{n-1}, \ldots, 1$.

362. Les nombres qui composent les différentes lignes du triangle arithmétique, à partir de la 2e ligne, sont appelés nombres *figurés*. Les nombres de la 2e ligne, ou les nombres naturels, sont les nombres figurés du 1er ordre; les nombres de la 3e ligne sont les nombres figurés du 2e ordre; les nombres de la 4e ligne sont les nombres figurés du 3e ordre; ainsi de suite. Les nombres figurés du 2e ordre sont aussi nommés nombres *triangulaires*; et ceux du 3e ordre, nombres *pyramidaux trian-*

gulaires. On appréciera bientôt la raison de ces dénominations (*).

D'après ce qui a été dit dans les nos 360 et 361, la somme des p premiers nombres figurés de l'ordre n est égale au $p^{ième}$ nombre figuré de l'ordre $n+1$; celui-ci est le nombre des combinaisons de $n+p$ lettres $n+1$ à $n+1$, et son expression est, d'après la formule du n° 332,

$$(2) \qquad \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Pour obtenir la somme des p premiers nombres naturels, on fera $n=1$ dans la formule (2) : elle deviendra $\frac{p(p+1)}{2}$, ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu en nous occupant des progressions par différence.

Sommation des piles de boulets.

363. Les piles de boulets sont composées d'une suite de tranches horizontales, disposées de telle sorte que les boulets de chaque tranche se trouvent placés au-dessus des vides des boulets de la tranche immédiatement inférieure; tous les boulets se touchent et sont de même calibre.

La *pile triangulaire* a la forme d'une pyramide triangulaire dont la base est un triangle équilatéral. Chaque tranche est formée d'une suite de files de boulets telles que, à partir de l'un des sommets de la tranche, la première file, qui est le sommet lui-même, ne contient qu'un seul boulet; la deuxième file en contient 2; la troisième file en contient 3; etc. Il résulte de cette disposition des files et de la disposition des tranches horizontales les unes à l'égard des autres, que les nom-

(*) La dénomination de nombres figurés ne s'applique pas seulement aux nombres qui composent le triangle arithmétique de Pascal; elle a été étendue à beaucoup d'autres suites de nombres, parmi lesquelles sont comprises la suite des carrés des nombres naturels, qu'on nomme *nombres carrés*, et la suite des nombres qui se forment par l'addition de plusieurs termes consécutifs de la suite des carrés des nombres naturels, à partir de 1. Mais la théorie de ces diverses suites de nombres figurés n'est qu'un simple objet de curiosité.

bres de boulets des différentes tranches, à partir du sommet, sont

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad 1+2+3+4, \ldots$$

Ces nombres sont ceux qui composent la 3e ligne du triangle arithmétique, ou les nombres *triangulaires*. Par conséquent, si le nombre des boulets d'un des côtés de la base est représenté par p, on obtiendra le nombre des boules de la pile en faisant dans la formule (2) $n = 2$; ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{p(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

La *pile quadrangulaire* a la forme d'une pyramide quadrangulaire dont la base est un carré. Cette pile est composée, à partir du sommet, d'une suite de tranches dont la première contient un seul boulet; la deuxième en contient 2^2; la troisième en contient 3^2; ainsi de suite. De sorte que, si le nombre des boulets d'un des côtés de la base est p, le nombre des boulets de la pile est

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + p^2.$$

Pour obtenir la formule qui donne la valeur de cette somme, nous remarquerons que, d'après la disposition des boulets dans les tranches carrées et triangulaires, on voit immédiatement qu'une tranche carrée dont le côté contient n boulets, se compose d'autant de boulets qu'il s'en trouve dans deux tranches triangulaires dont l'une contient n boulets sur chaque côté, et l'autre en contient $n - 1$. C'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier par les expressions de ces deux nombres; le nombre des boulets d'une tranche triangulaire dont le côté contient n boulets, ou le $n^{ième}$ nombre triangulaire, est $\frac{n(n+1)}{2}$; en changeant n en $n-1$, on obtient $\frac{(n-1)n}{2}$, et la somme de ces deux quantités est n^2.

On conclut de cette observation que la somme ci-dessus, $1 + 2^2 + 3^2 \ldots + p^2$, est égale à la somme des p premiers termes de la suite des nombres triangulaires, augmentée de la somme des $p - 1$ premiers termes de la même suite. Or, on vient de voir que la somme des p premiers nombres triangu-

laires est $\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}$; et en changeant dans cette expression p en $p-1$, on trouve celle-ci : $\frac{(p-1)p(p+1)}{1.2.3}$. On obtiendra donc le nombre des boulets de la pile quadrangulaire en ajoutant ces deux quantités; ce qui donne

$$(4) \qquad \frac{p(p+1)(2p+1)}{1.2.3}.$$

La pile qu'on nomme *rectangulaire* a pour base un rectangle et se termine par une file de boulets. Soit $p+1$ le nombre des boulets de la file supérieure. La tranche située immédiatement au-dessous sera formée de deux files contenant chacune $p+2$ boulets, de sorte que le nombre des boulets de cette tranche sera $2(p+2)$; le nombre des boulets de la tranche suivante sera $3(p+3)$; ainsi de suite. Enfin, si le nombre des boulets du petit côté de la base est n, le nombre des boulets de la base sera $n(p+n)$. Le nombre des boulets de la pile sera donc

$$p+1+2(p+2)+3(p+3)\ldots+n(p+n).$$

Cette somme se compose de deux parties, dont l'une est $p(1+2+3\ldots+n)$, et l'autre est $1+2^2+3^2\ldots+n^2$. La première partie a pour expression $\frac{p\times n\times(n+1)}{2}$; et d'après la formule (4), la seconde partie est exprimée par $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$. On obtiendra donc le nombre des boulets de la pile rectangulaire en faisant la somme de ces deux quantités; ce qui donne

$$(5) \qquad \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{1.2.3}.$$

Pour évaluer le nombre des boulets contenus dans une pile tronquée, il faut prendre la différence de deux piles complètes.

Sommation des puissances semblables et entières d'une suite de nombres en progression par différence.

364. Soit la progression par différence.

$$a.b.c.d...l,$$

et désignons pas r la raison, par n le nombre des termes. On a

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad d = c + r, \ldots;$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance $m + 1$,

$$b^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)ra^m + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}r^2a^{m-1}\ldots + r^{m+1},$$

$$c^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)rb^m + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}r^2b^{m+1}\ldots + r^{m+1},$$

....

On a pareillement

$$(l+r)^{m+1} = l^{m+1} + (m+1)rl^m + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}r^2l^{m-1}\ldots + r^{m+1},$$

....

Posons généralement $S_p = a^p + b^p + c^p \ldots + l^p$. En ajoutant toutes les égalités précédentes, on obtient

$$(1) \quad (l+r)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)rS_m + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}r^2S_{m-1}\ldots + nr^{m+1}.$$

L'équation (1) fait connaître S_m quand on connaît les sommes des puissances des degrés moindres, S_{m-1}, S_{m-2}, etc.; on obtiendra donc ces différentes sommes en faisant successivement $m = 1, = 2, = 3$, etc.

Si l'on résout l'équation (1) par rapport à S_m, elle sera

$$(2) \quad S_m = \frac{(l+r)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{2}rS_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2\,.\,3}r^2S_{m-2}\ldots - \frac{nr^m}{m+1}.$$

On peut écrire S_0 au lieu de n; car $a^0 + b^0 + c^0 \ldots + l^0 = n$. De cette manière tous les termes du second membre de la formule (2) sont compris dans la même loi.

Comme application, considérons la suite naturelle des nombres; on a $r = 1$, $a = 1$, $l = n$; et en faisant d'abord $m = 1$, on trouve

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{n}{2}, \quad \text{ou} \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En faisant ensuite $m=2$, et remplaçant S_1 par $\frac{n(n+1)}{2}$, il vient

$$S_2=\frac{(n+1)^3-1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3};$$

d'où l'on conclut aisément

$$(3) \qquad S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

365. On peut déduire de la formule (3) la sommation des piles de boulets. Le second membre de cette formule exprime le nombre de boulets de la pile quadrangulaire dont le nombre des boulets du côté de la base est n.

Pour la pile triangulaire, le nombre des boulets de la tranche inférieure est $\frac{n(n+1)}{2}$, ou $\frac{n^2+n}{2}$. En faisant successivement $n=1, =2, =3$, etc., on obtient les nombres de boulets des différentes tranches à partir du sommet :

$$\frac{1+1^2}{2},\quad \frac{2+2^2}{2},\quad \frac{3+3^2}{2},\ldots,\quad \frac{n+n^2}{2}.$$

La somme de tous ces nombres se compose de la moitié de la somme des nombres naturels de 1 à n, et de la moitié de la somme de leurs carrés. On retrouve ainsi la formule (3) (n° 363).

Le calcul du nombre de boulets de la pile rectangulaire s'effectue de la même manière que dans le n° 363.

CHAPITRE DOUZIÈME.

DES SÉRIES. LIMITE DE $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. FONCTIONS DÉRIVÉES. SÉRIES QUI DONNENT LES VALEURS DES LOGARITHMES.

Des séries. — Théorèmes sur la convergence.

366. On nomme *série* une suite de termes en nombre infini, formés suivant une loi déterminée.

Une série est *convergente* lorsque la somme des termes consécutifs pris en nombre de plus en plus grand, à partir du premier, s'approche de plus en plus d'une certaine limite fixe, de manière à devenir aussi peu différente qu'on le veut de cette limite, qui est dite alors *la somme de la série*.

Lorsque la somme des termes pris en nombre de plus en plus grand ne tend vers aucune limite, la série est *divergente* et n'a pas de somme.

Une progression par quotient décroissante est une série convergente (n° 277).

367. Représentons généralement les termes d'une série par

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{etc.};$$

u_n sera le terme qui en aura n avant lui, ou le *terme général;* ce terme étant une certaine fonction de n telle, qu'en attribuant successivement à n les valeurs 0, 1, 2, 3, etc., on obtienne tous les termes de la série. Désignons, en outre, par S_n la somme des n premiers termes. On aura ainsi

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 \ldots + u_{n-1},\\
S_{n+1} &= u_0 + u_1 \ldots + u_{n-1} + u_n,\\
S_{n+2} &= u_0 + u_1 \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1};\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

par suite,

$$S_{n+1} - S_n = u_n,$$
$$S_{n+2} - S_{n+1} = u_n + u_{n+1},$$
$$S_{n+3} - S_{n+2} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
etc.

Pour que la série soit convergente, il faut qu'en faisant croître n indéfiniment, la somme S_n et les sommes suivantes S_{n+1}, S_{n+2}, etc., convergent toutes vers une même limite; ce qui exige que les différences ci-dessus deviennent toutes moindres qu'une quantité aussi petite que l'on voudra. Il faut donc que le terme u_n devienne moindre que toute quantité, et qu'il en soit de même de la somme d'un nombre quelconque de termes à partir de u_n. Ces dernières conditions sont suffisantes; car, lorsqu'elles sont remplies, les sommes S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, etc., pouvant devenir aussi peu différentes qu'on le veut les unes des autres, ont nécessairement une limite, qui diffère très-peu de S_n.

368. Si les termes de la série n'ont pas tous le même signe, désignons leurs valeurs numériques par

$$(2) \qquad U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3 \ldots.$$

Toutes les fois que ces quantités forment une série convergente, la série (1) est, à plus forte raison, convergente; car la série (2) étant convergente, il s'ensuit que les sommes des quantités U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, etc., prises en tel nombre que l'on voudra, à partir de U_n, pourront devenir moindres que toute limite, si l'on donne à n une valeur suffisamment grande. La même condition aura donc lieu, à plus forte raison, pour les sommes que l'on obtiendra en substituant aux quantités ci-dessus les quantités u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc., qui, par hypothèse, ont respectivement les mêmes valeurs numériques que les précédentes, sans être toutes positives.

369. Théorème I. — *Lorsque, pour toutes les valeurs du nombre entier* n *plus grandes qu'un certain nombre déterminé, le rapport* $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ *reste constamment plus petit qu'une quantité* r *plus petite que l'unité, la série* (2) *est convergente.*

Par hypothèse, lorsque n est suffisamment grand, on a $U_{n+1} < U_n r$, $U_{n+2} < U_{n+1} r$, $U_{n+3} < U_{n+2} r$, etc.; d'où $U_{n+2} < U_n r^2$, $U_{n+3} < U_n r^3$, etc. Les termes de la série, à partir de U_n, sont donc inférieurs, à l'exception de U_n seulement, aux termes correspondants de la progression

$$U_n,\ U_n r,\ U_n r^2,\ U_n r^3, \ldots.$$

Or, la raison de cette progression étant plus petite que 1, on peut assigner un terme tel, que les sommes formées avec les suivants, en tel nombre que l'on veut, soient moindres que toute limite. La même chose a donc lieu, à plus forte raison, pour la série (2); ce qui démontre le théorème.

Il suit, en outre, de là, qu'*en prenant la somme des* n *premiers termes pour une valeur approchée de la somme de la série, l'erreur est moindre que* $\frac{U_n}{1-r}$.

Considérons, par exemple, la série

$$1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1.2.3},\ \frac{1}{1.2.3.4},\ \text{etc.}$$

on a

$$U_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n+1}.$$

Le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ étant toujours plus petit que 1, et d'autant plus petit que n est plus grand, la série est convergente. En outre, si l'on prend pour la somme de toute la série, celle des termes jusqu'à U_n, et en y comprenant U_n, l'erreur sera moindre que $U_{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$, ce qui sera

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} \times \frac{1}{n}.$$

En réduisant les différents termes en décimales, et en s'arrêtant au onzième, qui est moindre que 0,000 0003, l'erreur n'influera pas sur les sept premières décimales, et on obtiendra la valeur approchée suivante :

$$2,7182818.$$

370. La somme de la série que nous venons de considérer est le nombre e (nº **286**). Ce nombre est incommensurable. En effet, supposons qu'il soit un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$, m et n étant deux nombres entiers ; on aura alors

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} + \text{etc.}$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par $1.2.3\ldots n$, le premier membre deviendra un nombre entier. Les termes du second membre jusqu'au terme $\frac{1}{1.2\ldots n}$ inclusivement, donneront des nombres entiers. Il faudra donc que la somme de tous les termes suivants soit aussi un nombre entier. Or, après la multiplication de tous les termes par $1.2.3\ldots n$, la somme des termes fractionnaires est

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.};$$

elle est donc moindre que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \text{etc.}$$

Celle-ci est plus petite que 1 ; car elle est égale à $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$ ou $\frac{1}{n}$. Le nombre e n'est donc pas un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$, m et n étant entiers.

371. Lorsque, pour les valeurs de n qui surpassent un certain nombre déterminé, le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constamment plus grand qu'un nombre r plus grand que 1, la série est divergente, puisque les termes à partir d'un certain rang vont en augmentant. Dans ce cas, la série (1) dont les termes sont les mêmes aux signes près que ceux de la série (2), est aussi divergente.

372. Quand le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un nombre plus petit que 1,

mais qui s'approche indéfiniment de 1 à mesure que n augmente, la série peut être convergente ou divergente.

Soit, par exemple, la série suivante, dont les termes décroissent indéfiniment :

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \text{etc.}$$

Le rapport du terme $\frac{1}{n+1}$ au terme précédent $\frac{1}{n}$ est $\frac{n}{n+1}$, ou $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Pour $n=\infty$, ce rapport devient 1.

Si l'on considère la somme des termes à partir de $\frac{1}{n+1}$ jusqu'à $\frac{1}{2n}$, savoir :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n},$$

cette somme est formée de n nombres dont le dernier est moindre que tous ceux qui le précèdent ; elle est donc supérieure à $n \times \frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$. Il résulte de là que la somme de tous les termes de la série après $\frac{1}{n}$ est formée d'un nombre infini de parties plus grandes que $\frac{1}{2}$; donc elle a une valeur infinie. La série est donc divergente.

Prenons la série

$$1, \quad \frac{1}{2^\alpha}, \quad \frac{1}{3^\alpha}, \quad \frac{1}{4^\alpha}, \quad \text{etc.}$$

Le rapport du terme $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ au terme précédent $\frac{1}{n^\alpha}$ est $\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$; il devient égal à 1 quand $n=\infty$.

Lorsque $\alpha < 1$, les termes sont respectivement plus grands que ceux de la série précédente ; donc leur somme est infinie. Supposons $\alpha > 1$.

On peut grouper les termes à partir du second de la manière

suivante :

$$\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right),\quad \left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right),\ \text{etc.}$$

Le premier groupe est plus petit que $2\times\frac{1}{2^\alpha}$ ou $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Le deuxième groupe est moindre que $4\times\frac{1}{4^\alpha}$ ou $\frac{1}{2^{2(\alpha-1)}}$. Le groupe suivant serait composé des termes depuis $\frac{1}{8^\alpha}$ jusqu'à $\frac{1}{15^\alpha}$, et il sera moindre que $8\times\frac{1}{8^\alpha}$ ou $\frac{1}{2^{3(\alpha-1)}}$. Si l'on considère, en général, le $n^{ième}$ groupe, il sera

$$\frac{1}{(2^n)^\alpha}+\frac{1}{(2^n+1)^\alpha}\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}.$$

Cette somme est moindre que

$$2^n\times\frac{1}{(2^n)^\alpha}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}}.$$

Il suit de là que la somme de tous les termes de la série est moindre que celle des termes suivants :

$$1,\quad \frac{1}{2^{\alpha-1}},\quad \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}},\quad \frac{1}{2^{3(\alpha-1)}},\quad \text{etc.}$$

Ceux-ci forment une progression par quotient dont la raison est $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$; et comme $\alpha>1$, la progression est décroissante. La série proposée est donc convergente.

373. THÉORÈME II. — *Lorsque les termes d'une série décroissent constamment et indéfiniment, si, de plus, ils sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.*

Représentons la série par

$$U_0-U_1+U_2-U_3\ldots\pm U_n\mp U_{n+1}\pm\ldots.$$

Désignons en outre la somme des termes à partir de $\pm U_n$ par $\pm r_n$, en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le

terme U_n sera positif ou négatif. On a ainsi dans les deux cas,

$$r_n = U_n - U_{n+1} + U_{n+2} - U_{n+3} + \text{etc}.$$

Puisque, par hypothèse, les termes vont en décroissant, r_n est une quantité positive, et on a $r_n > U_n - U_{n+1}$. D'un autre côté, la valeur de r_n peut être écrite sous cette forme,

$$r_n = U_n - (U_{n+1} - U_{n+2}) - (U_{n+3} - U_{n+4}) - \text{etc}.$$

Par là on voit que $r_n < U_n$. Donc, si U_n décroît indéfiniment quand n augmente indéfiniment, r_n décroît aussi indéfiniment; par conséquent la série est convergente. En outre, *Lorsque l'on prend la somme d'un nombre limité de termes pour celle de la série, l'erreur est alternativement par excès et par défaut; et elle est moindre que le terme qui suit celui auquel on s'arrête.*

374. On peut remplacer le théorème I par le suivant qui établit un caractère de convergence dont la vérification est quelquefois plus facile.

THÉORÈME III. — *Lorsque les termes d'une série* U_0, U_1, U_2, U_3, *etc., sont tous positifs, si, pour toutes les valeurs de* n *qui surpassent un certain nombre déterminé, on a* $\sqrt[n]{U_n} < \mathrm{r}$, *et* $\mathrm{r} < 1$, *la série est convergente.*

Suivant l'énoncé, lorsque n est suffisamment grand, on a

$$\sqrt[n]{U_n} < r, \quad \sqrt[n+1]{U_{n+1}} < r, \quad \sqrt[n+2]{U_{n+2}} < r, \quad \text{etc.}$$

Donc

$$U_n < r^n, \quad U_{n+1} < r^{n+1}, \quad U_{n+2} < r^{n+2}, \quad \text{etc.}$$

Les termes de la série à partir de U_n sont donc moindres que ceux de la progression r^n, r^{n+1}, r^{n+2}, etc.; et comme cette progression est décroissante, puisque $r < 1$, la série est convergente.

375. Lorsque le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers une limite déterminée, cette limite est aussi celle de $\sqrt[n]{U_n}$.

Pour le faire voir, désignons par r la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. On pourra assigner un nombre m tel que, n ayant une valeur

quelconque supérieure à m, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ soit compris entre $r - \varepsilon$ et $r + \varepsilon$, ε étant une quantité aussi petite que l'on voudra. On aura ainsi

$$U_{m+1} > U_m \times (r - \varepsilon), \quad U_{m+2} > U_{m+1} \times (r - \varepsilon), \quad \text{etc.}$$

On conclut de là

$$U_{m+p} > U_m \times (r - \varepsilon)^p, \quad \text{ou} \quad U_{m+p} > \frac{U_m}{(r - \varepsilon)^m} \times (r - \varepsilon)^{m+p}.$$

Donc

$$\sqrt[m+p]{U_{m+p}} > (r - \varepsilon) \times \sqrt[m+p]{\frac{U_m}{(r - \varepsilon)^m}}.$$

On conclura par d'autres inégalités semblables, en remplaçant $r - \varepsilon$ par $r + \varepsilon$ et le signe $>$ par $<$,

$$\sqrt[m+p]{U_{m+p}} < (r + \varepsilon) \times \sqrt[m+p]{\frac{U_m}{(r + \varepsilon)^m}}.$$

Or, m, r, et ε étant des nombres fixes, si l'on fait croître indéfiniment le nombre p, les quantités $\sqrt[m+p]{\frac{U_m}{(r - \varepsilon)^m}}$ et $\sqrt[m+p]{\frac{U_m}{(r + \varepsilon)^m}}$ tendront toutes deux vers 1 (n° 231); $\sqrt[m+p]{U_{m+p}}$ est donc compris entre deux nombres dont les limites sont $r - \varepsilon$ et $r + \varepsilon$, ou r, puisque ε peut être aussi petit que l'on veut.

La limite de $\sqrt[n]{U_n}$ n'étant point différente de celle de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, il est inutile de recourir au théorème III, pour le cas où le théorème I laisse du doute, par suite de ce que le rapport d'un terme au précédent tend à devenir égal à 1. Mais il est quelquefois plus facile de reconnaître la limite de $\sqrt[n]{U_n}$ que de trouver directement celle de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

376. Considérons encore la série (2) (n° 368), dont tous les termes sont positifs. *Si, lorsque* n *croît indéfiniment, le produit* nU_n *tend vers une limite différente de zéro, la série est divergente.* En effet, il résulte de cette condition qu'on peut assigner un nombre k tel que, pour toutes les valeurs de n su-

périeures à un nombre déterminé, on ait $n\mathrm{U}_n > k$; donc $\mathrm{U}_n > \frac{k}{n}$. Or, puisque la série dont le terme général est $\frac{1}{n}$ est divergente (n° 372), celle dont le terme général est $\frac{k}{n}$ est aussi divergente. La série proposée dont les termes à partir d'un certain rang sont plus grands que ceux d'une série divergente, est donc, à fortiori, divergente.

Soit ε un nombre positif aussi petit que l'on voudra, mais déterminé et différent de zéro, *si le produit $n^{1+\varepsilon}\mathrm{U}_n$ a une limite différente de l'infini, la série est convergente.* En effet, il existe alors un nombre h tel que, pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre déterminé, on a $n^{1+\varepsilon}\mathrm{U}_n < h$; donc $\mathrm{U}_n < \frac{h}{n^{1+\varepsilon}}$. Or la série dont le terme général est $\frac{h}{n^{1+\varepsilon}}$ est convergente (n° 372). La série proposée dont les termes à partir d'un certain rang sont plus petits que ceux d'une série convergente, est donc, à fortiori, convergente (*).

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, *lorsque* m *croît indéfiniment.*

377. Lorsque m est un nombre entier, on a par la formule du binôme,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3} \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n} + \text{etc.}$$

(*) On peut consulter pour les propositions relatives à la convergence des séries, le *Cours d'Analyse algébrique*, par M. Cauchy; et différents articles du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville. Les deux règles exposées dans le n° 376 sont extraites d'un de ces articles, dont l'auteur est M. Ossian Bonnet. J'ajouterai ici l'énoncé d'un théorème de M. Duhamel, qui est le suivant:

Lorsque les termes d'une série sont tous positifs et décroissants, si le rapport $\frac{\mathrm{U}_{n+1}}{\mathrm{U}_n}$ tend à devenir égal à 1, mettez-le sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, et cherchez la limite k *vers laquelle tend le produit* $n\alpha$, *quand* n *croît indéfiniment; la série proposée sera convergente si* $k > 1$, *et divergente si* $k < 1$.

On peut écrire cette formule ainsi :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$$
$$\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)+\text{etc.}$$

Considérons la série numérique

$$e = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\text{etc. (n° 369).}$$

Supposons qu'on attribue à n une valeur déterminée quelconque ; désignons par α la somme des termes de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ qui suivent $\frac{1}{1.2\ldots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$; par β la somme des termes qui suivent le terme correspondant de e, $\frac{1}{1.2\ldots n}$. On peut prendre n assez grand pour que β soit une quantité aussi petite que l'on veut ; on aura, d'ailleurs, $\alpha < \beta$; car les termes de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sont respectivement moindres que les termes correspondants de e ; en outre le nombre des termes de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est limité, et celui des termes de e est illimité. Cela posé, si l'on fait croître indéfiniment le nombre m, les termes de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ qui précèdent ceux dont la somme est α, s'approcheront indéfiniment des termes correspondants de e ; et puisque la différence $\beta-\alpha$ peut être aussi voisine qu'on le veut de zéro, celle des nombres $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ et e aura aussi pour limite zéro ; ou en d'autres termes,

$$\text{Limite de }\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

378. Lorsque m est fractionnaire, il est compris entre deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$. On a alors

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Si le nombre m croît indéfiniment, les nombres entiers n et $n+1$ croissent aussi indéfiniment; les quantités $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ont toutes deux pour limite e, et les facteurs $\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$ et $1+\frac{1}{n}$ s'approchent indéfiniment de 1. La limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est donc encore le nombre e.

Supposons m négatif, ce qui revient à considérer $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$. On a

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m$$
$$=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\times\left(1+\frac{1}{m-1}\right).$$

Pour $m=\infty$, $\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$ devient e, et $1+\frac{1}{m-1}$ devient 1; donc $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$ devient égal à e.

Des fonctions dérivées.

379. Lorsqu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres qui peuvent recevoir des valeurs arbitraires, on dit qu'elle est une *fonction* de ces quantités. On désigne d'une manière générale les fonctions d'une ou de plusieurs quantités par les notations

$$f(x),\quad F(x),\quad \varphi(x),\quad f(x,y),\quad F(x,y),\ldots$$

Quand une fonction a été représentée par $f(x)$, la valeur qu'elle prend pour $x=a$ s'exprime par $f(a)$. On indique de même par $f(y-2)$ ce que devient cette fonction quand on remplace x par $y-2$; par $f(3)$ ce qu'elle devient lorsqu'on

fait $x = 3$. Pour une fonction de deux variables désignée par $f(x, y)$, et dans laquelle on fait $y = 3$, sans attribuer aucune valeur à x, on écrit $f(x, 3)$.

On appelle *variables indépendantes* les quantités dont les valeurs peuvent être prises arbitrairement.

On nomme fonctions *algébriques* celles dans lesquelles les opérations indiquées sur les variables sont seulement des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, des élévations à des puissances et des extractions de racines de degrés connus. Toutes les autres fonctions sont appelées *transcendantes*.

Les fonctions algébriques sont *rationnelles* quand les variables n'y sont soumises à aucune extraction de racine. Elles sont *entières* quand elles se composent seulement de termes formés des puissances entières et positives des variables, multipliées par des coefficients constants.

380. Considérons la fonction entière

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Hx + K.$$

Si l'on remplace x par $x + h$, il vient

$$f(x+h) = A(x+h)^m + B(x+h)^{m-1} \ldots + H(x+h) + K.$$

En développant les puissances du binôme $x + h$ et en ordonnant par rapport à celles de h, on trouve

$$f(x+h) = \begin{array}{l|l|l} Ax^m \quad + mAx^{m-1} & h \quad + m(m-1)Ax^{m-2} & \dfrac{h^2}{1.2} + \ldots \\ + Bx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} & + (m-1)(m-2)Bx^{m-3} & \\ + Cx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} & + (m-2)(m-3)Cx^{m-4} & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + Hx \qquad\qquad + H & & \\ + K & & \end{array}$$

La partie de ce développement indépendante de h est le polynôme $f(x)$. Le multiplicateur de h se forme en multipliant chaque terme du polynôme $f(x)$ par l'exposant de x et diminuant l'exposant d'une unité. Le multiplicateur de $\frac{h^2}{1.2}$ est formé avec celui de h comme celui-ci avec $f(x)$. On passe de même du multiplicateur de $\frac{h^2}{1.2}$ à celui de $\frac{h^3}{1.2.3}$. Ainsi de suite.

Les polynômes formés suivant cette loi sont appelés *polynômes dérivés* ou *fonctions dérivées* de $f(x)$. On les indique par $f'(x), f''(x), f'''(x)$, etc. ; on a ainsi

$$(1)\quad f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$f'(x)$ est la *première* fonction dérivée, ou la dérivée *du premier ordre; $f''(x)$* est la *seconde* dérivée, ou la dérivée *du second ordre;* ainsi de suite.

381. Le plus haut exposant de x diminuant d'une unité lorsqu'on passe du polynôme à la première dérivée, ou d'une dérivée à la suivante, la dérivée de l'ordre m ne contient plus x, et on ne peut en former aucune autre au delà. Cette dérivée de l'ordre m est $1\times2\times3\ldots m\times A$; en sorte que le dernier terme du développement de $f(x+h)$, suivant la formule (1), est Ah^m. On reconnaît à priori que ce doit être là, en effet, le terme de plus haute puissance de h. Car, après la substitution de $x+h$ à la place de x, le terme $A(x+h)^m$ contient Ah^m, et les autres termes ne produisent que des puissances moindres de h.

382. La formule (1) peut s'écrire

$$(2)\quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{1.2}f''(x)+\frac{h^2}{1.2.3}f'''(x)+\ldots$$

Si h diminue et s'approche indéfiniment de zéro, les termes du second membre, à l'exception de $f'(x)$, s'approchent aussi de zéro; puisque les dérivées, qui sont des fonctions entières, ne peuvent devenir infinies tant que x a une valeur finie. Comme le nombre de ces termes est limité, leur somme décroît aussi jusqu'à zéro. Le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se rapproche donc de plus en plus de $f'(x)$, et il peut en devenir aussi voisin que l'on veut; ou, en d'autres termes,

$$(3)\qquad \text{limite de } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

383. Lorsque $f(x)$ n'est pas une fonction entière, on dé-

signe encore par $f'(x)$ la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, et on la nomme la dérivée de $f(x)$; c'est-à-dire qu'*on appelle fonction dérivée d'une fonction quelconque, la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, quand celui-ci décroît jusqu'à zéro.*

Suivant cette définition, *la dérivée d'une quantité constante est zéro*. Si a est une constante, la dérivée de $f(x)+a$ est la même que celle de $f(x)$. La dérivée de $af(x)$ est $af'(x)$. Celle de $-f(x)$ est $-f'(x)$.

384. Soient X, Y, Z, U,... des fonctions quelconques d'une variable x; désignons par X_1, Y_1, Z_1, U_1,... ce que deviennent ces fonctions quand x devient $x+h$; et par X', Y', Z', U',... les dérivées de ces mêmes fonctions, c'est-à-dire les limites des rapports $\frac{X_1-X}{h}$, $\frac{Y_1-Y}{h}$,....

Si l'on a $X=Y+Z+U+\ldots$, il en résultera

$$\frac{X_1-X}{h}=\frac{Y_1-Y}{h}+\frac{Z_1-Z}{h}+\frac{U_1-U}{h}+\ldots;$$

et en passant aux limites,

$$X'=Y'+Z'+U'+\ldots.$$

La dérivée de la somme de plusieurs fonctions est la somme des dérivées de ces fonctions.

385. Soit $X=YZ$, on aura

$$X_1-X=Y_1Z_1-YZ=Y_1(Z_1-Z)+Z(Y_1-Y);$$

donc

$$\frac{X_1-X}{h}=Y_1\frac{Z_1-Z}{h}+Z\frac{Y_1-Y}{h}.$$

Lorsqu'on passera à la limite, en faisant $h=0$, Y_1 deviendra Y, et l'on trouvera

$$X'=YZ'+ZY'.$$

La dérivée du produit de deux fonctions est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant chaque fonction par la dérivée de l'autre.

Si la fonction X est le produit d'un nombre quelconque de facteurs Y, Z, U, V,..., en faisant $ZUV\ldots = F(x)$, on aura, d'après la règle précédente,

$$X' = Y' F(x) + YF'(x).$$

En faisant ensuite $UV\ldots = F_1(x)$, d'où $F(x) = ZF_1(x)$, on aura

$$F'(x) = Z' F_1(x) + ZF'_1(x);$$

par conséquent

$$X' = Y'ZUV\ldots + Z'YUV\ldots + YZF'_1(x).$$

On pourra continuer de la même manière, aussi longtemps que l'exigera le nombre des facteurs; et de là il suit que *La dérivée du produit d'un nombre quelconque de facteurs est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres facteurs.*

386. Si toutes les fonctions Y, Z, U,... sont égales, on aura $X = Y^m$ et $X' = m\,Y^{m-1}\,Y'$. Donc, *Pour obtenir la dérivée de la $m^{ième}$ puissance d'une fonction, il faut multiplier la dérivée de la fonction par l'exposant et par la $(m-1)^{ième}$ puissance de la fonction.*

Soit $f(x) = x^m \times (a-x)^p$. En appliquant les règles qui viennent d'être établies, on trouvera

$$\begin{aligned} f'(x) &= mx^{m-1} \times (a-x)^p - p(a-x)^{p-1} \times x^m \\ &= x^{m-1} \times (a-x)^{p-1} \times [ma - (m+p)x]. \end{aligned}$$

387. Soit $X = \frac{1}{Z}$. On conclut de là

$$X_1 - X = \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z} = -\frac{Z_1 - Z}{Z_1 Z};$$

donc

$$\frac{X_1 - X}{h} = -\frac{1}{Z_1 Z} \cdot \frac{Z_1 - Z}{h};$$

et en passant à la limite,

$$X' = -\frac{Z'}{Z^2}.$$

On déduit de là la dérivée d'une fraction $\frac{Y}{Z}$; car en considérant cette fraction comme le produit $Y \times \frac{1}{Z}$, et en appliquant la règle du n° 385, on a pour la dérivée de ce produit,

$$Y' \cdot \frac{1}{Z} - Y \cdot \frac{Z'}{Z^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{ZY' - YZ'}{Z^2}.$$

Donc, *Pour obtenir la dérivée d'une fraction, il faut multiplier la dérivée du numérateur par le dénominateur, soustraire de ce produit celui de la dérivée du dénominateur par le numérateur, et diviser la différence par le carré du dénominateur.*

Si l'on a $X = \frac{1}{Z^m}$, il en résultera $X' = -\frac{mZ^{m-1}Z'}{Z^{2m}}$, ou $X' = -mZ^{-m-1}Z'$, ce qui prouve que *La dérivée d'une puissance négative se forme suivant la même règle que celle d'une puissance positive.*

Soit la fraction $\frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 5x + 4}$; la dérivée sera

$$\frac{(3x^2 - 5x + 4)(4x - 5) - (2x^2 - 5x - 3)(6x - 5)}{(3x^2 - 5x + 4)^2},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{5x^2 + 34x - 35}{(3x^2 - 5x + 4)^2}.$$

388. Soient $y = f(x)$ et $z = F(y)$; z est alors ce que l'on nomme une *fonction de fonction* de x. Supposons que x devienne $x + h$, et qu'en même temps y devienne $y + k$ et z devienne $z + l$. La dérivée de z considérée comme une fonction de x sera la limite du rapport $\frac{l}{h}$. Or on aura

$$\frac{l}{h} = \frac{l}{k} \times \frac{k}{h}, \quad \text{limite de } \frac{l}{k} = F'(y), \quad \text{limite de } \frac{k}{h} = f'(x);$$

donc

$$\text{limite de } \frac{l}{h} = F'(y) \times f'(x).$$

Il suit de là qu'*on obtient la dérivée d'une fonction de fonc-*

tion en multipliant entre elles les dérivées de chacune des fonctions par rapport à la quantité dont elle dépend immédiatement.

389. Lorsque l'on a entre deux quantités y et x une relation telle que $y=f(x)$, la lettre f indiquant une fonction dont la forme est entièrement déterminée, si l'on connaissait la valeur de y, on en conclurait celle de x; la variable x est donc une fonction de y, ou $x=\varphi(y)$. Les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$ sont dites inverses l'une de l'autre. Par exemple, si $y=x^m$, il en résulte $x=\sqrt[m]{y}$; la racine $m^{ième}$ est donc la fonction inverse de la puissance du degré m. Si $y=a^x$, on a $x=\log y$; le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle.

Si dans l'équation $x=\varphi(y)$ on remplaçait y par sa valeur $f(x)$, on aurait identiquement

$$x=\varphi[f(x)].$$

Donc en prenant les dérivées des deux membres, et en appliquant la règle relative aux fonctions de fonctions (n° 388),

$$1=\varphi'(y)\times f'(x), \quad \text{ou} \quad \varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'[\varphi(y)]}.$$

Pour obtenir la dérivée d'une fonction inverse d'une autre, il faut diviser l'unité par la dérivée de celle-ci, et remplacer la variable dont elle dépend par la fonction proposée.

Si $y=\sqrt[n]{x}$, d'où $x=y^n$, on a $x'=ny^{n-1}$; donc

$$y'=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Soit $X=\sqrt[n]{Y}$, en désignant par Y une fonction quelconque de x; on aura par la règle relative aux fonctions de fonctions,

$$X'=\frac{1}{n}Y^{\frac{1}{n}-1}Y'.$$

390. Si l'on a $X=\sqrt[n]{Y^m}=\left(Y^{\frac{1}{n}}\right)^m$, on en conclura par la

même règle

$$X' = m\left(Y^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \times \frac{1}{n} Y^{\frac{1}{n}-1} Y' = \frac{m}{n} Y^{\frac{m}{n}-1} Y'.$$

La dérivée d'une puissance fractionnaire d'une fonction se forme suivant la même règle que celle d'une puissance entière.

391. Si $X = \sqrt{Y}$, on a

$$X' = \frac{1}{2} Y^{-\frac{1}{2}} Y' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}}.$$

La dérivée d'un radical du second degré est égale à la dérivée de la quantité sous le radical, divisée par le double du radical.

Soit $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; on trouvera

$$f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{2(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

392. Soit $y = \log x$ et $y + k = \log(x+h)$; il en résulte

$$\frac{k}{h} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Faisons $\frac{h}{x} = \frac{1}{\alpha}$, d'où $\frac{1}{h} = \frac{\alpha}{x}$; il viendra

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

Si h décroît jusqu'à zéro, α croîtra jusqu'à ∞, et $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ convergera vers le nombre e (n^{os} 377 et 378); donc

$$\text{limite de } \frac{k}{h} = y' = \frac{\log e}{x}.$$

Pour les logarithmes népériens $\log e = 1$, et $y' = \frac{1}{x}$.

Soit $y = a^x$, d'où $x = \log y$; on a $x' = \frac{\log e}{y}$; donc $y' = \frac{y}{\log e} = a^x\, \mathrm{l}a$; et dans le cas de $a = e$, $y' = e^x$.

Si $X = \log Y$, on aura $X' = \frac{Y' \log e}{Y}$, et pour $X = a^Y$, $X' = a^Y Y' \mathrm{l}\, a$.

La dérivée d'un logarithme est égale à la dérivée de la quantité dont on doit prendre le logarithme, divisée par cette quantité, et multipliée par le logarithme du nombre e *dans le système auquel appartient le logarithme, ou par le module du système.*

La dérivée d'une fonction exponentielle est égale à la fonction multipliée par la dérivée de l'exposant, et par le logarithme népérien de la base.

La dérivée de $\mathrm{l}(x + \sqrt{1 + x^2})$ est $\dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$, et en réduisant, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

393. Quand on a formé la dérivée d'une fonction, si l'on prend la dérivée de cette fonction dérivée, on a la seconde dérivée ou la dérivée du second ordre de la fonction proposée. La dérivée de cette seconde dérivée est la troisième dérivée, ou la dérivée du troisième ordre de la fonction proposée. Ainsi de suite.

394. Soient $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, et $u = \mathrm{F}(y, z)$. Suivant ces relations, u est une fonction dépendante de plusieurs fonctions, qu'on nomme fonction *composée*. Désignons par h, k, l et s les accroissements simultanés de x, y, z et u ; on aura

$$s = \mathrm{F}(y + k, z + l) - \mathrm{F}(y, z),$$

ou, ce qui revient au même,

$$s = \mathrm{F}(y + k, z + l) - \mathrm{F}(y, z + l) + \mathrm{F}(y, z + l) - \mathrm{F}(y, z);$$

d'où

$$\frac{s}{h} = \frac{\mathrm{F}(y + k, z + l) - \mathrm{F}(y, z + l)}{k} \cdot \frac{k}{h} + \frac{\mathrm{F}(y, z + l) - (\mathrm{F} y, z)}{l} \cdot \frac{l}{h}.$$

Si h converge vers zéro, les rapports $\frac{k}{h}$ et $\frac{l}{h}$ auront pour limites $f'(x)$ et $\varphi'(x)$. La limite de $\frac{\mathrm{F}(y, z + l) - \mathrm{F}(y, z)}{l}$

sera la dérivée de F (y, z) par rapport à z, comme si y était une constante; on la désigne par $F'_z(y, z)$. La limite de $\frac{F(y+k, z+l)-F(y, z+l)}{k}$ sera pareillement $F'_y(y, z+l)$ ou $F'_y(y, z)$, puisque l sera zéro. On aura donc, en nommant u' la dérivée de u par rapport à x,

$$u' = F'_y(y, z) \times f'(x) + F'_z(y, z) \times \varphi'(x).$$

Si $u = [f(x)]^{\varphi(x)} = y^z$, la dérivée F'_y sera zy^{z-1} et la dérivée F'_z sera $y^z ly$ (n° 392); donc

$$u' = \varphi(x)\,[f(x)]^{\varphi(x)-1}\, f'(x) + [f(x)]^{\varphi(x)} .\ \varphi'(x) .\ l[f(x)],$$

et pour $u = x^x$,

$$u' = x^x + x^x\, lx = x^x(1 + lx).$$

395. Lorsque l'on a entre deux quantités x et y une équation $f(x, y) = 0$, chacune de ces quantités est une fonction *implicite* de l'autre. Si l'on suppose que l'on ait remplacé y dans $f(x, y)$ par sa valeur $\varphi(x)$ déduite de l'équation, le résultat sera identiquement nul. La dérivée de cette fonction identiquement nulle sera donc aussi zéro. Or cette dérivée sera

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \times \varphi'(x).$$

On devra donc avoir l'équation

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \times \varphi'(x) = 0,$$

d'où

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f^y(x, y)}.$$

396. *Lorsque la dérivée d'une quantité est constamment nulle, cette quantité est constante.*

Soit $f(x)$ une quantité dont la dérivée est constamment égale à zéro. Soient x_1 et x_2 deux valeurs quelconques de la variable x, et posons $x_2 - x_1 = nh$; d'où $h = \frac{x_2 - x_1}{n}$. Si le nombre n est très-grand, h sera très-petit. Or, la dérivée de $f(x)$ étant la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, il s'ensuit que l'on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité qui peut être rendue aussi voisine de zéro que l'on veut, en prenant h suffisamment petit.

Puisque $f'(x) = 0$, on a, d'après l'équation précédente,

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \varepsilon_1 h,$$
$$f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) = \varepsilon_2 h,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x_1 + nh) - f[x_1 + (n-1)h] = \varepsilon_n h.$$

On conclut de là, en ajoutant et en remarquant que $x_1 + nh = x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots + \varepsilon_n}{n} \times (x_2 - x_1).$$

Soit ε un nombre plus grand que la valeur absolue de chacune des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Le nombre de ces quantités étant n, on aura

$$f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon \times (x_2 - x_1).$$

Comme on peut prendre le nombre n assez grand pour que ε soit aussi petit que l'on veut, il suit de la dernière relation que la différence $f(x_2) - f(x_1)$ est moindre que toute quantité assignable; donc elle est nulle. $f(x)$ a donc la même valeur pour toutes les valeurs de x; ce qui démontre la proposition énoncée.

397. *Deux fonctions dont les dérivées sont égales ne diffèrent que par une constante.*

Si l'on a $f'(x) = \varphi'(x)$ pour toutes les valeurs de x, la différence $f'(x) - \varphi'(x)$ est constamment nulle. Or cette différence est la dérivée de $f(x) - \varphi(x)$. Celle-ci est donc une quantité constante.

398. Quand la dérivée est Ax^α, en désignant par A et α des quantités constantes, la fonction primitive est

$$\frac{Ax^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

On l'obtient en augmentant l'exposant d'une unité et divisant par cet exposant ainsi augmenté. C désigne une constante arbitraire.

Cette expression de la fonction primitive est en défaut lorsque $\alpha = -1$; car alors $\alpha + 1 = 0$.

Dans ce cas la dérivée est $\frac{A}{x}$ et la fonction primitive est

$$A\, lx + C.$$

399. Lorsque la dérivée d'une fonction $f(x)$ est positive pour une valeur particulière a de x, en désignant par h une quantité très-petite, le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est aussi positif; donc, si h est positif, on a $f(a+h) > f(a)$, c'est-à-dire que la fonction croît avec x. Si, au contraire, la dérivée est négative pour $x = a$, le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est aussi négatif pour h suffisamment petit; donc, h étant positif, on a $f(a+h) < f(a)$, c'est-à-dire que la fonction décroît lorsque x augmente.

Séries qui donnent les valeurs des logarithmes.

400. Considérons le logarithme népérien de $1 + x$. En posant $f(x) = l(1+x)$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

Supposons qu'on donne seulement à x des valeurs comprises entre 0 et 1. Avec cette condition la fraction $\frac{1}{1+x}$ exprime la somme de la progression décroissante et indéfinie

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots \mp x^{n-1} \pm x^n \mp \ldots$$

Comme les termes de cette progression sont alternativement positifs et négatifs, on a, en supposant n pair,

$$(1) \qquad \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 \ldots + x^{n-1} > 0,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 \ldots + x^{n-1} - x^n < 0.$$

Le premier membre de (1) est la dérivée de la fonction

$$\varphi(x) = l(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \ldots + \frac{x^n}{n}.$$

Cette dérivée $\varphi'(x)$ étant positive, la fonction $\varphi(x)$ est croissante lorsque x augmente (n° 399). D'ailleurs elle est nulle pour $x = 0$. Par conséquent pour $x > 0$, $\varphi(x) > 0$, ou

$$(3) \qquad l(1+x) > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots - \frac{x^n}{n}.$$

Le premier membre de (2) est la dérivée de $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Cette fonction est décroissante, puisque sa dérivée est négative. Elle est nulle pour $x = 0$. Donc, pour $x > 0$, $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1} < 0$, ou

$$(4) \qquad l(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Puisque $x < 1$, le terme $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ décroît à mesure que n augmente; et, pour n suffisamment grand, il peut devenir plus petit qu'une quantité donnée quelconque. En conséquence, d'après (3) et (4), en supposant $n = \infty$,

$$(5) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

401. Soit actuellement $f(x) = -l(1-x)$, d'où $f'(x) = \frac{1}{1-x}$. On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Donc, si l'on donne seulement à x des valeurs comprises entre zéro et un nombre déterminé $\alpha < 1$,

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3 \ldots - x^{n-1} > 0,$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3 \ldots - x^{n-1} - \frac{x^n}{1-\alpha} < 0.$$

On conclut de ces inégalités, par les mêmes considérations que dans le numéro précédent,

$$-l(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^n}{n} > 0,$$

$$-l(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\alpha)} < 0;$$

ou bien

$$\mathrm{l}(1-x) < -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\cdots-\frac{x^n}{n},$$

$$\mathrm{l}(1-x) > -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\cdots-\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\alpha)};$$

et de là, en supposant $n=\infty$,

$$(6) \qquad \mathrm{l}(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots$$

402. Les formules (5) et (6) donnent les valeurs de $\mathrm{l}(1+x)$ et de $\mathrm{l}(1-x)$, exprimées par des séries qui sont convergentes pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1. Lorsque $x=1$, la série $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$ est encore convergente, et la formule (5) ne cesse pas d'être exacte. La formule (6) subsiste aussi pour cette valeur de x; car les deux membres sont infinis (n° 372). Mais quand $x>1$, les deux séries deviennent divergentes, et les deux formules ne peuvent plus être employées.

403. En faisant $x=\frac{1}{n}$ on a

$$\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{l}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\mathrm{l}(n+1)-\mathrm{l}n,$$

et, d'après la formule (5),

$$(7) \qquad \mathrm{l}(n+1)=\mathrm{l}n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots$$

En retranchant membre à membre les formules (5) et (6), on obtient

$$\mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Soit $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{z}{n}$; il en résulte $x=\frac{z}{2n+z}$ et $\mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\mathrm{l}(n+z)-\mathrm{l}n$; donc

$$(8) \quad \mathrm{l}(n+z)=\mathrm{l}n+2\left[\frac{z}{2n+z}+\frac{z^3}{3(2n+z)^3}+\frac{z^5}{5(2n+z)^5}+\ldots\right],$$

et pour $z = 1$,

$$(9) \quad l(n+1) = l\,n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right].$$

On trouvera les logarithmes des nombres entiers consécutifs par les formules (7) et (9), en faisant successivement $n = 1$, $= 2$, $= 3$, etc. Mais la formule (9) sera préférable quand la valeur de n ne sera pas très-grande, parce que ses termes décroissent plus rapidement que ceux de la formule (7).

404. Ces formules ne s'appliquent qu'aux logarithmes népériens. Pour avoir les logarithmes vulgaires, il faudra multiplier toutes les séries par le module $M = \frac{1}{l\,10}$ (n° 325). Ainsi, au lieu de la formule (9), on aura la suivante :

$$(10) \quad \log(n+1) = \log n + 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right].$$

405. En faisant $n = 1$ dans (9), on

$$l\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right),$$

et en prenant un nombre suffisant de termes,

$$l\,2 = 0{,}693\,147\,180\,5.$$

On trouve $l\,10$ en faisant dans (8) $n = 8$ et $z = 2$; car $18 = 3\,l\,2$. Il vient

$$l\,10 = 3\,l\,2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \ldots\right).$$

En calculant les termes de la série avec dix décimales pour en obtenir neuf dans le résultat, on trouve que la valeur du cinquième terme est au-dessous de $0{,}000\,000\,000\,3$; en sorte qu'on peut négliger tous les termes suivants; et l'on a

$$l\,10 = 2{,}302\,585\,093.$$

Il en résulte

$$M = 0{,}434\,294\,482.$$

Le module M étant connu, on peut calculer les logarithmes vulgaires de nombres entiers consécutifs au moyen de la formule (10).

406. Si l'on veut calculer généralement une limite de l'erreur que l'on commettra par l'emploi de la formule (10), en s'arrêtant au terme de la série

$$\frac{1}{(2i-1)(2n+1)^{2i-1}},$$

on remarquera que la somme de tous ceux qui suivent est moindre que la somme des termes d'une progression par quotient dont la raison est $\frac{1}{(2n+1)^2}$, et le premier terme

$$\frac{1}{(2i+1)(2n+1)^{2i+1}}.$$

Il suit de là que l'erreur commise dans l'évaluation de la série sera moindre que

$$\frac{1}{(2i+1)\times(2n+1)^{2i+1}}\times\frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)},$$

ou

$$\frac{1}{4n(n+1)(2i+1)(2n+1)^{2i-1}}.$$

Cette quantité sera aussi une limite de l'erreur que l'on commettra sur le logarithme, puisque le module M est inférieur à $\frac{1}{2}$.

407. Les formules qui viennent d'être exposées en font trouver d'autres qui donnent les logarithmes par des séries beaucoup plus convergentes. En remplaçant, par exemple, dans la formule (10), n par n^2-1, on obtient

$$\log n^2 = \log(n^2-1) + 2M\left[\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3(2n^2-1)^3} + \ldots\right],$$

ou

$$\log n = \frac{\log(n+1)+\log(n-1)}{2} + M\left[\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3(2n^2-1)^3} + \ldots\right].$$

La série qui entre dans cette expression de $\log n$ est très-convergente; et lorsque n est égal ou supérieur à 20, les termes à partir du second n'influent pas sur les neuf premières décimales. D'ailleurs, si le nombre n est premier, les nombres $n+1$ et

$n-1$ sont composés de facteurs premiers inférieurs à n, et lorsque les logarithmes de ces facteurs sont connus, on peut trouver celui de n.

408. On peut abréger le calcul des logarithmes pour lesquels les séries sont peu convergentes, en recourant à des artifices particuliers. Pour log 3, par exemple, on remarque que $3^8 = 6561$ et $2^{16} = 65536$; donc $3^8 \times 10 = 2^{16} + 74$. En faisant $n = 65536$ et $z = 74$, on aura, d'après la formule (8),

$$8 \log 3 + 1 = 16 \log 2 + 2M \left(\frac{74}{131146} + \ldots\right).$$

Le premier terme de la série suffira pour faire trouver log 3 avec dix décimales.

On a $2^{10} = 1024$; donc, en faisant $n = 1000$ et $z = 24$,

$$10 \log 2 = 3 + 2M \left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \ldots\right].$$

Mais on ne déduit pas de là une expression utile de log 2; car, pour connaître le module M, il faut avoir trouvé l 2, et en le multipliant par M, on obtient le logarithme vulgaire.

Enfin, j'ajouterai que M. Koralek a fait connaître récemment un procédé ingénieux, par lequel on calcule rapidement le logarithme vulgaire d'un nombre quelconque compris entre 1 et 10 000 000.

Évaluation des erreurs qui résultent de la règle des parties proportionnelles pour les différences des nombres et celles des logarithmes.

409. Soient n un nombre entier et d une quantité plus petite que l'unité; on a $\log(n+d) - \log n = \log\left(1 + \frac{d}{n}\right)$, donc

$$\log(n+d) - \log n = M\left(\frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{d^3}{3n^3} - \ldots\right).$$

Lorsque le nombre n est très-grand, les termes $\frac{d^2}{2n^2}$, $\frac{d^3}{3n^3}$, etc.,

sont très-petits comparativement à $\frac{d}{n}$; on obtiendra donc une valeur très-approchée de la différence $\log(n+d) - \log n$, en se bornant au seul terme $M\frac{d}{n}$. Comme la valeur de ce terme est proportionnelle à la quantité d, il s'ensuit que, pour des nombres suffisamment grands, les différences des logarithmes sont à très-peu près proportionnelles aux différences des nombres; ce qui justifie la règle qui a été indiquée dans le n° 296.

410. Soit

$$\log(n+d) - \log n = \delta \quad \text{et} \quad \log(n+1) - \log n = \Delta.$$

On a

$$\log(n+1) - \log n = M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots\right).$$

On conclut de cette formule

$$\Delta < \frac{M}{n} \quad \text{et} \quad \Delta > \frac{M}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right);$$

et par le développement de $\log(n+d) - \log n$,

$$\delta < \frac{Md}{n} \quad \text{et} \quad \delta > \frac{Md}{n}\left(1 - \frac{d}{2n}\right).$$

Suivant la règle du n° 296, on prend pour valeur approchée de la différence δ le produit $d\Delta$. Or ce produit est compris entre $\frac{Md}{n}$ et $\frac{Md}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$; et puisque la vraie différence δ est comprise entre $\frac{Md}{n}$ et $\frac{Md}{n}\left(1 - \frac{d}{2n}\right)$, elle est comprise à fortiori entre $\frac{Md}{n}$ et $\frac{Md}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$. Donc l'erreur que l'on commet en prenant $d\Delta$ au lieu de δ est moindre que $\frac{Md}{n} - \frac{Md}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ ou $\frac{Md}{2n^2}$.

La valeur du module M est plus petite que $\frac{1}{2}$ (n° 405); donc, si le nombre n est plus grand que 10 000, la fraction $\frac{Md}{2n^2}$ est

moindre que le quart d'une unité décimale du 8e ordre. Ce qui prouve que l'erreur ne peut pas influer sur les sept premières décimales du logarithme cherché.

411. Lorsqu'on revient d'un logarithme au nombre, on prend pour valeur approchée de ce nombre $n+\frac{\delta}{\Delta}$. La valeur exacte devant être $n+d$, l'erreur est $d-\frac{\delta}{\Delta}$. Or, suivant ce qui précède, la valeur absolue de la différence $d\Delta-\delta$ est moindre que $\frac{\mathrm{M}d}{2n^2}$; donc

$$d-\frac{\delta}{\Delta}<\frac{\mathrm{M}d}{2n^2\Delta};$$

et puisque $\Delta>\frac{\mathrm{M}}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$, on a, à plus forte raison,

$$d-\frac{\delta}{\Delta}<\frac{d}{2n-1}.$$

Quand le nombre n est plus grand que 10000, la fraction $\frac{d}{2n-1}$ est moindre que $\frac{1}{20000}$; l'erreur n'influe donc pas sur les quatre premières décimales du nombre.

Mais cette conclusion suppose que l'on emploie les valeurs exactes des différences δ et Δ, tandis que celles dont on se sert sont seulement approchées; en sorte qu'elles ne peuvent faire trouver qu'un seul chiffre décimal ou deux au plus, au lieu de quatre (n° 300).

CHAPITRE TREIZIÈME.

PROPOSITIONS GÉNÉRALES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES D'UN DEGRÉ QUELCONQUE A UNE INCONNUE.

Forme générale des équations algébriques à une inconnue. — Elles ne comportent qu'une résolution numérique.

412. Les équations sont dites *algébriques* ou *transcendantes,* de la même manière que les fonctions (n° 379). Celles qui sont algébriques peuvent toujours être ramenées à ne contenir que des puissances entières et positives des inconnues; et s'il n'y a qu'une seule inconnue, elles peuvent être réduites à cette forme :

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + K = 0,$$

m étant un nombre entier, et A, B, C... K, des quantités connues quelconques.

On donne l'unité pour coefficient au premier terme, parce que l'on n'altère pas l'équation en divisant tous les termes par un même nombre. L'exposant m est le degré de l'équation.

On appelle *racine* toute quantité positive ou négative, ou toute expression imaginaire, qui, mise à la place de l'inconnue, réduit l'équation à une égalité.

413. *La résolution algébrique des équations* consisterait à trouver les expressions des racines de toutes celles d'un même degré par des formules générales. On a vu, dans le chapitre VI, qu'on y parvient pour les équations du troisième degré. On y est également parvenu pour celles du quatrième degré. Mais il a été démontré que les degrés plus élevés ne comportent pas de semblables formules. En outre, celle qu'on obtient pour le troisième degré ne donne qu'une solution insuffisante, à cause

de l'impossibilité d'en déduire les valeurs numériques des racines par la substitution de celles des coefficients, quand on doit trouver trois racines réelles. On est donc dans la nécessité de recourir à ce qu'on nomme la *résolution numérique*, qui consiste dans des opérations par lesquelles on calcule directement les racines des équations dont les coefficients sont des nombres donnés.

414. J'indiquerai ici par un exemple le moyen d'abréger le calcul de la valeur que prend une fonction entière de x, lorsque l'on donne à x une valeur numérique.

Soit le polynôme $4x^5 - 13x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 8$, dont on veut avoir la valeur pour $x = 3$.

On opérera comme on le voit ci-dessous :

$$4 \times 3 - 13 = -1,\quad -1 \times 3 + 5 = +2,\quad +2 \times 3 - 4 = +2,$$
$$+2 \times 3 = +6,\quad +6 \times 3 - 8 = +10.$$

Le nombre 10 est le résultat cherché ; car, d'après les opérations qui y ont conduit, ce nombre est égal à

$$4 \times 3^5 - 13 \times 3^4 + 5 \times 3^3 - 4 \times 3^2 - 8.$$

Valeurs d'une fonction entière de x *pour des valeurs très-grandes, ou très-petites, de* x. — *Continuité des fonctions entières d'une variable.*

415. *Soit le polynôme* $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc., *dans lequel les exposants* m, n, p, etc., *sont des nombres entiers positifs qui forment une suite décroissante ; si l'on attribue à* x *des valeurs numériques suffisamment grandes, positives ou négatives, les valeurs du polynôme auront le même signe que celles du premier terme* Ax^m ; *et l'on pourra donner à* x *une valeur assez grande pour que la valeur du polynôme soit aussi grande qu'on le voudra.*

On peut écrire le polynôme donné comme il suit :

$$Ax^m\left(1 + \frac{B}{A}\cdot\frac{1}{x^{m-n}} + \frac{C}{A}\cdot\frac{1}{x^{m-p}} + \ldots\right).$$

Pour une valeur très-grande de x, les fractions $\frac{1}{x^{m-n}}$, $\frac{1}{x^{m-p}}$, etc.,

ont des valeurs très-petites. Par suite, la somme des termes $\frac{B}{A} \cdot \frac{1}{x^{m-n}}, \frac{C}{A} \cdot \frac{1}{x^{m-p}}$, etc., dont le nombre est nécessairement limité, a aussi une valeur très-petite; de sorte que, si l'on fait croître suffisamment x, le polynôme renfermé dans les parenthèses finit par prendre des valeurs très-peu différentes de l'unité, et qui sont par conséquent positives. Le polynôme donné prend donc des valeurs de même signe que celles du terme Ax^m. On voit de plus que la valeur du polynôme peut devenir aussi grande qu'on le veut, puisque le facteur Ax^m croît indéfiniment avec x.

416. *Soit le polynôme* $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc., *les exposants* m, n, p, etc., *étant des nombres entiers positifs qui forment une suite croissante, et le polynôme étant composé d'un nombre fini de termes; si l'on attribue à* x *une très-petite valeur, positive ou négative, le polynôme aura une valeur très-petite, de même signe que celle du premier terme* Ax^m.

On peut écrire le polynôme donné comme il suit :

$$Ax^m\left(1 + \frac{B}{A}x^{n-m} + \frac{C}{A}x^{p-m} + \ldots\right).$$

Pour une valeur très-petite de x, les quantités x^{n-m}, x^{p-m}, etc., dont les exposants sont positifs, ont toutes des valeurs très-petites; de sorte que, si l'on fait converger x vers zéro, le polynôme renfermé dans les parenthèses finit par prendre des valeurs très-peu différentes de l'unité, et qui sont par conséquent positives. Le polynôme donné prend donc des valeurs de même signe que celles du terme Ax^m. On voit de plus que la valeur du polynôme peut devenir aussi petite qu'on le veut, puisque le facteur Ax^m décroît indéfiniment avec x.

417. *Étant données une fonction entière* f(x) *et une valeur particulière* a *de* x, *on peut trouver une quantité* h *assez petite pour que la différence* f(a + h) — f(a) *soit plus petite qu'une quantité donnée aussi petite que l'on voudra.*

En effet, suivant ce qu'on a vu dans le n° 380.

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{1.2} + f'''(a)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Or, si l'on donne à h une valeur très-petite, chacun des termes $f'(a)h$, $\frac{f''(a)h^2}{1.2}$, etc., aura une valeur très-petite; et comme le nombre de ces termes est limité, on peut concevoir que h soit assez petit pour que la somme de ces termes devienne aussi petite qu'on le veut.

418. Soient α et β deux nombres donnés, β étant plus grand que α. Si l'on veut déterminer la quantité h de manière que, pour une valeur quelconque a de x comprise entre α et β, on ait $f(a+h)-f(a)<\varepsilon$, en désignant par ε une quantité aussi petite que l'on voudra, on y parviendra comme il suit.

Soit C un nombre plus grand que tous les coefficients qui entrent dans les polynômes $f'(x)$, $\frac{f''(x)}{1.2}$, $\frac{f'''(x)}{1.2.3}$, etc. Chacun des termes de ces polynômes, pour une valeur de x comprise entre α et β, sera plus petit que $C\beta^{m-1}$, si $\beta>1$; et plus petit que C, si $\beta<1$; par conséquent, la valeur de chaque polynôme sera plus petite que $mC\beta^{m-1}$ ou que mC, selon que l'on aura $\beta>1$ ou $\beta<1$.

Cela posé, soit K le nombre $mC\beta^{m-1}$ si $\beta>1$, et le nombre mC si $\beta<1$. D'après le développement de $f(a+h)-f(a)$, on aura, pour une valeur quelconque a de x comprise entre α et β,

$$f(a+h)-f(a)<Kh(1+h+h^2\ldots+h^{m-1}).$$

Le second membre de cette inégalité est égal à $\frac{Kh(1-h^m)}{1-h}$; par conséquent, si l'on suppose $h<1$, ce second membre sera moindre que $\frac{Kh}{1-h}$. Donc, si l'on pose $\frac{Kh}{1-h}<\varepsilon$, on aura à fortiori $f(a+h)-f(a)<\varepsilon$. Or la première condition est satisfaite quand on a $h<\frac{\varepsilon}{K+\varepsilon}$. Donc, en donnant à x des valeurs croissantes depuis α jusqu'à β, et telles que la différence de deux valeurs consécutives soit égale à $\frac{\varepsilon}{K+\varepsilon}$, ou moindre que cette quantité, on obtiendra pour $f(x)$ une suite de valeurs

telles, que la différence de deux valeurs consécutives sera plus petite que ε.

Propositions par lesquelles on reconnaît qu'une équation a une racine réelle. — Toute équation a une racine réelle ou imaginaire.

419. Théorème Ier. — *Lorsque deux nombres α et β, substitués dans le premier membre d'une équation* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$, *donnent des résultats de signes contraires, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre α et β.*

Si l'on attribue à x des valeurs croissantes depuis α jusqu'à β, telles que la différence entre chacune des valeurs correspondantes de $f(x)$ et la suivante soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on voudra, il y aura nécessairement deux valeurs consécutives de $f(x)$ qui seront de signes contraires; puisque, par hypothèse, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de signes contraires. Ces deux valeurs consécutives de $f(x)$, qui seront de signes contraires, ayant entre elles une différence moindre que ε, chacune d'elles sera numériquement plus petite que ε. Or, cette conclusion subsistant quelque petite que soit la quantité ε, il s'ensuit qu'il existe entre α et β au moins une valeur de x pour laquelle $f(x)$ est zéro.

Scolie. — Comme il est possible que le polynôme $f(x)$ passe plusieurs fois du positif au négatif, ou du négatif au positif, pendant que x varie depuis α jusqu'à β, l'équation $f(x) = 0$ peut avoir plusieurs racines réelles comprises entre α et β.

420. Théorème II. — *Une équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à son dernier terme.*

Considérons d'abord le cas où le dernier terme est négatif. Si l'on fait $x = 0$ dans le premier membre de l'équation, on aura un résultat négatif, puisque ce résultat ne sera autre que le dernier terme. Si l'on donne ensuite à x une valeur positive, assez grande pour que le signe du premier membre soit le même que celui de son premier terme (n° 415), on aura

un résultat positif. L'équation aura donc au moins une racine positive.

Lorsque le dernier terme est positif, en faisant $x = 0$, on a un résultat positif, et si l'on donne ensuite à x une valeur négative suffisamment grande, on a un résultat négatif; l'équation a donc au moins une racine négative.

421. Théorème III. — *Une équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.*

Car en faisant $x = 0$, on a un résultat négatif; et si l'on donne ensuite à x une valeur suffisamment grande, positive ou négative, le résultat est positif, puisque le premier terme, étant de degré pair, est toujours positif.

422. Théorème IV. — *Lorsque le premier membre d'une équation est composé d'une suite de termes positifs, après lesquels tous les autres termes sont négatifs (le second membre étant zéro), l'équation a une racine positive, et elle n'en a qu'une.*

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} \ldots + Nx^{m-n} - Px^{m-n-1} \ldots - R = 0,$$

dans laquelles les termes sont tous positifs jusqu'au terme Nx^{m-n}, et les termes suivants sont tous négatifs.

Le dernier terme de cette équation étant négatif, elle a une racine positive; il s'agit de prouver qu'elle n'en a qu'une. Or on peut mettre le premier membre sous cette forme:

$$x^{m-n}\left(x^n + Ax^{n-1} \ldots + N - \frac{P}{x} \ldots - \frac{R}{x^{m-n}}\right).$$

Si l'on fait croître x à partir de zéro, la quantité $x^n + Ax^{n-1} \ldots + N$ ira en augmentant, sauf le cas où elle serait constante, ce qui aurait lieu si le premier terme de l'équation était seul positif. La quantité $\frac{P}{x} \ldots + \frac{R}{x^{m-n}}$ ira, au contraire, en diminuant. Donc, si x croît jusqu'à l'infini, le premier membre de l'équation ne changera de signe qu'une seule fois. L'équation n'a donc qu'une seule racine positive.

On voit en outre que, si x croît à partir d'une valeur qui rende le premier membre de l'équation positif, la valeur de ce polynôme croîtra avec celle de x.

423. Théorème v. — *Une équation a toujours une racine de la forme* $a+b\sqrt{-1}$, a *et* b *étant des quantités réelles* (*).

Considérons d'abord les quatre équations

$$x^m = +1,\quad x^m = -1,\quad x^m = +\sqrt{-1},\quad x^m = -\sqrt{-1}.$$

L'équation $x^m = +1$ admet toujours une racine; car on la vérifie en posant $x = 1$, quel que soit m. A l'égard des trois autres équations, on sait, par ce qui a été dit dans le chapitre VI, que l'équation $x^m = -1$ a toujours au moins une racine réelle ou imaginaire; et que chacune des deux dernières, $x^m = +\sqrt{-1}$, $x^m = -\sqrt{-1}$, a des racines imaginaires, toutes les fois que m est un nombre de la forme 2^k. Il reste à vérifier la proposition pour ces deux équations, quand m est un nombre impair ou le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair. A cet effet, soit $m = 2^k \times n$, n étant un nombre impair; en posant $x^{2^k} = y$, on a les deux équations

$$y^n = +\sqrt{-1},\quad y^n = -\sqrt{-1}.$$

Or

$$(+\sqrt{-1})^{4p+1} = +\sqrt{-1},\quad (+\sqrt{-1})^{4p+3} = -\sqrt{-1}; \text{ (n° 207)}$$

par suite,

$$(-\sqrt{-1})^{4p+1} = -\sqrt{-1},\quad (-\sqrt{-1})^{4p+3} = +\sqrt{-1}.$$

Ces égalités montrent que chacune des deux équations ci-dessus, dans lesquelles n est un nombre impair, admet toujours une racine égale à $+\sqrt{-1}$ ou à $-\sqrt{-1}$. D'ailleurs, si dans l'équation $x^{2^k} = y$ on fait $y = +\sqrt{-1}$ ou $y = -\sqrt{-1}$, cette équation donnera toujours pour x des valeurs de la forme $p + q\sqrt{-1}$ (n° **212**). Il existe donc des valeurs ima-

(*) Le lecteur peut admettre ce théorème sans s'arrêter à la démonstration.

ginaires de x qui vérifient les équations $x^m = + \sqrt{-1}$ et $x^m = - \sqrt{-1}$.

Considérons actuellement l'équation

$$(1) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0;$$

les coefficients A_1, $A_2, \ldots, A_{m-1}$, A_m, pouvant être des quantités réelles ou des expressions imaginaires.

Si l'on fait dans le premier membre $x = p + q\sqrt{-1}$, p et q représentant des quantités réelles, le résultat sera une expression imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions réelles et entières de p et q. Pour que l'équation soit satisfaite, il faudra que l'on ait $P = 0$ et $Q = 0$, ou, ce qui revient au même, $P^2 + Q^2 = 0$. Nous allons démontrer qu'il existe toujours un couple de valeurs réelles de p et q qui satisfait à cette condition $P^2 + Q^2 = 0$. Pour cela, nous prouverons d'abord que la plus petite valeur que peut recevoir la quantité $P^2 + Q^2$, lorsqu'on fait varier p et q, correspond à des valeurs finies de p et de q; nous ferons voir ensuite que cette plus petite valeur est zéro.

Rappelons, avant tout, que la quantité $\sqrt{P^2 + Q^2}$ est ce qu'on nomme le module de l'expression imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$ (n° 205).

Pour démontrer que la plus petite valeur du module $\sqrt{P^2 + Q^2}$ correspond à des valeurs finies de p et de q, il suffit de prouver que, lorsqu'on fait croître indéfiniment les quantités p et q ou seulement l'une d'elles, le module $\sqrt{P^2 + Q^2}$ croît indéfiniment. Or le premier membre de l'équation peut être écrit sous cette forme

$$x^m \left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} \ldots + \frac{A_m}{x^m}\right).$$

En posant $x = p + q\sqrt{-1}$, on aura

$$P + Q\sqrt{-1}$$

$$= (p + q\sqrt{-1})^m \left[1 + \frac{A_1}{p + q\sqrt{-1}} + \frac{A_2}{(p + q\sqrt{-1})^2} \ldots + \frac{A_m}{(p + q\sqrt{-1})^m}\right].$$

On a vu que le module du produit de plusieurs expressions

imaginaires est le produit des modules des facteurs, et le module du quotient de deux expressions imaginaires est le quotient du module du dividende divisé par celui du diviseur (nos 206 et 208).

Cela posé, les modules des coefficients A_1, A_2..., A_m, étant des quantités finies, si l'on fait croître indéfiniment les deux quantités p et q, ou seulement l'une d'elles, les modules des fractions $\frac{A_1}{p+q\sqrt{-1}}$, $\frac{A_2}{(p+q\sqrt{-1})^2}$,..., $\frac{A_m}{(p+q\sqrt{-1})^m}$ décroîtront indéfiniment; ces fractions se réduiront donc à des expressions imaginaires $\alpha_1 + 6_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2 + 6_2\sqrt{-1}$, etc., dans lesquelles les quantités α_1, 6_1, α_2, 6_2, etc., pourront devenir toutes aussi petites qu'on le voudra. Il suit de là que la somme

$$1 + \frac{A_1}{p+q\sqrt{-1}} + \frac{A_2}{(p+q\sqrt{-1})^2} + \ldots$$

sera une expression imaginaire $1+\gamma+\delta\sqrt{-1}$, dans laquelle les quantités γ et δ pourront être rendues aussi petites qu'on le voudra; par conséquent le module de cette somme, ou la quantité $\sqrt{(1+\gamma)^2+\delta^2}$, aura une valeur très-peu différente de l'unité. Mais le module de $(p+q\sqrt{-1})^m$ croîtra indéfiniment. Donc le module de $P+Q\sqrt{-1}$ croîtra lui-même indéfiniment; ce qu'il fallait démontrer.

Il faut actuellement prouver que la plus petite valeur de $\sqrt{P^2+Q^2}$ est zéro; or cela sera démontré si l'on fait voir que, toutes les fois que $\sqrt{P^2+Q^2}$ a une valeur différente de zéro, on peut assigner une valeur imaginaire de x telle, qu'en représentant le résultat de la substitution de cette valeur dans le premier membre de l'équation par $P'+Q'\sqrt{-1}$, on ait $P'^2+Q'^2 < P^2+Q^2$.

Désignons la valeur de x qu'il s'agira de trouver par $p+q\sqrt{-1}+\varepsilon u$, ε représentant un nombre qu'on pourra supposer aussi petit qu'on le voudra, et u étant une indéterminée qui pourra recevoir des valeurs réelles ou imaginaires.

Pour obtenir le résultat de la substitution de la quantité $p+q\sqrt{-1}+\varepsilon u$ à la place de x dans le premier membre de

l'équation (1), nous remplacerons d'abord x par $x+h$; nous ferons ensuite $x=p+q\sqrt{-1}$ et $h=\varepsilon u$.

Le résultat de la substitution de $x+h$ à la place de x dans le premier membre de l'équation peut être exprimé par

$$(2) \qquad X+X'h+\frac{X''}{1.2}h^2+\frac{X'''}{1.2.3}h^3\ldots+h^m;$$

X désigne alors le premier membre de l'équation, et X', X'', X''', etc., sont les dérivées successives de ce polynôme.

Quand on fait $x=p+q\sqrt{-1}$ dans le polynôme (2), le premier terme X devient $P+Q\sqrt{-1}$.

Quant aux coefficients des puissances de h dans les termes suivants, il peut arriver que quelques-uns deviennent nuls; mais ils ne peuvent pas s'évanouir tous en même temps, puisque le coefficient de la plus haute puissance de h est l'unité.

Soit h^n la plus faible puissance de h dont le coefficient ne devient pas zéro quand on suppose $x=p+q\sqrt{-1}$. Ce coefficient sera de la forme $R+S\sqrt{-1}$, et l'on n'aura pas en même temps $R=0$, $S=0$.

D'après cela, si l'on représente par $P'+Q'\sqrt{-1}$ la valeur que prend le polynôme (2), quand on y remplace x par $p+q\sqrt{-1}$, et h par εu, on aura

$$(3) \qquad \begin{aligned} P'+Q'\sqrt{-1} &= P+Q\sqrt{-1}+(R+S\sqrt{-1})\,\varepsilon^n u^n \\ &\quad + (\textit{des termes en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^m). \end{aligned}$$

On peut attribuer à u une valeur telle que $u^n=+1$, ou que $u^n=-1$, alors il vient

$$\begin{aligned} P'+Q'\sqrt{-1} &= P+Q\sqrt{-1}\pm(R+S\sqrt{-1})\varepsilon^n \\ &\quad + (\textit{des termes en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^m). \end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on trouve

$$\begin{aligned} P' &= P\pm R\varepsilon^n + (\textit{des termes réels en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots \varepsilon^m), \\ Q' &= Q\pm S\varepsilon^n + (\textit{des termes réels en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots \varepsilon^m); \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} P'^2+Q'^2 &= P^2+Q^2\pm 2\,(PR+QS)\,\varepsilon^n \\ &\quad + (\textit{des termes réels en } \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{n+2}, \ldots, \varepsilon^{2m}). \end{aligned}$$

Or on peut prendre le nombre ε assez petit pour que la somme des termes affectés des diverses puissances de ε dans la valeur de $P'^2 + Q'^2$ ait le même signe que le terme $\pm 2(PR + QS)\varepsilon^n$ (n° 416); de plus, on peut toujours faire en sorte que ce terme soit négatif, car il suffit de déterminer u de manière que u^n soit égal à $+1$ ou à -1, selon que la quantité $PR + QS$ est négative ou positive. Quand toutes ces conditions seront remplies, on aura

$$P'^2 + Q'^2 < P^2 + Q^2, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{P'^2 + Q'^2} < \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Nous avons supposé que la quantité $PR + QS$ n'était pas nulle; il faut donc encore examiner le cas où l'on aurait $PR + QS = 0$. Alors, au lieu de faire $u^n = \pm 1$ dans l'équation (3), on donnera à u une valeur telle que l'on ait $u^n = \pm\sqrt{-1}$; il en résultera

$$P' + Q'\sqrt{-1} = P + Q\sqrt{-1} \pm (R + S\sqrt{-1})\varepsilon^n\sqrt{-1} + \ldots,$$

d'où

$$P' = P \mp S\varepsilon^n + \ldots, \quad Q' = Q \pm R\varepsilon^n + \ldots;$$

et, par suite,

$$P'^2 + Q'^2 = P^2 + Q^2 \pm 2(QR - PS)\varepsilon^n + \ldots;$$

les termes qui suivent le terme en ε^n sont réels, et ne contiennent que des puissances de ε dont l'exposant est supérieur à n.

Comme on a, par hypothèse, $PR + QS = 0$, on ne pourra pas avoir $QR - PS = 0$; car, si ces deux égalités subsistaient en même temps, on en conclurait

$$(PR + QS)^2 + (QR - PS)^2 = 0, \quad \text{ou} \quad (P^2 + Q^2)(R^2 + S^2) = 0.$$

Par suite, on devrait avoir $P^2 + Q^2 = 0$, c'est-à-dire $P = 0$, $Q = 0$; ou bien $R^2 + S^2 = 0$, c'est-à-dire $R = 0$, $S = 0$; ce qui est contraire aux suppositions qui ont été établies.

La quantité $QR - PS$ n'étant pas nulle, on pourra prendre le nombre ε assez petit pour que la somme des termes affectés des diverses puissances de ε, dans la valeur ci-dessus de $P'^2 + Q'^2$, ait le même signe que le premier terme $\pm 2(QR - PS)\varepsilon^n$. De plus, on pourra faire en sorte que ce terme soit négatif; car il suffira de déterminer u de manière

que u^n soit égal à $+\sqrt{-1}$ ou à $-\sqrt{-1}$, selon que la quantité QR — PS sera négative ou positive. Quand ces deux conditions seront remplies, on aura

$$\sqrt{P'^2+Q'^2}<\sqrt{P^2+Q^2}.$$

Décomposition des fonctions entières en facteurs du premier degré.

424. Théorème vi. — *Si* a *est une racine d'une équation* $X=0$, *le premier membre de l'équation est divisible par le binôme* $x-a$.

Concevons que l'on divise le polynôme X par $x-a$; le diviseur ne contenant x qu'au premier degré, l'opération conduira à un reste indépendant de x, et le quotient ne renfermera point x en dénominateur. Nommons Q le quotient et R le reste; on aura

$$X=(x-a)\times Q+R.$$

Si l'on fait dans cette égalité $x=a$, le premier membre deviendra nul; puisque, par hypothèse, a est racine de l'équation $X=0$; le produit $(x-a)\times Q$ deviendra aussi nul; car le facteur $x-a$ est réduit à zéro, et le facteur Q ne peut pas devenir infini; d'ailleurs le reste R ne changera pas, puisqu'il est indépendant de x. Il suit de là que R est nul. Donc le polynôme X est divisible par $x-a$.

Scolie i^er^. — Réciproquement, *lorsque le binôme* $x-a$ *divise le polynôme* X, a *est racine de l'équation* $X=0$. Car on a, par hypothèse, $X=(x-a)\times Q$, le quotient Q étant entier par rapport à x; or, si l'on fait dans cette égalité $x=a$, le second membre devient nul; le premier membre doit donc aussi être réduit à zéro.

Scolie ii. — Quelle que soit la quantité a, lorsqu'on fait $x=a$, dans les deux membres de l'égalité $X=(x-a)\times Q+R$, le produit $(x-a)\times Q$ est réduit à zéro, et le reste R ne change pas. Donc *le reste* R *est égal à la valeur que prend le polynôme* X *lorsqu'on remplace* x *par* a. Cette dernière proposition renferme le théorème vi; car, lorsque a est racine de l'équation $X=0$, le résultat de la substitution de a à la place

de x dans X étant zéro, le reste de la division de X par $x - a$ est aussi zéro ; le polynôme X est donc divisible par $x - a$.

425. On peut démontrer le théorème VI d'une autre manière, qui fait trouver en même temps la loi du quotient de la division de X par $x - a$.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Si a est une racine, on aura l'égalité

$$a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} \ldots + A_{m-1} a + A_m = 0.$$

En tirant de là la valeur de A_m, et la reportant dans le premier membre de l'équation (1), ce polynôme devient

$$x^m - a^m + A_1(x^{m-1} - a^{m-1}) + A_2(x^{m-2} - a^{m-2}) \ldots + A_{m-1}(x - a).$$

Or $x - a$ divise chacun des binômes $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc. (n° 49). Le premier membre de l'équation (1) est donc aussi divisible par $x - a$.

Pour obtenir le quotient, il suffit d'effectuer la division de chacun des binômes $x^m - a^m$, $x^{m-1} - a^{m-1}$, etc., par $x - a$, et d'ajouter ensuite les quotients partiels, en multipliant le second quotient par A_1, le troisième par A_2, etc. ; on trouve ainsi le résultat ci-dessous :

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 & x^{m-3} + a^3 & x^{m-4} \ldots + a^{m-1} \\
+ A_1 & + A_1 a & + A_1 a^2 & \quad \ldots + A_1 a^{m-2} \\
 & + A_2 & + A_2 a & \quad \ldots + A_2 a^{m-3} \\
 & & + A_3 & \quad \ldots + A_3 a^{m-4} \\
 & & & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \qquad + A_{m-1}.
\end{array}$$

On obtient le coefficient de chaque terme du quotient, à partir du second, en multipliant le coefficient du terme précédent par a, *et en ajoutant au produit le coefficient du terme qui a, dans le polynôme proposé, le même rang que le terme du quotient que l'on veut former.* Le coefficient du premier terme du quotient est le même que celui du premier terme du polynôme proposé.

426. Quelle que soit la quantité a, le premier membre de l'équation (1) peut être écrit sous cette forme,

$$\begin{array}{llll} x^m - a^m & + A_1(x^{m-1} - a^{m-1}) & + A_2(x^{m-2} - a^{m-2}) \ldots & + A_{m-1}(x-a) \\ + a^m & + A_1 a^{m-1} & + A_2 a^{m-2} \ldots & + A_{m-1}\, a + A_m. \end{array}$$

Cette expression est formée de deux parties, dont l'une est divisible par $x - a$, et l'autre est indépendante de x; celle-ci exprime donc le reste de la division du polynôme proposé par $x - a$. On est ainsi ramené à la conclusion qui a été établie dans le scolie II ci-dessus.

On peut encore établir les principes contenus dans les deux numéros précédents, en effectuant la division du polynôme $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} +$ etc. par le binôme $x - a$.

427. Théorème VII. — *Une équation du degré* m *a* m *racines réelles ou imaginaires.*

Représentons l'équation proposée par $X = 0$. D'après le théorème V, cette équation a une racine réelle ou imaginaire. Nommons a cette racine; le premier membre sera divisible par $x - a$, et le quotient sera un polynôme du degré $m - 1$; on aura donc

$$X = (x - a)(x^{m-1} + \ldots).$$

Si l'on égale à zéro le polynôme $x^{m-1} +$ etc., on obtiendra une équation qui aura aussi une racine. Nommons b cette racine; le polynôme $x^{m-1} +$ etc. sera divisible par $x - b$, et le quotient sera un polynôme du degré $m - 2$; de sorte que l'on aura, à cause de l'égalité ci-dessus,

$$X = (x - a)(x - b)(x^{m-2} + \ldots).$$

Si l'on égale à zéro le polynôme $x^{m-2} +$ etc., il en résultera une équation qui admettra une racine c; le polynôme $x^{m-2} +$ etc. sera divisible par $x - c$, le quotient sera du degré $m - 3$, et l'égalité précédente deviendra

$$X = (x - a)(x - b)(x - c)(x^{m-3} + \ldots).$$

On pourra continuer ainsi jusqu'à ce que le dernier quotient soit un binôme du premier degré $x - k$; et il en résultera

$$X = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - k).$$

Or, d'après cette égalité, le polynôme X sera réduit à zéro si l'on met à la place de x une des m valeurs $a, b, c, \ldots, k$; donc l'équation $X = 0$ a m racines.

Il peut arriver que quelques-uns des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc., soient égaux; dans ce cas on dit que l'équation $X = 0$ a des racines égales. Par exemple, si le polynôme X est divisible par $(x - a)^3$, on dit que l'équation a trois racines égales à a.

428. Si l'on donne à x une valeur α différente de chacune des quantités $a, b, c, \ldots, k$, aucun des facteurs ci-dessus ne sera nul, donc leur produit ne sera pas nul (n° 206); donc α ne sera pas racine de l'équation $X = 0$. S'il y a des racines égales, en sorte qu'on ait $X = (x - a)^n (x - b)^p \ldots$, le polynôme X ne pourra être égal à aucun autre produit formé des mêmes facteurs avec des exposants différents. Car soit, s'il est possible,

$$(x - a)^n (x - b)^p \ldots = (x - a)^{n'} (x - b)^{p'} \ldots .$$

Si $n > n'$, on peut diviser les deux membres par $(x - a)^{n'}$, et il vient

$$(x - a)^{n-n'} (x - b)^p \ldots = (x - b)^{p'} \ldots .$$

Or, le premier membre de cette dernière égalité est réduit à zéro par l'hypothèse $x = a$, et il n'en est pas de même du second membre, puisque tous ses facteurs sont différents de $x - a$. L'égalité est donc impossible.

Il suit de là qu'*Une équation du degré* m *n'admet qu'un seul système de* m *racines égales ou inégales.*

429. Si l'on multiplie entre eux les facteurs du premier degré du polynôme X, deux à deux, trois à trois, etc., les produits qu'on obtiendra seront des diviseurs de X. De plus, le polynôme n'admettra pas d'autres diviseurs que ceux qui résulteront de ces multiplications. Le nombre des diviseurs du deuxième degré est donc $\frac{m(m-1)}{1.2}$; celui des diviseurs du troisième degré est $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$; etc.

430. Représentons par A et B deux fonctions entières de x. Si elles sont toutes deux divisibles par une autre fonction entière D, les équations $A = o$ et $B = o$ auront l'une et l'autre toutes les racines de l'équation $D = o$.

Soit Q le quotient de la division de A par B, en supposant le degré de B inférieur ou tout au plus égal à celui de A; et soit R le reste dont le degré sera moindre que celui de B. On aura

$$A = BQ + R.$$

D'après cette égalité, si une valeur de x donne $A = o$ et $B = o$, elle donnera aussi $R = o$; et si une valeur de x donne $B = o$ et $R = o$, elle donnera aussi $A = o$. Les racines communes à $A = o$ et $B = o$ sont donc les mêmes que celles qui sont communes à $B = o$ et $R = o$.

Le degré de R étant moindre que celui de B, on pourra diviser B par R. Si la division ne se fait pas exactement, il en résultera un reste R′ dont le degré sera moindre que celui de R; et les racines communes à $A = o$ et $B = o$, ou à $B = o$ et $R = o$, seront les mêmes que celles qui seront communes à $R = o$ et $R' = o$.

En continuant ces divisions successives, comme les degrés des restes iront toujours en diminuant, on parviendra à un reste indépendant de x. Si ce reste est nul, le dernier diviseur sera le produit de tous les facteurs du premier degré communs aux polynômes A et B, ou le diviseur commun de ces polynômes du degré le plus élevé. Si l'on est conduit à un reste numérique, les polynômes A et B n'auront aucun facteur commun en x, et les équations $A = o$ et $B = o$ n'auront aucune racine commune.

Les racines d'une équation ne changeant pas quand on la multiplie par un nombre quelconque, on peut faciliter et simplifier les opérations en introduisant ou en supprimant des facteurs numériques dans les polynômes A et B et dans les restes successifs, de manière à éviter dans les divisions les coefficients fractionnaires.

Le diviseur commun du degré le plus élevé de deux fonctions entières est appelé leur *plus grand commun diviseur*.

431. Théorème VIII. — *Lorsqu'une équation dont tous*

les coefficients sont réels admet une racine imaginaire $\alpha + 6\sqrt{-1}$, *elle a aussi la racine conjuguée* $\alpha - 6\sqrt{-1}$.

Concevons que l'on substitue $\alpha + 6\sqrt{-1}$ à la place de x dans le premier membre de l'équation; les termes dans lesquels $6\sqrt{-1}$ sera élevé à une puissance paire seront délivrés du symbole $\sqrt{-1}$; tandis que ce symbole se conservera dans tous les termes où la même quantité $6\sqrt{-1}$ sera élevée à une puissance impaire (n° 207); de sorte que, si l'on représente le résultat de la substitution par $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q seront des quantités réelles; P ne contiendra que des puissances paires de 6, et Q ne contiendra que des puissances impaires de cette quantité.

Si l'on remplace dans la même équation x par $\alpha - 6\sqrt{-1}$, le résultat ne différera du précédent qu'en ce que les puissances impaires de 6 auront des signes contraires; par conséquent, ce résultat sera $P - Q\sqrt{-1}$. Mais puisque, par hypothèse, $\alpha + 6\sqrt{-1}$ est racine de l'équation, il faut que l'expression $P + Q\sqrt{-1}$ soit zéro, ce qui exige que l'on ait séparément $P = 0$, $Q = 0$. L'expression $P - Q\sqrt{-1}$ sera donc aussi zéro. $\alpha - 6\sqrt{-1}$ sera donc une racine de l'équation.

Corollaire i. — Dans une équation dont les coefficients sont réels, les racines imaginaires sont en nombre pair.

Corollaire ii. — Les facteurs correspondants aux racines imaginaires conjuguées d'une équation dont les coefficients sont réels, produisent des facteurs réels du second degré en x. Car les facteurs correspondants à deux racines imaginaires conjuguées étant $x - \alpha - 6\sqrt{-1}$ et $x - \alpha + 6\sqrt{-1}$, le produit de ces deux facteurs est

$$(x - a)^2 + 6^2, \quad \text{ou} \quad x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 6^2.$$

On conclut de là qu'*Un polynôme* f (x) *de degré pair, dont les coefficients sont réels, est décomposable en facteurs réels du second degré.*

Un polynôme de degré impair a un facteur réel du premier degré (n° 420); et, en le divisant par ce facteur, on a un quotient de degré pair.

Relations entre les coefficients d'une équation et les racines.

432. Théorème ix. — *Dans une équation ramenée à la forme* $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + K = 0$ (*le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue étant l'unité*), *le coefficient du deuxième terme pris avec un signe contraire est égal à la somme des racines. Le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits des racines deux à deux. Le coefficient du quatrième terme pris avec un signe contraire est égal à la somme des produits des racines trois à trois; ainsi de suite. Le dernier terme pris avec son signe ou avec le signe contraire, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair, est égal au produit de toutes les racines.*

Soient $a, b, c, \ldots, k$, les m racines de l'équation; le premier membre devra être identique avec le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, dans le produit de m facteurs $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., le coefficient de x^{m-1} est la somme des quantités a, b, c, etc.; le coefficient de x^{m-2} est la somme des produits des mêmes quantités deux à deux; celui de x^{m-3} est la somme des produits de ces quantités trois à trois, etc.; et le dernier terme est le produit de toutes ces quantités (n° 340). Pour passer du produit des facteurs $x+a$, $x+b$, etc., à celui des facteurs $x-a$, $x-b$, etc., il suffit de changer les signes des quantités a, b, c, etc; par là les produits dans lesquels ces quantités entrent en nombre impair changent tous de signe, et ceux dans lesquels elles entrent en nombre pair ne changent pas. On conclut de là le théorème énoncé.

Scolie. — Ce théorème donne m équations entre les m racines et les coefficients; et on pourrait penser qu'on facilitera la recherche des racines, en remplaçant l'équation proposée par le système de ces m équations. Mais, comme les racines entrent toutes de la même manière dans ces équations, en sorte que celle que l'on a représentée par a, par exemple, exprime indifféremment l'une quelconque d'entre elles, il faudra nécessairement que, si l'on parvient à dé-

duire des relations dont il s'agit une équation qui ne contienne plus que a, cette équation donne indistinctement toutes les racines ; par conséquent, elle sera la même que l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

En représentant les trois racines par a, b, c, on a

$$-a - b - c = A, \quad ab + ac + bc = B, \quad -abc = C.$$

Pour éliminer b et c entre ces trois équations, il suffit de substituer dans la deuxième les valeurs de $b + c$ et de bc déduites de la première et de la troisième. On parvient ainsi à l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Celle-ci ne diffère de la proposée que par le changement de x en a.

Transformation des équations.

433. On facilite souvent la résolution d'une équation en lui faisant subir quelque transformation dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer les racines d'une certaine quantité, de les multiplier ou de les diviser par un même nombre, etc.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Pour augmenter toutes les racines d'une quantité h, on pose

$$y = x + h, \quad \text{d'où} \quad x = y - h;$$

en effectuant la substitution dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad (y - h)^m + A(y - h)^{m-1} + B(y - h)^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Cette équation satisfait à la condition proposée ; car le résultat de la substitution de a à la place de x dans (1) est le même que celui de la substitution de $a + h$ à la place de y dans (2). Par conséquent, si a est une racine de la première équation, $a + h$ est une racine de la seconde.

On peut aussi parvenir à cette conclusion en mettant le premier membre de l'équation sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré; car, si a, b, c,..., k sont les racines, le premier membre sera équivalent à

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, en mettant $y-h$ à la place de x, on change ce produit dans le suivant :

$$[y-(a+h)][y-(b+h)][y-(c+h)]\ldots[y-(k+h)];$$

les racines de l'équation en y formée par cette substitution sont donc $a+h$, $b+h$,..., $k+h$.

434. Quand on veut diminuer toutes les racines de l'équation (1) d'une même quantité, la question ne diffère de celle dont nous venons de nous occuper qu'en ce que h doit être une quantité négative. Si l'on représente cette quantité par $-h$, l'équation transformée est

$$(3)\quad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2}\ldots + K = 0.$$

On se sert de cette transformation pour changer une équation en une autre qui ne contienne pas une puissance désignée de l'inconnue. En développant les diverses puissances du binôme $y+h$ dans l'équation (3), elle devient

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)h^2 & y^{m-2}\ldots + h^m \\ \quad\;\; + A & \qquad + (m-1)Ah & \qquad\qquad + Ah^{m-1} \\ & \qquad + B & \qquad\qquad + Bh^{m-2} \\ & & \qquad\qquad \vdots \\ & & \qquad\qquad + K \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que cette équation ne contienne pas la puissance $m-1$ de y, il faudra poser

$$mh + A = 0,\quad \text{d'où}\quad h = -\frac{A}{m}.$$

La relation $x = y + h$ deviendra par là

$$x = y - \frac{A}{m}.$$

Donc, pour transformer une équation en une autre qui manque

du second terme, il faut remplacer l'inconnue x par une autre inconnue y augmentée du coefficient A du second terme dans l'équation proposée, pris en signe contraire et divisé par le degré de l'équation. Les racines de l'équation transformée sont alors égales à celles de la proposée augmentées de $\frac{A}{m}$.

On peut s'expliquer cette règle par celles qui ont été exposées relativement à la composition des coefficients avec les racines (n° 432). Lorsque les racines sont toutes augmentées de $\frac{A}{m}$, leur somme est augmentée de $m \times \frac{A}{m}$, ou de A; mais cette somme était d'abord égale à $-$ A; la somme des racines de la nouvelle équation est donc égale à zéro. Le coefficient du second terme doit donc être nul.

Si l'on voulait faire disparaître le troisième terme de l'équation (4), on égalerait le coefficient de ce terme à zéro, ce qui donnerait une équation du second degré, d'où l'on tirerait deux valeurs de h. L'évanouissement du quatrième terme dépendrait d'une équation du troisième degré, etc.; et si l'on voulait faire évanouir le dernier terme, on aurait à résoudre une équation toute semblable à la proposée.

Il est facile de s'expliquer cette dernière particularité; car, lorsque le dernier terme de l'équation (4) est nul, une des racines de cette équation est égale à zéro; or ces racines sont celles de la proposée, diminuées de h; par conséquent, pour que l'une d'elles soit nulle, il faut et il suffit que h soit une des racines de l'équation proposée.

435. Pour exemple de l'évanouissement du second terme, prenons l'équation

$$(5) \qquad x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0.$$

Il faut remplacer x par $y - 1$; ce qui donne

$$y^5 - 9y^3 + y^2 - 9 = 0.$$

On peut écrire cette équation comme il suit :

$$(y^2 - 9)(y^3 + 1) = 0;$$

alors on voit qu'elle se partage en deux autres, savoir :

$$y^2 - 9 = 0, \quad y^3 + 1 = 0.$$

On conclut de la première $y = +3$ et $y = -3$; et la seconde donne (n° 213)

$$y = -1, \quad y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}), \quad y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}).$$

Il suit de là que l'équation (5) a trois racines réelles et deux racines imaginaires, qui sont

$$x = 2, \quad x = -4, \quad x = -2,$$
$$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \quad x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}).$$

Dans cet exemple, l'équation transformée ne contient ni la quatrième puissance de l'inconnue, ni la première. Mais on ne doit pas généralement compter sur la possibilité de faire évanouir à la fois plusieurs termes ; et, quand il manque des termes, si l'on fait évanouir un de ceux que l'équation contient, cette transformation fait reparaître les termes qui manquaient d'abord.

436. Pour transformer une équation en une autre dont les racines soient égales à celles de la proposée multipliées par une même quantité h, on posera $y = hx$, d'où $x = \frac{y}{h}$; la substitution de $\frac{y}{h}$ à la place de x donnera l'équation demandée. Si les racines doivent être divisées par h, on posera $y = \frac{x}{h}$, d'où $x = hy$.

437. Pour transformer une équation donnée en une autre dont les racines soient égales à celles de la première avec des signes contraires, il faut remplacer x par $-y$.

Quand le degré est pair, la substitution de $-y$ à la place de x change les signes de tous les termes de rang pair, à partir du premier ; et les termes de rang impair ne changent pas. Quand le degré est impair, les termes de rang impair changent de signes, et les termes de rang pair ne changent pas ; mais

duire des relations dont il s'agit une équation qui ne contienne plus que a, cette équation donne indistinctement toutes les racines ; par conséquent, elle sera la même que l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

En représentant les trois racines par a, b, c, on a

$$-a - b - c = A, \quad ab + ac + bc = B, \quad -abc = C.$$

Pour éliminer b et c entre ces trois équations, il suffit de substituer dans la deuxième les valeurs de $b + c$ et de bc déduites de la première et de la troisième. On parvient ainsi à l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Celle-ci ne diffère de la proposée que par le changement de x en a.

Transformation des équations.

433. On facilite souvent la résolution d'une équation en lui faisant subir quelque transformation dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer les racines d'une certaine quantité, de les multiplier ou de les diviser par un même nombre, etc.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Pour augmenter toutes les racines d'une quantité h, on pose

$$y = x + h, \quad \text{d'où} \quad x = y - h;$$

en effectuant la substitution dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad (y - h)^m + A(y - h)^{m-1} + B(y - h)^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Cette équation satisfait à la condition proposée ; car le résultat de la substitution de a à la place de x dans (1) est le même que celui de la substitution de $a + h$ à la place de y dans (2). Par conséquent, si a est une racine de la première équation, $a + h$ est une racine de la seconde.

On peut aussi parvenir à cette conclusion en mettant le premier membre de l'équation sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré; car, si a, b, c,..., k sont les racines, le premier membre sera équivalent à

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, en mettant $y-h$ à la place de x, on change ce produit dans le suivant :

$$[y-(a+h)][y-(b+h)][y-(c+h)]\ldots[y-(k+h)];$$

les racines de l'équation en y formée par cette substitution sont donc $a+h$, $b+h$,..., $k+h$.

434. Quand on veut diminuer toutes les racines de l'équation (1) d'une même quantité, la question ne diffère de celle dont nous venons de nous occuper qu'en ce que h doit être une quantité négative. Si l'on représente cette quantité par $-h$, l'équation transformée est

$$(3)\qquad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2}\ldots + K = 0.$$

On se sert de cette transformation pour changer une équation en une autre qui ne contienne pas une puissance désignée de l'inconnue. En développant les diverses puissances du binôme $y+h$ dans l'équation (3), elle devient

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)h^2 & y^{m-2}\ldots + h^m \\ \quad\;\; + A & \quad + (m-1)Ah & \qquad\quad + Ah^{m-1} \\ & \quad + B & \qquad\quad + Bh^{m-2} \\ & & \qquad\quad \vdots \\ & & \qquad\quad + K \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que cette équation ne contienne pas la puissance $m-1$ de y, il faudra poser

$$mh + A = 0,\quad \text{d'où}\quad h = -\frac{A}{m}.$$

La relation $x = y + h$ deviendra par là

$$x = y - \frac{A}{m}.$$

Donc, pour transformer une équation en une autre qui manque

duire des relations dont il s'agit une équation qui ne contienne plus que a, cette équation donne indistinctement toutes les racines; par conséquent, elle sera la même que l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

En représentant les trois racines par a, b, c, on a

$$-a - b - c = A, \quad ab + ac + bc = B, \quad -abc = C.$$

Pour éliminer b et c entre ces trois équations, il suffit de substituer dans la deuxième les valeurs de $b + c$ et de bc déduites de la première et de la troisième. On parvient ainsi à l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Celle-ci ne diffère de la proposée que par le changement de x en a.

Transformation des équations.

433. On facilite souvent la résolution d'une équation en lui faisant subir quelque transformation dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer les racines d'une certaine quantité, de les multiplier ou de les diviser par un même nombre, etc.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Pour augmenter toutes les racines d'une quantité h, on pose

$$y = x + h, \quad \text{d'où} \quad x = y - h;$$

en effectuant la substitution dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad (y-h)^m + A(y-h)^{m-1} + B(y-h)^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Cette équation satisfait à la condition proposée; car le résultat de la substitution de a à la place de x dans (1) est le même que celui de la substitution de $a + h$ à la place de y dans (2). Par conséquent, si a est une racine de la première équation, $a + h$ est une racine de la seconde.

On peut aussi parvenir à cette conclusion en mettant le premier membre de l'équation sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré; car, si a, b, c,..., k sont les racines, le premier membre sera équivalent à

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, en mettant $y-h$ à la place de x, on change ce produit dans le suivant :

$$[y-(a+h)][y-(b+h)][y-(c+h)]\ldots[y-(k+h)];$$

les racines de l'équation en y formée par cette substitution sont donc $a+h$, $b+h$,..., $k+h$.

434. Quand on veut diminuer toutes les racines de l'équation (1) d'une même quantité, la question ne diffère de celle dont nous venons de nous occuper qu'en ce que h doit être une quantité négative. Si l'on représente cette quantité par $-h$, l'équation transformée est

$$(3)\quad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2}\ldots + K = 0.$$

On se sert de cette transformation pour changer une équation en une autre qui ne contienne pas une puissance désignée de l'inconnue. En développant les diverses puissances du binôme $y+h$ dans l'équation (3), elle devient

$$(4)\quad \left.\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)h^2 & y^{m-2}\ldots + h^m \\ \quad\; + A & \quad + (m-1)Ah & \qquad\quad + Ah^{m-1} \\ & \quad + B & \qquad\quad + Bh^{m-2} \\ & & \qquad\quad \vdots \\ & & \qquad\quad + K \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que cette équation ne contienne pas la puissance $m-1$ de y, il faudra poser

$$mh + A = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{A}{m}.$$

La relation $x = y + h$ deviendra par là

$$x = y - \frac{A}{m}.$$

Donc, pour transformer une équation en une autre qui manque

duire des relations dont il s'agit une équation qui ne contienne plus que a, cette équation donne indistinctement toutes les racines ; par conséquent, elle sera la même que l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

En représentant les trois racines par a, b, c, on a

$$-a - b - c = A, \quad ab + ac + bc = B, \quad -abc = C.$$

Pour éliminer b et c entre ces trois équations, il suffit de substituer dans la deuxième les valeurs de $b+c$ et de bc déduites de la première et de la troisième. On parvient ainsi à l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Celle-ci ne diffère de la proposée que par le changement de x en a.

Transformation des équations.

433. On facilite souvent la résolution d'une équation en lui faisant subir quelque transformation dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer les racines d'une certaine quantité, de les multiplier ou de les diviser par un même nombre, etc.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Pour augmenter toutes les racines d'une quantité h, on pose

$$y = x + h, \quad \text{d'où} \quad x = y - h;$$

en effectuant la substitution dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad (y-h)^m + A(y-h)^{m-1} + B(y-h)^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Cette équation satisfait à la condition proposée ; car le résultat de la substitution de a à la place de x dans (1) est le même que celui de la substitution de $a+h$ à la place de y dans (2). Par conséquent, si a est une racine de la première équation, $a+h$ est une racine de la seconde.

On peut aussi parvenir à cette conclusion en mettant le premier membre de l'équation sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré; car, si a, b, c,..., k sont les racines, le premier membre sera équivalent à

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, en mettant $y-h$ à la place de x, on change ce produit dans le suivant :

$$[y-(a+h)][y-(b+h)][y-(c+h)]\ldots[y-(k+h)];$$

les racines de l'équation en y formée par cette substitution sont donc $a+h$, $b+h$,..., $k+h$.

434. Quand on veut diminuer toutes les racines de l'équation (1) d'une même quantité, la question ne diffère de celle dont nous venons de nous occuper qu'en ce que h doit être une quantité négative. Si l'on représente cette quantité par $-h$, l'équation transformée est

$$(3)\qquad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2}\ldots + K = 0.$$

On se sert de cette transformation pour changer une équation en une autre qui ne contienne pas une puissance désignée de l'inconnue. En développant les diverses puissances du binôme $y+h$ dans l'équation (3), elle devient

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)h^2 & y^{m-2}\ldots + h^m \\ \quad\;\; + A & \qquad\quad + (m-1)Ah & \qquad\qquad + Ah^{m-1} \\ & \qquad\quad + B & \qquad\qquad + Bh^{m-2} \\ & & \qquad\qquad\;\; \vdots \\ & & \qquad\qquad + K \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que cette équation ne contienne pas la puissance $m-1$ de y, il faudra poser

$$mh + A = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{A}{m}.$$

La relation $x = y + h$ deviendra par là

$$x = y - \frac{A}{m}.$$

Donc, pour transformer une équation en une autre qui manque

duire des relations dont il s'agit une équation qui ne contienne plus que a, cette équation donne indistinctement toutes les racines ; par conséquent, elle sera la même que l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

En représentant les trois racines par a, b, c, on a

$$-a - b - c = A, \quad ab + ac + bc = B, \quad -abc = C.$$

Pour éliminer b et c entre ces trois équations, il suffit de substituer dans la deuxième les valeurs de $b + c$ et de bc déduites de la première et de la troisième. On parvient ainsi à l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Celle-ci ne diffère de la proposée que par le changement de x en a.

Transformation des équations.

433. On facilite souvent la résolution d'une équation en lui faisant subir quelque transformation dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer les racines d'une certaine quantité, de les multiplier ou de les diviser par un même nombre, etc.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Pour augmenter toutes les racines d'une quantité h, on pose

$$y = x + h, \quad \text{d'où} \quad x = y - h;$$

en effectuant la substitution dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad (y - h)^m + A(y - h)^{m-1} + B(y - h)^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Cette équation satisfait à la condition proposée ; car le résultat de la substitution de a à la place de x dans (1) est le même que celui de la substitution de $a + h$ à la place de y dans (2). Par conséquent, si a est une racine de la première équation, $a + h$ est une racine de la seconde.

On peut aussi parvenir à cette conclusion en mettant le premier membre de l'équation sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré; car, si a, b, c,..., k sont les racines, le premier membre sera équivalent à

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, en mettant $y-h$ à la place de x, on change ce produit dans le suivant :

$$[y-(a+h)][y-(b+h)][y-(c+h)]\ldots[y-(k+h)];$$

les racines de l'équation en y formée par cette substitution sont donc $a+h$, $b+h$,..., $k+h$.

434. Quand on veut diminuer toutes les racines de l'équation (1) d'une même quantité, la question ne diffère de celle dont nous venons de nous occuper qu'en ce que h doit être une quantité négative. Si l'on représente cette quantité par $-h$, l'équation transformée est

$$(3)\quad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2}\ldots + K = 0.$$

On se sert de cette transformation pour changer une équation en une autre qui ne contienne pas une puissance désignée de l'inconnue. En développant les diverses puissances du binôme $y+h$ dans l'équation (3), elle devient

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)h^2 & y^{m-2}\ldots + h^m \\ \quad + A & \quad + (m-1)Ah & \quad + Ah^{m-1} \\ & \quad + B & \quad + Bh^{m-2} \\ & & \quad \vdots \\ & & \quad + K \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que cette équation ne contienne pas la puissance $m-1$ de y, il faudra poser

$$mh + A = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{A}{m}.$$

La relation $x = y + h$ deviendra par là

$$x = y - \frac{A}{m}.$$

Donc, pour transformer une équation en une autre qui manque

duire des relations dont il s'agit une équation qui ne contienne plus que a, cette équation donne indistinctement toutes les racines ; par conséquent, elle sera la même que l'équation proposée.

Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

En représentant les trois racines par a, b, c, on a

$$-a - b - c = A, \quad ab + ac + bc = B, \quad -abc = C.$$

Pour éliminer b et c entre ces trois équations, il suffit de substituer dans la deuxième les valeurs de $b + c$ et de bc déduites de la première et de la troisième. On parvient ainsi à l'équation

$$a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Celle-ci ne diffère de la proposée que par le changement de x en a.

Transformation des équations.

433. On facilite souvent la résolution d'une équation en lui faisant subir quelque transformation dont l'effet est d'augmenter ou de diminuer les racines d'une certaine quantité, de les multiplier ou de les diviser par un même nombre, etc.

Soit l'équation

$$(1) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Pour augmenter toutes les racines d'une quantité h, on pose

$$y = x + h, \quad \text{d'où} \quad x = y - h;$$

en effectuant la substitution dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad (y - h)^m + A(y - h)^{m-1} + B(y - h)^{m-2} \ldots + K = 0.$$

Cette équation satisfait à la condition proposée; car le résultat de la substitution de a à la place de x dans (1) est le même que celui de la substitution de $a + h$ à la place de y dans (2). Par conséquent, si a est une racine de la première équation, $a + h$ est une racine de la seconde.

On peut aussi parvenir à cette conclusion en mettant le premier membre de l'équation sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré; car, si a, b, c,..., k sont les racines, le premier membre sera équivalent à

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, en mettant $y-h$ à la place de x, on change ce produit dans le suivant:

$$[y-(a+h)][y-(b+h)][y-(c+h)]\ldots[y-(k+h)];$$

les racines de l'équation en y formée par cette substitution sont donc $a+h$, $b+h$,..., $k+h$.

434. Quand on veut diminuer toutes les racines de l'équation (1) d'une même quantité, la question ne diffère de celle dont nous venons de nous occuper qu'en ce que h doit être une quantité négative. Si l'on représente cette quantité par $-h$, l'équation transformée est

$$(3)\qquad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2}\ldots + K = 0.$$

On se sert de cette transformation pour changer une équation en une autre qui ne contienne pas une puissance désignée de l'inconnue. En développant les diverses puissances du binôme $y+h$ dans l'équation (3), elle devient

$$(4)\qquad \left.\begin{array}{l|l|l} y^m + mh & y^{m-1} + \frac{1}{2}m(m-1)h^2 & y^{m-2}\ldots + h^m \\ \quad + A & \quad + (m-1)Ah & \qquad + Ah^{m-1} \\ & \quad + B & \qquad + Bh^{m-2} \\ & & \qquad \vdots \\ & & \qquad + K \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que cette équation ne contienne pas la puissance $m-1$ de y, il faudra poser

$$mh + A = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{A}{m}.$$

La relation $x = y + h$ deviendra par là

$$x = y - \frac{A}{m}.$$

Donc, pour transformer une équation en une autre qui manque

CHAPITRE QUATORZIÈME.

LIMITES DES RACINES. RACINES COMMENSURABLES. DÉCOMPOSITION D'UNE ÉQUATION QUI A DES RACINES ÉGALES. FORMULES GÉNÉRALES SUR LES DIFFÉRENCES.

Des limites des racines.

447. Lorsque le premier membre d'une équation est rendu positif par un nombre et par tous les nombres plus grands, l'équation ne peut avoir que des racines plus petites que ce nombre; il est donc une *limite supérieure* des racines.

Soit l'équation

$$x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \ldots \pm K = 0,$$

le premier terme x^m étant positif, et les autres termes pouvant avoir indifféremment le signe $+$ ou le signe $-$.

Désignons par N la valeur absolue du plus grand coefficient négatif. On rendra le premier membre de l'équation positif si l'on satisfait à l'inégalité

$$x^m > N.x^{m-1} + Nx^{m-2} \ldots + Nx + N.$$

Or le polynôme $Nx^{m-1} + Nx^{m-2} \ldots + Nx + N$ est la même chose que $N(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + x + 1)$, ou $\dfrac{N(x^m - 1)}{x - 1}$. La condition ci-dessus est donc

$$x^m > \frac{N(x^m - 1)}{x - 1}.$$

Celle-ci sera vérifiée si l'on fait $x = 1 + N$ ou $x > 1 + N$; car le quotient de N par $x - 1$ sera égal à 1 ou moindre que 1; par conséquent, le second membre sera égal $x^m - 1$, ou plus petit que $x^m - 1$. Donc, *On a une limite supérieure des racines d'une équation, en ajoutant l'unité à la valeur absolue du plus grand coefficient négatif.*

448. Quand le terme du degré immédiatement inférieur à celui de l'équation n'est pas négatif, on peut obtenir une li-

mite moindre que la précédente. Soit l'équation

$$x^m \ldots - Fx^{m-n} \pm Gx^{m-n-1} \ldots \pm K = 0,$$

le terme $-Fx^{m-n}$ étant le premier terme négatif, et les termes suivants pouvant être indifféremment positifs ou négatifs.

Désignons encore par N la valeur absolue du plus grand coefficient négatif. On rendra le premier membre de l'équation positif si l'on satisfait à l'inégalité

$$x^m > Nx^{m-n} + Nx^{m-n-1} \ldots + N, \quad \text{ou} \quad x^m > N\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1}.$$

Si l'on suppose $x > 1$, il suffira que l'on ait

$$x^m > \frac{Nx^{m-n+1}}{x-1}, \quad \text{ou} \quad x^{n-1}(x-1) > N.$$

Or la dernière condition sera vérifiée si l'on a

$$(x-1)^{n-1}(x-1) = \text{ ou } > N, \quad \text{ou bien} \quad (x-1)^n = \text{ ou } > N;$$

d'où

$$x = \text{ ou } > 1 + \sqrt[n]{N}.$$

Donc, *On a encore une limite supérieure des racines, en ajoutant l'unité à la racine de la valeur absolue du plus grand coefficient négatif, dont l'indice est la différence entre le degré de l'équation et l'exposant du premier terme négatif.*

On doit observer qu'il n'y a pas lieu de recourir à cette règle lorsque le coefficient N est plus petit que l'unité; puisque, dans ce cas, $\sqrt[n]{N} > N$.

449. On peut obtenir une limite supérieure des racines par le moyen suivant, qui a été indiqué par Newton :

Si l'on diminue toutes les racines de l'équation d'un même nombre h, et si l'on détermine h de manière que l'équation transformée n'ait aucune racine positive, ce nombre sera une limite supérieure des racines de la proposée.

Représentons l'équation proposée par $f(x) = 0$. Pour diminuer toutes les racines d'une même quantité h, il faut poser $y = x - h$, d'où $x = y + h$; l'équation transformée est

$f(y+h)=0$, ou

$$f(h)+f'(h)y+f''(h)\frac{y^2}{1.2}+f'''(h)\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots=0.$$

Cela posé, si l'on prend pour h un nombre tel que tous les termes de cette équation soient positifs, elle n'aura aucune racine positive (n° 438). Ce nombre sera donc la limite cherchée.

Pour trouver ce nombre, on considérera d'abord la dérivée de l'ordre $m-1$ de $f(x)$, qui ne contient x qu'au premier degré, et on déterminera la plus petite valeur entière de x qui la rendra positive. On substituera cette valeur dans la dérivée de l'ordre $m-2$, et si le résultat est négatif, on augmentera la valeur de x successivement d'une unité, jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre qui donne un résultat positif. On continuera ainsi pour toutes les fonctions successives jusqu'à $f(x)$.

Lorsqu'un nombre k rendra positives toutes les dérivées depuis l'ordre $m-1$ jusqu'à l'ordre n, s'il faut augmenter ce nombre k d'une ou de plusieurs unités, pour en obtenir un qui rende positive la dérivée de l'ordre $n-1$, on sera assuré que cette nouvelle valeur de x rendra encore positives toutes les dérivées depuis l'ordre $m-1$ jusqu'à l'ordre n. Car, en considérant une dérivée d'ordre quelconque, on a

$$f^{(p)}(k+h)=f^{(p)}(k)+f^{(p+1)}(k)h+f^{(p+2)}(k)\frac{h^2}{1.2}+\ldots.$$

Donc, si $f^{(p)}(k)$, $f^{(p+1)}(k)$, $f^{(p+2)}(k)$, etc., sont des quantités positives, h étant aussi une quantité positive, $f^{(p)}(k+h)$ sera une quantité positive.

450. Quand l'équation proposée a toutes ses racines réelles, la méthode de Newton fait trouver la limite la plus approchée, en nombre entier, c'est-à-dire le nombre entier immédiatement supérieur à la plus grande racine. Car, dans ce cas, l'équation en y a aussi toutes ses racines réelles; par conséquent, pour qu'elle n'ait aucune racine positive, il faut que tous ses termes soient positifs. Or, en ne prenant dans les essais que des nombres entiers, on déterminera toujours le plus petit

nombre entier qui fera prendre des valeurs positives au premier membre de l'équation et à ses dérivées.

451. Pour obtenir une limite inférieure des racines positives, on remplace x par $\frac{1}{y}$: si L est une limite supérieure des racines de l'équation en y, il est clair que $\frac{1}{L}$ est une limite inférieure des racines de l'équation en x.

En effectuant cette transformation sur une équation littérale, on reconnaît que l'on peut toujours prendre pour limite inférieure des racines positives, la valeur absolue du dernier terme, divisée par la somme qu'on obtient en ajoutant à la valeur absolue du dernier terme celle du plus grand coefficient de signe contraire au signe du dernier terme.

Pour trouver des limites des racines négatives, on remplace x par $-x$, et l'on cherche les limites des racines positives de la transformée.

452. On peut tenir compte avec avantage, pour la détermination des limites, des différents termes positifs que l'équation renferme, en partageant les termes en plusieurs groupes; comme on le voit dans les exemples suivants :

$$x^8 - 4x^7 + 13x^6 - x^5 - 18x^4 + 3x^2 - 100x + 1000 = 0;$$

on écrit cette équation comme il suit :

$$x^7(x-4) + 13x^4\left(x^2 - \frac{1}{13}x - \frac{18}{13}\right) + 3\left[\left(x - \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{500}{9}\right] = 0.$$

On voit alors que le premier membre aura une valeur positive si l'on a $x = 4$ ou $x > 4$; car le binôme $x - 4$ sera positif; d'ailleurs le trinôme $x^2 - \frac{1}{13}x - \frac{18}{13}$ est positif pour toutes les valeurs de x qui surpassent $1 + \frac{18}{13}$, et la quantité $\left(x - \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{500}{9}$ est positive pour toutes les valeurs réelles de x. Le nombre 4 est donc une limite supérieure des racines. La règle du n° 447 donnerait pour limite 101.

Soit encore l'équation

$$2x^6 - 7x^5 + x^4 + 2x^3 - 60x - 48 = 0.$$

On peut l'écrire ainsi :

$$2x^5\left(x-\frac{7}{2}\right)+x^4+2x^3-60x-48=0.$$

Le binôme $x-\frac{7}{2}$ sera positif pour toute valeur de x plus grande que $\frac{7}{2}$; et d'après la règle du n° **448**, le polynôme $x^4+2x^3-60x-48$ sera positif pour $x=1+\sqrt[3]{60}$ et pour toute valeur plus grande de x. D'ailleurs $1+\sqrt[3]{60}$ est compris entre 4 et 5. Le nombre 5 est donc une limite supérieure des racines de l'équation.

On peut obtenir une limite moindre que 5; car le polynôme $x^4+2x^3-60x-48$ n'offrant qu'une seule variation, si x croissait à partir de zéro, la valeur du polynôme irait toujours en croissant et ne changerait de signe qu'une seule fois (n° **422**). Or, on trouve qu'il est positif pour $x=4$; d'ailleurs le binôme $x-\frac{7}{2}$ est aussi positif pour $x=4$. Donc 4 est une limite supérieure des racines.

En faisant $x=3$ dans le polynôme $x^4+2x^3-60x-48$, on obtient un résultat négatif; par conséquent, ce polynôme sera aussi négatif pour toute valeur de x plus petite que 3. D'ailleurs $x-\frac{7}{2}$ est aussi négatif pour $x=3$ et pour toute valeur de x plus petite que 3. Donc le nombre 3 est une limite inférieure des racines positives de l'équation.

Si l'on a l'équation

$$x^8+x^7-2x^6-5x^5+120x^4-2x^3-8x^2+50x+60=0,$$

on pourra obtenir une limite inférieure de ses racines positives, en l'écrivant comme il suit :

$$60+50x-8x^2-2x^3+x^4(120-5x-2x^2)+x^7+x^8=0.$$

Il est aisé de prouver, en imitant la démonstration du n° **422**, que, lorsqu'un polynôme ordonné suivant les puissances croissantes de x, est composé d'un ou de plusieurs termes positifs suivis de termes tous négatifs, s'il est positif pour une valeur positive de x, il est aussi positif pour

toute valeur positive plus petite. Or, les deux polynômes $60 + 50x - 8x^2 - 2x^3$ et $120 - 5x - 2x^2$ sont positifs pour $x = 4$. Donc 4 est une limite inférieure des racines positives de l'équation.

En groupant les termes de cette autre manière

$$x^5(x^3 + x^2 - 2x - 5) + x^2(120x^2 - 2x - 8) + 50x + 60 = 0,$$

on reconnaît que 2 est une limite supérieure des racines. Par conséquent l'équation n'a aucune racine positive. Comme elle a quatre variations, elle a au moins quatre racines imaginaires.

453. Nommons X le polynôme $x^m + Ax^{m-1} +$ etc., et L la limite $1 + N$ ou $1 + \sqrt[n]{N}$ des racines de l'équation $X = 0$. Si l'on attribue à x des valeurs qui croissent à partir de L, la valeur du polynôme X croîtra avec celle de x; car, si l'on considère le premier terme x^m et l'ensemble des termes négatifs, ces termes formeront un polynôme qui sera positif pour $x = L$, et qui croîtra lorsque x croîtra à partir de cette limite (nº 422) ; et puisque les autres termes de X sont positifs et croissent avec x, le polynôme X croîtra aussi. La même chose a lieu en prenant pour L une limite obtenue par la décomposition du polynôme X en plusieurs groupes de termes de degrés décroissants, commençant chacun par un ou plusieurs termes positifs, et dans lesquels les signes ne changent qu'une seule fois; puisque chacun de ces groupes croîtra lorsque x croîtra à partir de L. Il en est encore de même quand L est la limite de Newton (nº 449); car, si $f(h)$, $f'(h)$, $f''(h)$, etc., sont des quantités positives, et si k est aussi une quantité positive, on voit, par le développement de $f(h+k)$, que cette quantité augmentera lorsque k augmentera. Si L est une limite supérieure quelconque des racines de $X = 0$, et si toutes les racines sont réelles, le polynôme X croîtra constamment lorsque x croîtra à partir de L; car tous les facteurs du premier degré de ce polynôme croîtront. Mais, s'il y a des racines imaginaires, les facteurs réels qui leur correspondront étant de la forme $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, pour que l'on soit assuré que X croîtra lorsque x croîtra à partir de L, il ne suffira plus que

le nombre L soit plus grand que toutes les racines réelles; et il faudra qu'il soit aussi plus grand que les parties réelles des racines imaginaires.

Si l'on doit donner à x des valeurs négatives, dans le polynôme X, on changera x en $-x$; on pourra ensuite déterminer une quantité L' telle que, pour des valeurs croissantes à partir de L', la valeur absolue du polynôme sera constamment croissante.

Racines commensurables.

454. Soit l'équation

$$(1) \qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} \ldots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

dans laquelle tous les coefficients sont des nombres entiers.

Si un nombre entier a est racine de cette équation, on aura l'égalité

$$A_0 a^m + A_1 a^{m-1} \ldots + A_{m-2} a^2 + A_{m-1} a + A_m = 0;$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{A_m}{a} = -A_0 a^{m-1} - A_1 a^{m-2} \ldots - A_{m-2} a - A_{m-1}.$$

Le second membre de celle-ci est un nombre entier; donc a doit être un diviseur de A_m.

Posons $\frac{A_m}{a} = Q_1$; on aura

$$(3) \qquad \frac{Q_1 + A_{m-1}}{a} = -A_0 a^{m-2} - A_1 a^{m-3} \ldots - A_{m-2};$$

donc a doit être un diviseur de $Q_1 + A_{m-1}$.

Soit $\frac{Q_1 + A_{m-1}}{a} = Q_2$; on trouvera

$$(4) \qquad \frac{Q_2 + A_{m-2}}{a} = -A_0 a^{m-3} - A_1 a^{m-4} \ldots;$$

donc a doit être aussi un diviseur de $Q_2 + A_{m-2}$.

En continuant ainsi, on parviendra enfin à la condition

$$(5) \qquad \frac{Q_{m-1} + A_1}{a} = -A_0.$$

Lorsque la dernière condition est vérifiée, le nombre a est racine de l'équation. En effet, si l'on divise les deux membres de l'équation (1) par x^m, elle devient

$$(6) \qquad \frac{A_m}{x^m}+\frac{A_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{A_{m-2}}{x^{m-2}}\ldots+\frac{A_1}{x}+A_0=0.$$

Or, d'après les opérations par lesquelles on obtient les quotients Q_1, Q_2, etc., la quantité $\frac{Q_{m-1}+A_1}{a}+A_0$ est le résultat de la substitution de a à la place de x dans le premier membre de l'équation (6) (nº 414). Donc, si cette quantité est nulle, ce qui est la condition (5), l'équation (1) est vérifiée quand on fait $x=a$.

Ainsi, pour qu'une quantité entière a soit racine d'une équation dont les coefficients sont entiers, il faut et il suffit :

Que cette quantité soit un diviseur du dernier terme;

Que, si, au quotient du dernier terme divisé par a *on ajoute le coefficient de la première puissance de* x, *la somme divisée par* a *donne pour quotient un nombre entier;*

Que, si l'on ajoute à ce second quotient le coefficient de x^2, *la somme divisée par* a *donne pour quotient un nombre entier;*

Ainsi de suite;

Enfin que, lorsqu'on est parvenu au (m — 1)$^{\text{ième}}$ *quotient, en lui ajoutant le coefficient de* x^{m-1} *et divisant la somme par* a, *on ait un quotient égal au coefficient du premier terme pris en signe contraire.*

Quand l'équation est incomplète, il faut agir comme si elle était complète, en prenant zéro pour coefficient de chacune des puissances de x qui manquent.

455. Lorsque ces conditions sont vérifiées, les quotients Q_1, Q_2, ... $-A_0$, changés de signe, et dans l'ordre inverse de celui dans lequel on les obtient, sont les coefficients du quotient de la division du premier membre de l'équation (1) par $x-a$ (nº 425). Ce quotient égalé à zéro, donne une équation du degré $m-1$, qui doit faire trouver toutes les autres racines. Comme l'équation proposée peut en avoir plusieurs égales à a, il faut s'assurer si cette quantité est ou non racine de la

nouvelle équation. Si elle ne l'est pas, on passe aux autres diviseurs du dernier terme qui n'ont pas été essayés. En continuant de la sorte, on détermine successivement toutes les racines entières et le degré de multiplicité de chacune d'elles.

456. On commence par substituer dans l'équation $+1$ et -1, qui sont toujours des diviseurs du dernier terme, et pour lesquels les opérations qui résultent des conditions ci-dessus ne diffèrent pas de la substitution directe. On peut aussi déterminer d'abord des limites des racines, afin de n'essayer que les diviseurs compris entre ces limites.

1er Exemple. $x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0$.

Les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 4, 8, 16. La limite supérieure des racines, calculée d'après la règle du n° 448, est $1+\sqrt[3]{20}$, qui est moindre que 4; et en changeant x en $-x$, on reconnaît que -5 est une limite des racines négatives. On a donc à essayer $+1, +2, -1, -2, -4$.

$+1$ et -1 ne sont pas racines. $+2$ donne les résultats suivants :

$$Q_1=-\frac{16}{+2}=-8,\qquad Q_2=\frac{-8-20}{+2}=-14,$$

$$Q_3=\frac{-14-16}{+2}=-15,\quad Q_4=\frac{-15+1}{+2}=-7,$$

$$Q_5=\frac{-7+5}{2}=-1.$$

$+2$ est racine, et la division de l'équation proposée par $x-2$ donne l'équation du quatrième degré

$$x^4+7x^3+15x^2+14x+8=0.$$

Celle-ci n'a aucune racine positive. En essayant -2, on a

$$Q_1=\frac{+8}{-2}=-4,\qquad Q_2=\frac{-4+14}{-2}=-5,$$

$$Q_3=\frac{-5+15}{-2}=-5,\quad Q_4=\frac{-5+7}{-2}=-1.$$

-2 est racine, et la division de l'équation par $x+2$ donne l'équation du troisième degré

$$x^3+5x^2+5x+4=0.$$

En essayant de nouveau -2, on trouve que le quotient Q_2 est fractionnaire; donc -2 n'est pas racine. Pour -4, on a

$$Q_1 = \frac{+4}{-4} = -1, \qquad Q_2 = \frac{-1+5}{-4} = -1,$$

$$Q_3 = \frac{-1+5}{-4} = -1.$$

-4 est racine, et la division de l'équation par $x+4$ donne l'équation du second degré

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Celle-ci n'a que des racines imaginaires.

2^e^ Exemple. $\qquad 2x^3 - 53x + 105 = 0.$

Les nombres $+1$ et -1 ne sont pas racines. Les limites sont $+\sqrt{\frac{53}{2}}$ et $-\left(1+\sqrt{\frac{105}{2}}\right)$, et les diviseurs de 105 compris entre ces limites sont 3, 5, -3, -5 et -7. Pour 3, on a

$$Q_1 = \frac{105}{3} = 35, \quad Q_2 = \frac{35-53}{3} = -6, \quad Q_3 = \frac{-6+0}{3} = -2.$$

Le nombre 3 est racine, et la division de l'équation par $x-3$ donne l'équation du second degré

$$2x^2 + 6x - 35 = 0.$$

Les racines de celle-ci sont incommensurables.

457. Supposons maintenant qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ soit racine de l'équation (1). En substituant $\frac{a}{b}$ à la place de x, on aura

$$A_0 \frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + A_2 \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \ldots + A_m = 0;$$

d'où, en multipliant par b^m,

$$(7) \qquad A_0 a^m + A_1 a^{m-1} b + A_2 a^{m-2} b^2 \ldots + A_m b^m = 0.$$

Tous les termes du premier membre, à partir du second, sont divisibles par b; donc b doit diviser $A_0 a^m$; et puisqu'il

est premier avec a, il doit diviser A_0. Par une raison semblable, a doit diviser A_m.

Il résulte de cette proposition que les racines commensurables deviendraient toutes des nombres entiers, si l'on multipliait toutes les racines par le coefficient A_0 du premier terme ; de sorte que, par cette transformation, la recherche des racines fractionnaires serait ramenée à celle des racines entières. Mais on peut aussi trouver les racines fractionnaires directement.

458. En divisant tous les termes de l'égalité (7) par b, et en posant $A_0 \frac{a}{b} + A_1 = B_1$, on obtient

$$B_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} b \ldots + A_m b^{m-1} = 0.$$

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, b devant être un diviseur de A_0, B_1 est un nombre entier. En outre, d'après la dernière égalité, tous les termes, à partir du second, étant divisibles par b, il faut que b divise $B_1 a^{m-1}$; et puisqu'il est premier avec a, il doit diviser B_1.

Soit $B_1 \frac{a}{b} + A_2 = B_2$; B_2 sera un nombre entier, et on aura

$$B_2 a^{m-2} + A_3 a^{m-3} b \ldots + A_m b^{m-2} = 0.$$

On conclut de là que b doit diviser B_2.

En continuant ainsi, on parviendra en dernier lieu à la condition $B_{m-1} \frac{a}{b} + A_m = 0$.

Lorsque toutes ces conditions sont remplies, on a immédiatement le quotient de la division du premier membre de l'équation par le facteur $x - \frac{a}{b}$; car les nombres $A_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ sont les coefficients de ce quotient. En calculant les quotients de ces nombres divisés par b, qui sont entiers, on a les coefficients du quotient de la division du même polynôme par $bx - a$. On en conclut l'équation au moyen de laquelle on doit chercher les autres racines, en comprenant dans les nouveaux essais celle qui vient d'être obtenue.

459. Les coefficients du quotient de la division du premier membre de l'équation par $bx - a$ étant des nombres entiers, il s'ensuit, en supposant $x = 1$ et $x = -1$, que le résultat de la substitution de 1 à la place de x dans le premier membre, doit être divisible par $b - a$; et le résultat de la substitution de -1 doit être divisible par $b + a$.

On commencera par éprouver, au moyen de ces deux conditions, toutes les fractions dont les deux termes satisferont à celles qui ont été reconnues dans le n° 457. On passera ensuite à la vérification des autres conditions, expliquées dans le n° 458.

Pour les racines entières, il faut supposer $b = 1$; en sorte que, si a est une de ces racines, $a - 1$ doit diviser le résultat de la substitution de $+1$, et $a + 1$ doit diviser le résultat de la substitution de -1.

3e Exemple. $6x^6 - 19x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 16 = 0$.

On trouve la racine 2 répétée deux fois, et les deux racines $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$. Les deux autres sont imaginaires.

4e Exemple. $15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0$.

On trouve les racines $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{5}$. Les deux autres sont incommensurables.

Décomposition d'une équation qui a des racines égales.

460. Soit

$$f(x) = (x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q \ldots.$$

L'équation $f(x) = 0$ a des racines égales, savoir : n racines égales à a, p racines égales à b, q racines égales à c, etc.

Considérons la dérivée de $f(x)$; on a

$$\begin{aligned} f'(x) = & \; n(x-a)^{n-1}(x-b)^p(x-c)^q \ldots \\ & + p(x-a)^n(x-b)^{p-1}(x-c)^q \ldots \\ & + q(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^{q-1} \ldots \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Posons

$$D = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots;$$

D divise $f(x)$ et $f'(x)$. Il est le plus grand commun diviseur de ces deux quantités, autrement il faudrait que l'un des facteurs de $f(x)$ divisât le quotient de $f'(x)$ par D, lequel est

$$n(x-b)(x-c)\ldots \quad + p(x-a)(x-c)\ldots$$
$$+ q(x-a)(x-b)\ldots + \ldots$$

Or chacun des facteurs $x-a$, $x-b$, etc., divise toutes les parties de cette somme, à l'exception d'une seule ; par conséquent la somme n'est divisible par aucun de ces facteurs.

Donc, *Lorsqu'une équation a des racines égales, le premier membre de l'équation et sa fonction dérivée ont un commun diviseur algébrique ; et ce commun diviseur est le produit de tous les facteurs correspondants aux racines égales de l'équation, élevés chacun à une puissance moindre d'une unité.*

Lorsque l'équation n'a pas de racines égales, le premier membre et sa fonction dérivée n'ont aucun facteur commun algébrique ; car les exposants n ; p, q, etc., étant l'unité, le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $f'(x)$ se réduit à un nombre.

461. D'après ces propositions, pour reconnaître si une équation donnée $f(x)=0$ a des racines égales, on cherche le plus grand commun diviseur du polynôme $f(x)$ et de sa fonction dérivée $f'(x)$. Lorsque le plus grand commun diviseur est numérique, toutes les racines sont inégales. Si le plus grand commun diviseur est algébrique et s'il est du premier degré, il fait connaître une racine double de l'équation ; et il n'y a pas d'autres racines égales. Si le plus grand commun diviseur est du second degré, en l'égalant à zéro, on a une équation qui peut avoir deux racines différentes ou deux racines égales. Dans le premier cas, chacune des deux racines se trouve deux fois dans l'équation $f(x)=0$; dans le second cas, la valeur de x qu'on a trouvée est une racine triple.

462. Quand le plus grand commun diviseur est un polynôme D_1 d'un degré supérieur au second, on opère sur D_1 comme on a opéré sur le polynôme $f(x)$; c'est-à-dire que l'on

cherche le plus grand commun diviseur entre D_1 et sa fonction dérivée. Soit D_2 ce plus grand commun diviseur. Soit D_3 le plus grand commun diviseur de D_2 et de sa fonction dérivée, et supposons que D_3 soit premier avec sa dérivée. Dans ce cas D_2 a des facteurs doubles et ne contient pas de facteurs répétés plus de deux fois. D_1 a des facteurs triples et ne contient pas de facteurs répétés plus de trois fois. Enfin $f(x)$ a des facteurs quadruples, et n'en contient pas à un degré de multiplicité plus élevé.

Désignons par X_1 le produit des facteurs simples du polynôme $f(x)$, par X_2 le produit des premières puissances des facteurs doubles, par X_3 le produit des premières puissances des facteurs triples, par X_4 le produit des premières puissances des facteurs quadruples. On a

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$
$$D_1 = X_2 X_3^2 X_4^3.$$
$$D_2 = X_3 X_4^2.$$
$$D_3 = X_4.$$

En divisant chacune de ces égalités par la suivante, et en nommant Q_1 le quotient de $f(x)$ par D_1, Q_2 celui de D_1 par D_2, Q_3 celui de D_2 par D_3, on trouve

$$Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4, \quad Q_2 = X_2 X_3 X_4, \quad Q_3 = X_3 X_4.$$

En divisant encore chaque égalité par la suivante, et la dernière par $D_3 = X_4$, on obtient

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1, \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_2, \quad \frac{Q_3}{D_3} = X_3.$$

Après ces opérations qui déterminent les facteurs X_1, X_2, X_3, X_4, on trouvera toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ en résolvant séparément les quatre équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0.$$

La première équation fera connaître les racines simples de l'équation proposée ; la deuxième donnera les racines doubles ; la suivante donnera les racines triples ; enfin la dernière donnera les racines quadruples.

Si l'un des polynômes X_1, X_2, X_3 est numérique, on en

conclura qu'il n'y a pas de racines du degré de multiplicité correspondant au rang de ce polynôme.

463. Pour exemple de l'application de cette méthode, je prendrai l'équation

$$x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 - 259x^4 - 83x^3 + 612x^2 - 108x - 432 = 0.$$

Le plus grand commun diviseur du premier membre et de sa fonction dérivée est

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18.$$

Le plus grand commun diviseur de ce polynôme et de sa fonction dérivée est $x - 3$.

Le binôme $x - 3$ n'a aucun facteur commun avec sa dérivée, par conséquent l'équation proposée ne contient pas de facteurs élevés à des puissances supérieures à la troisième.

En conservant aux lettres X_1, X_2, X_3, le même sens que précédemment, on a

$$X_1 X_2^2 X_3^3 = x^8 - 7x^7 - 2x^6 + 118x^5 \ldots,$$
$$X_2 X_3^2 = x^4 - 7x^3 + 13x^2 \ldots,$$
$$X_3 = x - 3.$$

En divisant chacune de ces égalités par la suivante, on trouve

$$X_1 X_2 X_3 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$
$$X_2 X_3 = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

En divisant de nouveau la première égalité par la deuxième, et celle-ci par $X_3 = x - 3$, on obtient

$$X_1 = x + 4, \quad X_2 = x^2 - x - 2.$$

Les équations à résoudre sont donc

$$x + 4 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad x - 3 = 0;$$

d'où

$$x = -4, \quad x = -1, \quad x = 2, \quad x = 3;$$

-4 est une racine simple; -1 et 2 sont deux racines doubles; 3 est une racine triple.

Soit encore l'équation

$$x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = 0.$$

On obtient deux racines simples, -2 et $+1$; deux racines doubles, $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{-7}}{2}$; et une racine triple, -1.

464. Si l'on voulait avoir une équation qui contînt toutes les racines simples ou multiples de l'équation donnée, et dans laquelle chaque racine ne se trouvât qu'une seule fois, il suffirait de chercher le plus grand commun diviseur D_1 du polynôme $f(x)$ et de sa fonction dérivée, et de diviser $f(x)$ par D_1; le quotient donnerait l'équation demandée, puisque ce quotient, que nous avons désigné par Q_1, est $X_1X_2X_3X_4$.

On peut former deux équations dont l'une donne les racines simples, et l'autre les racines multiples sans les contenir plus d'une fois chacune. A cet effet, après avoir obtenu le quotient Q_1, on cherche le plus grand commun diviseur d des polynômes D_1 et Q_1; on a $d = X_2X_3X_4$, et, par suite, $\frac{Q_1}{d} = X_1$; les équations demandées sont donc $\frac{Q_1}{d} = 0$ et $d = 0$.

465. Lorsque tous les coefficients numériques d'une équation sont commensurables, les polynômes que nous avons désignés par X_1, X_2, X_3, etc., ne contiennent aussi que des coefficients commensurables; car les opérations par lesquelles on les obtient ne peuvent pas introduire de quantités irrationnelles. Par conséquent, si l'une des racines de l'équation est répétée n fois, et si toutes les autres racines ont des degrés de multiplicité différents, cette racine est nécessairement commensurable. On conclut de là qu'une équation du troisième degré qui n'a pas de racine commensurable, n'a pas de racines égales, puisqu'elle ne peut avoir deux racines au même degré de multiplicité. La même conclusion s'applique à l'équation du cinquième degré; car, si elle a des racines égales incommensurables, il faut qu'elle en ait deux au même degré de multiplicité; elle ne peut donc avoir que deux racines doubles; alors elle a une racine simple, qui est commensurable. Quant à l'équation du quatrième degré, si elle a des racines égales incommensurables, il faut qu'elle ait deux racines doubles; dans ce cas, son premier membre est un carré. On peut donc éviter l'emploi de la méthode des racines égales pour toutes les équations dont le degré ne surpasse pas le cinquième.

466. Quand on connaît une racine a d'une équation, on peut déterminer le degré de multiplicité de cette racine en la substituant dans les dérivées successives du premier membre de l'équation; car, suivant le théorème du n° **460**, si le premier membre de l'équation est divisible par $(x-a)^n$, la dérivée du premier ordre est divisible par $(x-a)^{n-1}$, celle du deuxième ordre est divisible par $(x-a)^{n-2}$, ainsi de suite; enfin, la dérivée de l'ordre $n-1$ est divisible par $x-a$, et la dérivée suivante ne contient pas le facteur $x-a$. La racine a doit donc réduire à zéro les dérivées successives du premier membre jusqu'à celle de l'ordre $n-1$, sans réduire à zéro la dérivée suivante.

467. On peut parvenir au théorème du n° **460** par une méthode différente de celle que nous avons suivie, et dans laquelle la considération des fonctions dérivées se présente d'une manière plus directe.

Soit a une des racines de l'équation $f(x)=0$. Si l'on forme une autre équation dont les racines soient égales à celles de la proposée diminuées de a, cette équation aura autant de racines égales à zéro qu'il y aura dans la proposée de racines égales à a. Pour diminuer toutes les racines de la proposée de a, il faut poser $y=x-a$, d'où $x=y+a$; l'équation transformée est $f(y+a)=0$, ou

$$f(a)+f'(a)y+f''(a)\frac{y^2}{1.2}+f'''(a)\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots=0.$$

$f(a)$ étant nulle, puisque, par hypothèse, a est une racine de l'équation $f(x)=0$, l'équation en y est satisfaite par $y=0$. Si la racine a est répétée n fois dans l'équation proposée, l'équation en y devant avoir n racines égales à zéro, il faut que son premier membre soit divisible par y^n, ce qui exige que les coefficients de toutes les puissances de y jusqu'à y^{n-1} soient nuls. Donc, lorsqu'une racine a entre n fois dans une équation, toutes les dérivées du premier membre, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$ inclusivement, doivent devenir nulles quand on y fait $x=a$. Réciproquement, si a étant racine d'une équation, l'hypothèse $x=a$ annule les dérivées du premier membre, jusqu'à l'ordre de $n-1$ inclusivement, sans

annuler celle de l'ordre n, la racine a entre n fois dans l'équation; puisque l'équation dont les racines sont celles de la proposée diminuées de a a n racines égales à zéro.

On déduit de là le théorème du n° 460; car, si les $n-1$ premières dérivées de $f(x)$ sont réduites à zéro pour $x=a$, la suivante ne l'étant pas, l'équation $f'(x)=0$ aura $n-1$ racines égales à a; par conséquent $f'(x)$ sera divisible par $(x-a)^{n-1}$; d'ailleurs ce polynôme ne sera pas divisible par une puissance plus haute de $x-a$; car, pour que $f'(x)$ fût divisible par $(x-a)^n$, il faudrait que la $n^{ième}$ dérivée de $f(x)$ devînt nulle pour $x=a$.

Formules générales relatives aux différences.

468. Considérons une suite de quantités quelconques

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots.$$

Si l'on retranche chacune d'elles de celle qui la suit, on formera une autre suite dont les termes seront ce que l'on appelle les *différences premières* des quantités proposées. On désigne ces différences par la lettre Δ placée devant la quantité que l'on soustrait; on a ainsi

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,\quad \Delta u_1 = u_2 - u_1,\quad \Delta u_2 = u_3 - u_2,\ \text{etc.}$$

En formant de même les différences des quantités Δu_0, Δu_1, Δu_2, etc., on obtient les *différences secondes* des quantités proposées, et on les désigne par le signe Δ^2; de sorte que l'on a

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0,\quad \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1,\quad \Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2,\ \text{etc.}$$

En continuant de la même manière, on forme successivement les *différences troisièmes*, *quatrièmes*, etc., qui sont désignées par Δ^3, Δ^4, etc.

469. On peut obtenir l'expression d'une différence d'un ordre quelconque, en fonction de toutes les quantités de la suite primitive dont elle dépend. On a d'abord, par les valeurs ci-dessus de Δu_0 et de Δu_1,

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - u_1 - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0;$$

pareillement

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1 :$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta^3 u_0 &= (u_3 - 2u_2 + u_1) - (u_2 - 2u_1 + u_0)\\ &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0.\end{aligned}$$

Les coefficients numériques dans ces expressions de $\Delta^2 u_0$ et $\Delta^3 u_0$, sont les mêmes que ceux du carré et du cube du binôme $x - a$. Pour démontrer que cette loi est générale, formons l'expression de $\Delta^n u_0$. Soit

$$\Delta^{n-1} u_0 = u_{n-1} - A u_{n-2} + B u_{n-3} - C u_{n-4} + \ldots ;$$

on a pareillement, et avec les mêmes coefficients,

$$\Delta^{n-1} u_1 = u_n - A u_{n-1} + B u_{n-2} - C u_{n-3} + \ldots ;$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta^n u_0 &= \Delta^{n-1} u_1 - \Delta^{n-1} u_0\\ &= u_n \begin{array}{r|}- A\\ - 1\end{array}\; u_{n-1} \begin{array}{r|}+ B\\ + A\end{array}\; u_{n-2} \begin{array}{r|}- C\\ - B\end{array}\; u_{n-3} + \ldots\end{aligned}$$

On conclut de là que les coefficients numériques, dans le passage d'une différence à la suivante, se forment suivant la même loi que dans le passage d'une puissance du binôme $x - a$ à la puissance suivante; et puisque les coefficients numériques de l'expression de $\Delta^2 u_0$ sont les mêmes que ceux du carré de $x - a$, les coefficients de l'expression d'une différence quelconque seront aussi les mêmes que ceux de la puissance correspondante. On a ainsi

$$(1)\quad \Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \ldots$$

On écrit abréviativement cette formule de la manière suivante :

$$\Delta^n u = (u - 1)^n.$$

On devra changer, seulement, dans le développement de la puissance, les exposants de u en indices.

470. Lorsque l'on connaît les différences de l'ordre n d'une suite de quantités, et le premier terme de chacune des suites précédentes de différences, et de la suite des quantités elles-

mêmes, on peut former toutes ces suites. On obtient d'abord les différences de l'ordre $n-1$ en ajoutant successivement à la première de ces différences, qui est connue, celles de l'ordre n; on passe de même de la suite des différences de l'ordre $n-1$ à celle des différences de l'ordre $n-2$; ainsi de suite.

471. On peut aussi obtenir l'expression de l'une quelconque des quantités de la suite primitive, au moyen du premier terme u_0 de cette suite et de ses différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, etc.

On a

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0;$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$

$$\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

Les coefficients numériques des expressions de u_2 et de u_3 sont encore ceux du carré et du cube d'un binôme. Pour démontrer que cette loi est générale, supposons que l'on ait

$$u_{n-1} = u_0 + \mathrm{A}\Delta u_0 + \mathrm{B}\Delta^2 u_0 + \mathrm{C}\Delta^3 u_0 + \ldots,$$

on aura pareillement

$$\Delta u_{n-1} = \Delta u_0 + \mathrm{A}\Delta^2 u_0 + \mathrm{B}\Delta^3 u_0 + \mathrm{C}\Delta^4 u_0 + \ldots,$$

et il en résultera

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + \Delta u_{n-1} \\ &= u_0 + \left.\begin{matrix}\mathrm{A}\\+1\end{matrix}\right| \Delta u_0 + \left.\begin{matrix}\mathrm{B}\\+\mathrm{A}\end{matrix}\right| \Delta^2 u_0 + \left.\begin{matrix}\mathrm{C}\\+\mathrm{B}\end{matrix}\right| \Delta^3 u_0 + \ldots. \end{aligned}$$

On conclut de là que les coefficients numériques, dans le passage d'une quantité à la suivante, se forment de la même manière que dans le passage d'une puissance de $x+a$ à la puissance suivante. On a donc

$$(2)\quad u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

On écrit abréviativement cette formule de la manière suivante :

$$u_n = (1+\Delta)^n u;$$

seulement, après le développement de la puissance, les exposants n'ont pas leur signification ordinaire, et ils ne sont que des indices de l'ordre des différences.

Différences des fonctions entières.

472. Supposons que les quantités u_0, u_1, u_2, u_3, etc., soient les valeurs d'une fonction entière de x, et qu'elles correspondent à des valeurs de la variable x équidistantes les unes des autres. Soit la fonction

$$u = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \ldots;$$

et désignons par h la différence constante de deux valeurs consécutives de x, on aura

$$\Delta u = A[(x+h)^n - x^n] + B[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \ldots.$$

Cette expression de Δu est du degré $n-1$ par rapport à x, et de cette forme,

$$nAhx^{n-1} + B_1 hx^{n-2} + C_1 hx^{n-3} + \ldots.$$

On obtiendra la différence suivante du même ordre, Δu_1, en remplaçant x par $x+h$; et, puisque $\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u$, on trouvera

$$\Delta^2 u = n(n-1)Ah^2 x^{n-2} + B_2 h^2 x^{n-3} + C_2 h^2 x^{n-4} + \ldots.$$

Les degrés de ces différences successives Δu, $\Delta^2 u$, etc., décroissent d'une unité, de chaque différence à la suivante, par conséquent la différence de l'ordre n, ou $\Delta^n u$, ne dépendra pas de x; et, d'après les expressions ci-dessus, on aura

$$\Delta^n u = 1.2.3\ldots nAh^n.$$

Cette différence étant constante, toutes celles des ordres suivants seront nulles.

473. D'après cette propriété des fonctions entières, on peut obtenir par des additions toutes les valeurs d'une telle fonction pour des valeurs équidistantes de la variable, quand on a calculé directement un nombre de ces valeurs égal au degré de la fonction.

Soit, par exemple, le polynôme

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10\,;$$

et supposons qu'on veuille obtenir les valeurs de ce polynôme en prenant pour x les nombres entiers positifs et négatifs.

Il faudra calculer les valeurs correspondantes à cinq nombres entiers consécutifs; et l'on choisira, pour plus de simplicité, les nombres -2, -1, 0, $+1$, $+2$. On formera ensuite, avec les résultats de ces substitutions, le tableau suivant :

		DIFF. I.	DIFF. II.	DIFF. III.	DIFF. IV.	DIFF. V.
$x = -2$	$+2$	-1	-10	$+12$	0	$+120$
-1	$+1$	-11	$+2$	$+12$	$+120$	
0	-10	-9	$+14$	$+132$	$+240$	
$+1$	-19	$+5$	$+146$	$+372$	$+360$	
$+2$	-14	$+151$	$+518$	$+732$	$+480$	
$+3$	$+137$	$+669$	$+1250$	$+1212$		
$+4$	$+806$	$+1919$	$+2462$			
$+5$	$+2725$	$+4381$				
$+6$	$+7106$					

La première colonne contient les valeurs de x, et la deuxième, les valeurs correspondantes de la fonction. On a d'abord formé les nombres qui sont au-dessus des filets. On a obtenu ceux de la troisième colonne en retranchant chacun des nombres de la deuxième colonne de celui qui est au-dessous de lui. La quatrième colonne est formée avec la troisième comme celle-ci a été formée avec la deuxième. La différence cinquième est connue à priori, suivant ce qu'on a vu dans le numéro précédent.

Pour obtenir les nombres qui sont au-dessous des filets, on continue d'abord la colonne des différences quatrièmes, dans laquelle chaque nombre est égal au précédent augmenté de la différence constante 120. On forme chacune des différences

troisièmes en ajoutant à celle qui précède la différence quatrième placée dans la même ligne. On agit de la même manière pour obtenir les différences secondes, les différences premières, et enfin les nombres contenus dans la deuxième colonne à gauche, qui sont les valeurs de la fonction.

Il faut opérer autrement pour les valeurs correspondantes aux nombres négatifs -3, -4, etc., qui sont données par le tableau ci-dessous :

$x=-3$	-139	$+141$	-142	$+132$	-120	$+120$
-4	-794	$+655$	-514	$+372$	-240	
-5	-2695	$+1901$	-1246	$+732$	-360	

....

On retranche d'abord la différence constante 120 de la différence quatrième 0, correspondante à $x=-2$; ce qui donne la différence quatrième -120, correspondante à $x=-3$. On retranche cette différence quatrième -120 de la différence troisième $+12$, correspondante à $x=-2$; ce qui donne la différence troisième $+132$, correspondante à $x=-3$. On obtient d'une manière semblable les différences -142, $+141$, et le résultat -139. Les nombres de la ligne correspondante à $x=-4$ sont formés avec ceux de la ligne correspondante à $x=-3$, comme ceux-ci ont été formés avec les nombres contenus dans la ligne correspondante à $x=-2$; et l'on continue de même autant qu'il est nécessaire.

474. Lorsque deux fonctions entières, du degré n, ont les mêmes valeurs pour $n+1$ valeurs différentes de la variable, elles sont identiques; car, si elles ne l'étaient pas, leur différence, qui serait du degré n au plus, serait annulée pour $n+1$ valeurs de x: ce qui est contraire à la proposition qu'une équation du degré n n'a pas plus de n racines.

En représentant la fonction par

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots,$$

et en exprimant qu'elle prend les valeurs u_0, u_1, u_2, u_3, etc., lorsqu'on remplace successivement x par les valeurs désignées, x_0, x_1, x_2, x_3, etc., on aurait $n+1$ équations, au moyen desquelles on trouverait les valeurs de $n+1$ coefficients A, B, C, etc.

Mais, dans le cas où les quantités x_0, x_1, x_2,..., x_n, sont équidistantes les unes des autres, l'expression de la fonction peut se déduire de la formule (2) [n° 471]. Le second membre de cette formule devenant successivement u_0, u_1, u_2, u_3, etc., lorsqu'on fait $n = 0$, $= 1$, $= 2$, $= 3$, etc., si l'on représente par h la différence constante de deux termes consécutifs de la suite x_0, x_1, x_2, etc., et si l'on écrit dans la formule (2), au lieu de n, $\frac{x - x_0}{h}$, le second membre deviendra successivement u_0, u_1, u_2,..., u_n, lorsqu'on remplacera x par x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$,..., $x_0 + nh$. D'ailleurs il sera une fonction entière de x, du degré n; il sera donc la fonction cherchée. On aura ainsi, en désignant cette fonction par u_x,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u_x = u_0 &+ \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 u_0}{1.2} \\ &+ \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right) \frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Dans le cas particulier où l'on fait $x = x_0 + \frac{1}{2} h$, on obtient pour la valeur de la fonction,

$$u_0 + \frac{1}{2} \Delta u_0 - \frac{1}{8} \Delta^2 u_0 + \frac{1}{16} \Delta^3 u_0 - \frac{5}{128} \Delta^4 u_0 + \ldots .$$

475. Lorsque la quantité u_0, et les différences Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc, jusqu'à $\Delta^n u_0$, sont toutes positives, h étant aussi une quantité positive, la fonction u_x a une valeur positive pour $x = x_0 + (n - 1) h$, et pour toute valeur plus grande de x; car ces valeurs de x rendent positifs tous les coefficients des différences dans la formule (3). Il suit de là que $x_0 + (n - 1) h$ est une limite supérieure des racines de l'équation $u_x = 0$.

476. Si l'on fait, pour abréger, $\frac{x - x_0}{h} = z$, la formule (3) devient

$$(4) \quad u_x = u_0 + z \Delta u_0 + \frac{z(z - 1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \frac{z(z - 1)(z - 2)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \ldots .$$

Supposons que la valeur de z soit comprise entre 0 et 1,

ce qui a lieu quand on donne à x des valeurs comprises entre x_0 et $x_0 + h$. Dans ce cas, les coefficients des différences Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc., sont alternativement positifs et négatifs, et leurs valeurs absolues vont en décroissant.

Le coefficient de $\Delta^2 u_0$, $-\frac{z(1-z)}{1.2}$, a une valeur au plus égale à $\frac{1}{8}$; car, la somme de deux facteurs z et $1-z$ étant constante et égale à 1, le maximum de leur produit est $\frac{1}{4}$.

Soit $\varphi(z) = z(z-1)(z-2) = z^3 - 3z^2 + 2z$. On a $\varphi'(z) = 3z^2 - 6z + 2$. Les racines de $\varphi'(z) = 0$ sont $1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$. La fonction $\varphi'(z)$ est positive pour les valeurs de z comprises entre 0 et $1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$, et elle est négative pour les valeurs de z plus petites que 1 et plus grandes que $1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$. Donc $\varphi(z)$ est croissante depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$, et elle est décroissante depuis $z = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ jusqu'à $z = 1$. On obtiendra donc la valeur maximum du coefficient de $\Delta^3 u_0$, en faisant $z = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$; ce qui donne $\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}$, qui est un nombre plus petit que $\frac{1}{15}$.

On conclut de là que la valeur numérique du coefficient de $\Delta^4 u_0$ est moindre que $\frac{1}{15} \times \frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{20}$; celle du coefficient de $\Delta^5 u_0$ est moindre que $\frac{1}{20} \times \frac{4}{5}$ ou $\frac{1}{25}$; etc.

CHAPITRE QUINZIÈME.

CALCUL DES RACINES INCOMMENSURABLES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Séparation des racines incommensurables.

477. La recherche des racines incommensurables comprend deux parties : on détermine d'abord deux limites de chaque racine, l'une plus petite, l'autre plus grande, et qui soient assez rapprochées pour ne comprendre qu'une seule racine; c'est ce qu'on appelle *séparer* les racines. On calcule ensuite la valeur de chaque racine avec le degré d'approximation que la question exige.

478. Il a été prouvé que lorsque deux quantités substituées dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre ces quantités. Voici une autre proposition essentielle à connaître pour parvenir à la séparation des racines.

THÉORÈME. — *Si l'on substitue dans le premier membre d'une équation deux quantités qui comprennent une racine réelle, ou qui en comprennent un nombre impair, les deux résultats auront des signes contraires; et si les quantités substituées ne comprennent aucune racine, ou si elles en comprennent un nombre pair, les deux résultats auront le même signe.*

Représentons l'équation proposée par $f(x) = 0$; désignons par α et 6 deux quantités réelles quelconques, et supposons $\alpha < 6$. Si les quantités α et 6 ne comprennent aucune racine de l'équation, les résultats qu'on obtiendra en substituant successivement ces quantités à la place de x devront avoir le même signe; car s'ils avaient des signes contraires, il y aurait une racine comprise entre α et 6 (nº 419); ce qui est contre l'hypothèse.

Examinons le cas où α et β comprennent plusieurs racines, $a, b, c, \ldots, k$. Le polynôme $f(x)$ est divisible par le produit des facteurs $x-a, x-b, \ldots, x-k$, et en représentant le quotient par $\varphi(x)$, on a

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)\times\varphi(x).$$

Faisons successivement dans cette égalité $x=\alpha$ et $x=\beta$; il viendra

$$f(\alpha)=(\alpha-a)(\alpha-b)\ldots(\alpha-k)\times\varphi(\alpha),$$
$$f(\beta)=(\beta-a)(\beta-b)\ldots(\beta-k)\times\varphi(\beta).$$

Or, les racines $a, b, \ldots, k$ étant comprises entre α et β, les facteurs $\alpha-a, \alpha-b, \ldots, \alpha-k$ sont tous négatifs, et les facteurs $\beta-a$, $\beta-b, \ldots, \beta-k$ sont tous positifs. Il suit de là que le produit des facteurs $\alpha-a$, $\alpha-b$, etc., a le même signe que le produit des facteurs $\beta-a$, $\beta-b$, etc., ou le signe contraire, suivant que les racines $a, b, \ldots, k$ sont en nombre pair ou en nombre impair. D'ailleurs, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ ont le même signe; car, si ces quantités avaient des signes contraires, l'équation $\varphi(x)=0$ aurait une racine entre α et β; donc $a, b, \ldots, k$ ne seraient pas les seules racines de $f(x)=0$ comprises entre α et β, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, si le nombre des racines $a, b, \ldots, k$ est pair, les résultats $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont le même signe; et, si le nombre de ces racines est impair, les résultats $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont des signes contraires.

Cette proposition fait immédiatement conclure la réciproque:

Si deux quantités substituées dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, elles ne comprennent qu'une racine, ou elles en comprennent un nombre impair; et, si deux quantités donnent des résultats de même signe, elles ne comprennent pas de racines, ou elles en comprennent un nombre pair.

La démonstration précédente ne suppose pas que les racines $a, b, \ldots, k$ soient différentes; de sorte que, si α et β comprenaient une racine qui fût répétée un nombre pair de fois, sans en comprendre aucune autre, il faudrait considérer ces quantités comme comprenant un nombre pair de racines.

479. Lorsque le dernier terme d'une équation est positif, l'équation n'a pas de racines positives, ou elle en a un nombre pair; car, en substituant successivement, à la place de x, zéro et une limite supérieure des racines positives, on a des résultats de même signe. Quand le dernier terme est négatif, le nombre des racines positives est impair; car, en substituant zéro et une limite supérieure des racines positives, on a des résultats de signes contraires.

480. Avant de passer à la recherche des racines incommensurables d'une équation, on doit d'abord la simplifier par la suppression de tous les facteurs correspondants aux racines commensurables. Il faut ensuite appliquer la méthode des racines égales, afin de décomposer, s'il est possible, l'équation en d'autres de degrés moindres.

Le problème à résoudre étant ainsi réduit à trouver les racines réelles d'une équation quand elles sont toutes incommensurables et inégales, supposons que l'on substitue dans le premier membre les nombres entiers compris entre une limite numériquement supérieure des racines négatives et une limite supérieure des racines positives. Si la suite des résultats de ces substitutions présente autant de changements de signes qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation, il ne se trouvera qu'une seule racine entre deux nombres consécutifs qui auront donné des résultats de signes contraires, et il ne s'en trouvera aucune entre deux nombres consécutifs qui auront donné des résultats de même signe; autrement, il faudrait que le nombre des racines surpassât le degré de l'équation. La séparation sera donc effectuée.

Soit l'équation

$$x^4 - x^3 - 10x^2 + x + 15 = 0.$$

On trouve pour limites des racines, par la méthode du n° 449, $+4$ et -3; et en substituant dans le premier membre les nombres entiers depuis -3 jusqu'à $+4$, les signes des résultats sont tels qu'on les voit ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccccc} x=-3, & =-2, & =-1, & =0, & =+1, & =+2, & =+3, & =+4; \\ +, & -, & +, & +, & +, & -, & -, & +. \end{array}$$

On conclut de là que les quatre racines de l'équation sont réelles; qu'une d'elles est comprise entre 1 et 2; une entre 3 et 4; une entre -1 et -2; et la quatrième entre -2 et -3.

Quand on sait que l'équation n'a pas plus de μ racines réelles, μ étant un nombre inférieur au degré, il suffit, pour que la séparation s'effectue en substituant les nombres entiers compris entre les limites, que la suite des résultats de ces substitutions présente μ changements de signes.

481. Si l'on veut effectuer seulement la séparation des racines positives, il faudra qu'en substituant les nombres entiers depuis zéro jusqu'à une limite supérieure des racines positives, le nombre des changements de signes dans la suite des résultats soit égal au nombre des variations de l'équation.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 8x + 10 = 0.$$

Comme elle n'a que deux variations, elle n'a pas plus de deux racines positives. Le premier membre est positif pour $x = 0$; il est négatif pour $x = 1$ et $x = 2$, et positif pour $x = 3$. On conclut de-là que l'équation a deux racines positives; l'une comprise entre 0 et 1, et l'autre entre 2 et 3.

Si l'on veut trouver les racines négatives, on changera x en $-x$, ce qui donne

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$$

Cette équation a trois variations; ainsi elle peut avoir trois racines positives. On trouve, par la méthode du n° **449**, que le nombre 3 est une limite supérieure des racines; et en substituant 0, 1, 2, on obtient des résultats négatifs; d'ailleurs la limite 3 donne un résultat positif. Il suit de là que l'équation $x^5 - 3x^3 - x^2 - 8x + 10 = 0$ a au moins une racine comprise entre -2 et -3; mais ces substitutions ne décident pas si les deux autres racines sont réelles.

482. On abrége le travail des substitutions en calculant les résultats au moyen des différences. Mais l'avantage de cette méthode n'est pas seulement de simplifier les opérations.

Prenons pour exemple l'équation

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$$

On reconnaît par les résultats de la substitution des nombres entiers, qui ont été formés (n° 473), qu'il y a au moins une racine entre 2 et 3, une entre 0 et -1, et une entre -2 et -3. On voit, en outre, que le nombre 7 est une limite supérieure des racines (n° 475). On peut tirer de ces résultats la conclusion qu'il n'existe aucune racine en dehors des trois intervalles ci-dessus. Comme la règle des signes apprend que l'équation n'a pas plus de deux racines négatives, il suffit de considérer les résultats de la substitution des nombres positifs.

Pour l'intervalle des nombres 0 et 1, en donnant à u_0 dans la formule (4) [page 377] la valeur correspondante à $x = 0$, qui est -10, les seuls termes positifs sont ceux qui dépendent des différences troisième et cinquième. On peut écrire les trois derniers termes comme il suit :

$$\frac{z(1-z)(2-z)}{6}\left(\Delta^3 - \frac{3-z}{4}\Delta^4\right) + \frac{z(1-z)(2-z)(3-z)(4-z)}{120}\Delta^5.$$

z étant moindre que 1, d'après les valeurs $\Delta^3 = 132$, $\Delta^4 = 240$, la quantité $\Delta^3 - \frac{3-z}{4}\Delta^4$ est moindre que 12 : par conséquent, la première partie de la quantité ci-dessus est moindre que $\frac{12}{15}$ (n° 476). La seconde partie est plus petite que $\frac{120}{25}$. La fonction u_x ne pourra donc pas devenir positive.

Par rapport à l'intervalle des nombres 1 et 2, on reconnaît d'une manière semblable que les trois derniers termes de la formule (4) ne peuvent donner qu'une quantité positive inférieure à la valeur numérique de u_0, qui est -19. A la vérité, la différence première donne un terme positif; mais, pour que ce terme positif puisse l'emporter sur celui qui dépend de la différence deuxième, et qui est négatif, il faut que la valeur de z diffère très-peu de l'unité; et cette condition rend très-petits les coefficients des autres termes positifs.

Pour l'intervalle des nombres 3 et 4, la formule (4) donne

$$u_x = 137 + z[669 - (1-z)625] + z(1-z)(2-z)[202 - (3-z)25] \\ + z(1-z)(2-z)(3-z)(4-z);$$

z étant moindre que 1, tous les termes de cette expression de u_x sont positifs.

On reconnaît de la même manière qu'il n'y a pas de racine comprise entre 4 et 5.

Au delà de 5, en prenant pour la valeur u_0 celle qui répond à $x=1$, on a $z=4$ ou $z>4$; tous les coefficients des différences sont positifs; et, d'après les valeurs de ces différences qui correspondent à $x=1$, on voit que la somme des termes positifs l'emportera constamment sur le premier terme, qui sera seul négatif.

483. Après la substitution des nombres entiers, si la séparation des racines n'est pas entièrement effectuée, ou pour approcher davantage de celles qui ont été reconnues, il faut substituer des nombres plus rapprochés.

Ces substitutions se font par de nouvelles différences que l'on calcule au moyen des précédentes.

Supposons que l'on veuille attribuer à x dans la fonction u_x, exprimée par la formule (3) du n° 474, des valeurs comprises entre x_0 et x_0+h, dont les différences soient $\frac{h}{10}$. Les résultats de la substitution de ces valeurs seront ceux que l'on trouverait si l'on donnait à z, dans la formule (4), les valeurs 0,1, 0,2, 0,3,..., 0,9. Comme les coefficients de Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc., sont des fonctions entières, on peut calculer leurs valeurs au moyen des différences; on trouve celles qui sont contenues dans le tableau suivant :

Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
+	—	+	—	+
0,1	0,045	0,0285	0,020.662.5	0,016.116.75
0,2	0,080	0,0480	0,033.600.0	0,025.536.00
0,3	0,105	0,0595	0,040.162.5	0,029.720.25
0,4	0,120	0,0640	0,041.600.0	0,029.952.00
0,5	0,125	0,0625	0,039.062.5	0,027.343.75
0,6	0,120	0,0560	0,033.600.0	0,022.848.00
0,7	0,105	0,0455	0,026.162.5	0,017.267.25
0,8	0,080	0,0320	0,017.600.0	0,011.264.00
0,9	0,045	0,0165	0,008.662.5	0,005.370.75

Les différences qui font trouver ces valeurs donnent aussi les différences des valeurs de la fonction u_x pour des valeurs de z de dixième en dixième, qui correspondent à des valeurs de x croissantes de $\frac{h}{10}$. En désignant ces nouvelles différences par la lettre δ, on a

$$\begin{array}{ll}
\delta u_0 = 0{,}1\,\Delta - 0{,}045\,\Delta^2 + 0{,}0285\,\Delta^3 - 0{,}0206625\,\Delta^4 + 0{,}016116.75\,\Delta^5 + \ldots \\
\delta^2 u_0 = \quad 0{,}01\,\Delta^2 - 0{,}009\,\Delta^3 + 0{,}007725\,\Delta^4 - 0{,}006697.5\,\Delta^5 + \ldots \\
\delta^3 u_0 = \quad 0{,}001\,\Delta^3 - 0{,}00135\,\Delta^4 + 0{,}001462.5\,\Delta^5 + \ldots \\
\delta^4 u_0 = \quad 0{,}0001\,\Delta^4 - 0{,}00018\,\Delta^5 + \ldots \\
\delta^5 u_0 = \quad 0{,}00001\,\Delta^5 + \ldots
\end{array}$$

Ces formules et le tableau qui précède suffiront jusqu'au cinquième degré inclusivement.

484. En appliquant les dernières formules à l'exemple du n° **482**, pour substituer les différents nombres de dixièmes entre 2 et 3, on a $u_0 = -14$, $\Delta u_0 = 151$, $\Delta^2 u_0 = 518$, $\Delta^3 u_0 = 732$, $\Delta^4 u_0 = 480$, $\Delta^5 u_0 = 120$ (page 375). Il en résulte $\delta u_0 = +4{,}668.01$, $\delta^2 u_0 = +1{,}496.3$, $\delta^3 u_0 = +0{,}259.5$, $\delta^4 u_0 = +0{,}026.4$, $\delta^5 u_0 = +0{,}001.2$. On forme avec ces différences le tableau suivant :

$x = 2$	− 14,000.00	+ 4,668.01	+ 1,496.3	+ 0,259.5	+ 0,026.4	+ 0,001.2
2,1	− 9,331.99	+ 6,164.31	+ 1,755.8	+ 0,285.9	+ 0,027.6	
2,2	− 3,167.68	+ 7,920.11	+ 2,041.7	+ 0,313.5	+ 0,028.8	
2,3	+ 4,752.43	+ 9,961.81	+ 2,355.2	+ 0,342.3	+ 0,030.0	
2,4	+ 14,714.24	+ 12,317.01	+ 2,697.5	+ 0,372.3	+ 0,031.2	
2,5	+ 27,031.25	+ 15,014.51	+ 3,069.8	+ 0,403.5	+ 0,032.4	
2,6	+ 42,045.76	+ 18,084.31	+ 3,473.3	+ 0,435.9	+ 0,033.6	
2,7	+ 60,130.07	+ 21,557.61	+ 3,909.2	+ 0,469.5		
2,8	+ 81,687.68	+ 25,466.81	+ 4,378.7			
2,9	+ 107,154.49	+ 29,845.51				
$x = 3{,}0$	+ 137,000.00					

On conclut de ces résultats qu'il n'existe aucune racine en dehors de l'intervalle des nombres 2,2 et 2,3 ; car, dans chacun des autres intervalles, les termes de la formule (4) qui auront un signe contraire à celui du premier terme, ne pourront donner leur signe à la valeur de la fonction (*).

(*) On pourra toujours parvenir, par cette méthode, à connaître, avec une entière certitude, le nombre des racines réelles d'une équation. Car, s'il n'y a

485. Si l'on voulait substituer des nombres croissants de un centième entre deux nombres consécutifs de dixièmes, les différences qu'il faudrait employer seraient données par les mêmes expressions de δu_0, $\delta^2 u_0$, etc., dans lesquelles on prendrait pour Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc., celles qui auraient été trouvées par les dernières opérations.

Si l'on avait été assuré, avant d'effectuer les opérations dont nous venons de présenter le tableau, qu'il ne se trouvait pas plus d'une racine entre les nombres entiers 2 et 3, on aurait pu arrêter ces opérations après avoir obtenu le résultat de la substitution de 2,3, qui est positif. Mais alors il n'y aurait eu aucune garantie de l'exactitude des calculs; tandis qu'en les prolongeant jusqu'à la valeur correspondante à $x = 3$, on obtient une vérification, puisque cette valeur est déjà connue.

Calcul des valeurs approchées des racines.

486. En développant le second membre de la formule (4), et en faisant $u_x = 0$, on obtient une équation de cette forme :

$$0 = u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 \ldots, \tag{5}$$

On a d'ailleurs

$$\text{(6)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} A = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 \ldots \\ B = \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta^3 + \frac{11}{24}\Delta^4 - \frac{5}{12}\Delta^5 \ldots \\ C = \frac{1}{6}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{7}{24}\Delta^5 \ldots \\ D = \frac{1}{24}\Delta^4 - \frac{1}{12}\Delta^5 \ldots \\ E = \frac{1}{120}\Delta^5 \ldots \end{array} \right.$$

---

aucune racine entre deux nombres a et b, la valeur numérique de la fonction, dans l'intervalle de ces deux nombres, ne pourra pas descendre au-dessous d'un certain minimum, tandis qu'en subdivisant convenablement cet intervalle, les différences Δu, $\Delta^2 u$, etc., pour chacune des subdivisions, pourront devenir aussi petites qu'on le voudra; de sorte qu'en appliquant la formule (4) aux différentes subdivisions, il en résultera des expressions de la fonction u_x dans lesquelles les termes variables dont le signe sera contraire à celui du terme constant u_0, ne pourront donner qu'une somme inférieure à cette quantité.

On formera aisément tous les termes de ces dernières formules, suivant le nombre des différences qu'on aura à considérer, et qui dépendra du degré de l'équation proposée. Les expressions ci-dessus comprennent tous les termes qu'on aura à calculer, dans le cas d'une équation du cinquième degré.

En négligeant, dans l'équation (5), les puissances de z supérieures à la première, on aura

$$z = -\frac{u}{A}. \tag{7}$$

Si l'on néglige seulement les puissances de z supérieures à la seconde, on aura la valeur de z par une équation du second degré.

487. Dans l'exemple qui a servi plus haut, on a, pour la racine positive, qui est comprise entre 2,2 et 2,3 :

$$u = -3,167.68,\quad A = 6,996.8,\quad B = 0,876.8,$$
$$C = 0,045.4,\quad D = 0,001.1,\quad E = 0,000.01.$$

La valeur de z donnée par la formule (7) est trop grande, puisqu'on l'obtient en négligeant, dans l'équation (5), des termes qui sont tous positifs. Comme cette valeur trop grande est moindre que $\frac{1}{2}$, la somme des termes négligés est moindre que $\frac{1}{4}B + \frac{1}{8}C + \frac{1}{16}D + \frac{1}{32}E$, et l'on conclut de là qu'elle ne s'élève pas à 0,225. Il s'ensuit que l'erreur de la valeur de z est moindre que $\frac{0,225}{6,9968}$, qui est un nombre plus petit que 0,04; et comme $z = \frac{x - x_0}{h}$ et $h = \frac{1}{10}$, d'où $x = x_0 + \frac{1}{10}z$, l'erreur de la valeur de x, au moyen de la valeur approchée de z, sera au-dessous de 0,004.

488. Calculons la valeur de z d'après les trois premiers termes de l'équation (5), qui donnent une équation du second degré. On ne doit prendre que la racine positive; et, en changeant u en $-u$, attendu que la valeur de u est négative, on a

$$z = \frac{-\frac{1}{2}A + \sqrt{(\frac{1}{2}A)^2 + Bu}}{B}. \tag{8}$$

En effectuant le calcul au moyen des logarithmes, on trouve

$$z = 0{,}429604.$$

Voici le tableau des opérations :

$\log u$......	$0{,}500.7413$	
$\log B$....	$\bar{1}{,}942.9005$	
Bu.......	$0{,}443.6418$	$2{,}777.42$
$\log \frac{1}{2}A$....	$0{,}543.8695$	
$\left(\frac{1}{2}A\right)^2$....	$1{,}087.7390$	$12{,}238.80$
$\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + Bu$	$1{,}176.5607$	$15{,}016.22$
$\sqrt{}$	$0{,}588.2803$	$3{,}875\ 077$
$\frac{1}{2}A$.......		$3{,}498.4$
	$\bar{1}{,}575.9691$	$0{,}376.677$
	$\bar{1}{,}942.9005$	
$\log z =$....	$\bar{1}{,}633\ 0686$	

489. Si l'on veut pousser plus loin l'approximation, on fera dans l'équation (5) $z = \gamma + z'$, en désignant par γ la valeur de z déterminée par la formule (8). On obtiendra l'équation

$$(9) \qquad u' + A'z' + B'z'^2 + C'z'^3 + D'z'^4 + E'z'^5 = 0;$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
u' &= C\gamma^3 + D\gamma^4 + E\gamma^5,\\
A' &= A + 2B\gamma + 3C\gamma^2 + 4D\gamma^3 + 5E\gamma^4,\\
B' &= B + 3C\gamma + 6D\gamma^2 + 10E\gamma^3,\\
C' &= C + 4D\gamma + 10E\gamma^2,\\
D' &= D + 5E\gamma,\\
E' &= E.
\end{aligned}$$

En négligeant les puissances de z' supérieures à la première, on obtient

$$(10) \qquad z' = -\frac{u'}{A'}$$

On reconnaît à l'inspection des expressions ci-dessus de u' et

de A', et des valeurs des nombres A, B, C, D, E, y, que la quantité z' déterminée par la formule (10) est moindre que 0,001; et comme on ne peut pas être assuré, en opérant par les logarithmes, d'avoir la valeur de y, qui est celle qui a été calculée dans le numéro précédent, avec plus de six chiffres exacts, il serait superflu de calculer la quantité z' avec plus de trois ou quatre chiffres; en conséquence, on pourra abréger le calcul de u' et de A', en ne prenant les logarithmes qu'avec cinq chiffres décimaux. On aura ainsi les opérations suivantes :

Calcul de u'.

log C...	$\bar{2},657.05$	
y^3...	$\bar{2},899.20$	
	$\bar{3},556.25$	0,003.599.6
log D..	$\bar{3},041.39$	
y^4...	$\bar{2},532.27$	
	$\bar{5},573.66$	0,000.037.5
log Ey^5.	$\bar{7},165.34$	0,000.000.1
u'.....	$\bar{3},560.77$	0,003.637.2
log A'..	0,890.74	
	$\bar{4},670.03$	$\frac{u'}{A'} = 0,000.467.8$

Calcul de A'.

A.....		6,996.8
2By....		0,753.35
log 3C..	$\bar{1},134.18$	
y^2...	$\bar{1},266.13$	
	$\bar{2},400.31$	0,025.14
log 4Dy^3.	$\bar{4},542.65$	0,000.35
		7,775.64

On a négligé, dans le calcul de A', le terme $5Ey^4$, attendu qu'il ne peut influer sur les chiffres dont on tient compte dans les autres termes.

On conclut du dernier résultat et de la valeur de y qui a été trouvée précédemment, $x = 2,242.913.62$.

490. On peut apprécier comme il suit le degré d'exactitude de ces approximations successives. Pour la première correction, que nous avons désignée par y, on obtient une quantité trop grande. Mais, les termes de l'équation (5) qu'on a négligés étant ceux qui donnent, dans le calcul de la correction suivante, la quantité u', qui est moindre que 0,0037, la valeur de z donnée par la formule (8) deviendrait trop petite, si l'on diminuait la valeur numérique de u de 0,0037. Or, en reprenant le calcul de z avec la valeur de u ainsi diminuée, on trouve

que celle de z surpasse $0,42912$. L'erreur de la valeur de z calculée en premier lieu, est donc moindre que $0,0005$.

Par rapport à la seconde correction, la valeur de z' étant négative, on peut changer z' en $-z'$ dans l'équation (9), qui devient alors

$$(11) \qquad u' - A'z' + z'^2(B' - C'z') + z'^4(D' - E'z') = 0.$$

Les quantités $B' - C'z'$ et $D' - E'z'$ sont positives; en outre, la quantité γ étant moindre que $\frac{1}{2}$, on a

$$B' < B + \frac{3}{2}C + \frac{3}{2}D + \frac{5}{4}E, \quad D' < D + \frac{5}{2}E;$$

donc

$$B' < 0,9466, \quad D' < 0,0014.$$

La correction $\frac{u'}{A'}$ est trop faible, puisque les termes de l'équation (11) que l'on néglige sont positifs; mais la valeur de z' devant être plus petite que $0,0005$, l'erreur est moindre que $\frac{B' \times (0,0005)^2 + D' \times (0,0005)^4}{A'}$, et cette quantité ne peut pas influer sur les six premiers chiffres décimaux de la valeur de z'. On est donc en droit de compter sur l'exactitude des sept premiers chiffres décimaux de la valeur de x conclue des deux corrections.

Si l'on prend pour z le nombre $0,429136$, en mettant en même temps dans l'équation (5) les valeurs de u, A, B, C, D, E (nº 487), et en calculant les termes qui dépendent de z avec le secours des logarithmes, et jusqu'au sixième chiffre décimal, on trouve que la somme de ces termes est $3,167673$; ainsi l'on a un résultat négatif: mais en prenant $z = 0,429137$, le logarithme de z augmente de 10 unités du dernier ordre, et la somme des deux termes en z et en z^2 est augmentée par là de $0,000.007.4$, de sorte que l'on a un résultat positif. On est assuré par cette vérification qu'il n'a pas été commis d'erreur dans les calculs, et que la valeur de z est exacte jusqu'au sixième chiffre.

491. Il faut remarquer qu'après le calcul de la première correction, tel qu'il a été exécuté (nº 488), il aurait été superflu

de calculer la valeur de z' au moyen des trois premiers termes de l'équation (9); car, à cause de la petitesse des nombres u' et B', la valeur de z', calculée de cette manière, différerait peu de $\frac{u'}{A'}$, et la différence serait inappréciable au degré d'approximation de la valeur de z précédemment calculée (*).

492. On ne s'est pas borné, dans le calcul de la première correction y, aux chiffres qui pouvaient donner des chiffres exacts de la valeur de la racine cherchée x; et l'on a calculé cette quantité y avec toute l'approximation que l'on voulait obtenir pour la racine, et qui est ici celle à laquelle on peut atteindre par l'emploi des logarithmes. Si l'on s'était arrêté à une valeur moins approchée de la racine de l'équation $u + Az + Bz^2 = 0$, il aurait fallu tenir compte dans le calcul de u' des termes $u + Ay + By^2$, dont la somme n'eût pas été zéro. Mais si l'on n'employait pas les logarithmes, ou si l'on voulait une approximation plus grande que celle qui aurait été d'abord obtenue par leur moyen, il conviendrait de s'arrêter pour chaque correction aux chiffres dont l'exactitude pourrait être regardée comme certaine, afin de ne pas augmenter sans utilité la longueur des calculs, qui deviendraient alors fort pénibles.

Méthode des approximations successives.

493. Lorsque la correction z qui doit être donnée par

(*) En changeant z' en $-z'$, et en remarquant que l'on ne devrait prendre que la plus petite racine de l'équation du second degré $u' - A'z' + B'z'^2 = 0$, puisque l'autre racine serait plus grande que 1, on aurait

$$z' = \frac{A' - \sqrt{A'^2 - 4B'u'}}{2B'} = \frac{2u'}{A' + \sqrt{A'^2 - 4B'u'}},$$

et, en retranchant de cette quantité $\frac{u'}{A'}$, la différence serait

$$\frac{u'\left(A' - \sqrt{A'^2 - 4B'u'}\right)}{A'\left(A' + \sqrt{A'^2 - 4B'u'}\right)} = \frac{4B'u'^2}{A'\left(A' + \sqrt{A'^2 - 4B'u'}\right)^2}.$$

Il est facile de reconnaître, d'après les valeurs de A', B', u', que la dernière quantité est moindre que 0,000 000 1.

l'équation (5), est une quantité très-petite, si la valeur $-\frac{u}{A}$, qu'on obtient en ne considérant que les deux premiers termes, n'est pas assez approchée, on peut en avoir une plus approchée sans calculer une nouvelle équation. On aura exactement, d'après l'équation (5),

$$(12) \qquad z = -\frac{u}{A} - \frac{B}{A}z^2 - \frac{C}{A}z^3 - \frac{D}{A}z^4 - \frac{E}{A}z^5 - \ldots$$

Soit a le quotient de la division de $-u$ par A, ou une valeur approchée de ce quotient; en remplaçant z par a dans tous les termes du second membre, on obtiendra une nouvelle valeur b de z. On pourra alors remplacer z par b dans tous les termes du second membre, ce qui donnera une troisième valeur c de z; ainsi de suite.

494. Supposons, pour fixer les idées, que la quantité u soit négative, et que tous les coefficients A, B, C, D, E, etc., soient positifs. Dans ce cas, la valeur de z est moindre que $-\frac{u}{A}$. Donc, en remplaçant z par $-\frac{u}{A}$ dans tous les termes du second membre, on aura une valeur trop petite de z. En remplaçant dans ces mêmes termes z par cette seconde valeur, on obtiendra une valeur trop grande; ainsi de suite.

Pour apprécier le degré d'approximation des valeurs qui résulteront de ces corrections successives, désignons par P, Q, R, etc., les coefficients $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, etc.; et soient α et $\alpha + \delta$ deux limites de la valeur de z. La valeur exacte sera moindre que celle qu'on obtiendra en remplaçant, dans le second membre de l'équation, z par α; et elle sera plus grande que celle qu'on obtiendra en remplaçant z par $\alpha + \delta$. Or, la différence des résultats de ces deux substitutions sera

$$(2P\alpha + 3Q\alpha^2 + 4R\alpha^3 + \ldots)\delta + (P + 3Q\alpha + 6R\alpha^2 + \ldots)\delta^2 + \ldots$$

La quantité δ devant être très-petite, et, en outre, d'un ordre de grandeur inférieur à celui de α, l'approximation de la valeur de z déduite de l'une ou de l'autre des deux limites α et $\alpha + \delta$ dépendra principalement du premier terme de la

différence des deux nouvelles limites ; et elle sera sensiblement proportionnelle au produit $\alpha\delta$.

495. Si les coefficients des puissances de z dans le second membre de l'équation (12) n'ont pas tous le même signe, on pourra obtenir deux limites de la valeur de z, au moyen des deux limites α et $\alpha+\delta$, en remplaçant z d'abord par α dans les termes positifs du second membre, et par $\alpha+\delta$ dans les termes négatifs ; et ensuite par $\alpha+\delta$ dans les termes positifs, et par α dans les termes négatifs. Soient $\varpi(z)$ la somme des termes positifs, et $-\pi(z)$ celle des termes négatifs ; la différence des résultats des deux substitutions, ou la limite de l'erreur des valeurs qu'on en conclura, sera

$$[\varpi'(\alpha)+\pi'(\alpha)]\delta+\frac{1}{2}[\varpi''(\alpha)+\pi''(\alpha)]\delta^2+\ldots.$$

496 Le mode d'approximation qui vient d'être indiqué peut aussi être employé dans des conditions différentes de celles que nous avons supposées, comme le montre l'exemple qui suit.

L'équation par laquelle on détermine le diamètre d'une conduite d'eau cylindrique, est la suivante :

$$D^5-0{,}000.095.94\frac{LQ}{H}D^2-0{,}082.6\frac{Q^2}{H}D-0{,}002.22\frac{LQ^2}{H}=0.$$

L est la longueur de la conduite supposée rectiligne et d'un diamètre uniforme ; Q est la dépense ou le volume d'eau qui doit s'écouler en une seconde ; H est la pression à l'orifice de sortie, cette pression étant représentée par la hauteur de la colonne d'eau propre à la produire ; D est le diamètre inconnu. Les coefficients numériques ont été obtenus en supposant les longueurs rapportées au mètre pour unité.

Cette équation a une seule racine positive qui est celle que l'on doit se proposer d'obtenir. Or, les coefficients du deuxième terme et du troisième étant très-petits, on peut négliger ces termes pour une première approximation. On a ainsi une valeur trop faible qui est

$$D=\sqrt[5]{0{,}002.22\frac{LQ^2}{H}}=0{,}295\sqrt[5]{\frac{LQ^2}{H}}.$$

Soient $L = 757^{m}$, $Q = 0^{m.cub},089$, $H = 1^{m}$. L'équation devient, par ces valeurs,

$$D^5 - 0,006.464\,D^2 - 0,000.654\,D - 0,013.31 = 0.$$

Comme la question n'exige pas une approximation de plus de quatre chiffres, on pourra prendre les logarithmes avec cinq chiffres décimaux seulement.

En mettant pour D, dans le deuxième terme et dans le troisième, la valeur $\sqrt[5]{0,013.31}$, on trouve :

$\log D =$	$\bar{1},624.84$	
$\log 0,000.654 =$	$\bar{4},815.58$	
	$\bar{4},440.42$	$0,000.276$
$\log D^2 =$	$\bar{1},249.68$	
$\log 0,006.464 =$	$\bar{3},810.50$	
	$\bar{3}.060.18$	$0,001.149$
		$0,013.31$
log de la somme	$\bar{2},168.35$	$0,014.735$
$\sqrt[5]{}$	$\bar{1},633.67$	

L'excès de la nouvelle valeur du logarithme de D sur la valeur précédente étant $0,008.83$, on ajoute cette quantité au logarithme précédent de $(0,000.654)\,D$, et le double de cette quantité au logarithme de $(0,006.464)\,D^2$. On a alors

$\log (0,000\ 654)\,D =$	$\bar{4},449.25$	$0,000.281$
$\log (0,006.464)\,D^2 =$	$\bar{3},077.84$	$0,001.196$
		$0,013.31$
log de la somme	$\bar{2},169.88$	$0,014.787$
$\sqrt[5]{}$	$\bar{1},633.98$	

L'excès de la nouvelle valeur de log D sur la valeur précédente est $0,000.31$, d'où l'on conclut les nombres ci-après :

$\bar{4},449\ 56$	$0,000.281$
$\bar{3},078.46$	$0,001.198$
	$0,013.31$
$\bar{2},169.94$	$0,014.789$
$\bar{1},633.99$	

Le nombre correspondant au dernier logarithme ne diffère pas, dans les quatre premiers chiffres, de celui qui était donné par le logarithme précédent; et il est 0,4305. Si l'on essaye, d'après cela, pour D, le nombre 0,4306, on trouvera que le logarithme de ce nombre surpasse $\bar{1},633.98$ de 0,000.09, et l'on aura pour cette valeur :

$$\begin{array}{rl} 5\log D = \bar{2},170.35 & 0,014.80 \\ \log(0,006\ldots)D = \bar{4},449.65 & \left.\begin{array}{l} 0,000.281.6 \\ 0,001.198.5 \\ 0,013.31 \end{array}\right\} \\ \log(0,00\ldots\ )D^2 = \bar{3},078.64 & \\ & \overline{0,014.790.1} \end{array}$$

On conclut de cette vérification que le nombre 0,4306 est un peu trop grand, et comme le nombre précédent 0,4305 est trop petit, la valeur de D est connue à moins de $0^m,0001$.

Méthode d'approximation de NEWTON.

497. Lorsque l'on a obtenu par des substitutions une valeur d'une racine à un certain degré d'approximation, on peut continuer le calcul de cette racine par la méthode suivante, qui a été indiquée par Newton.

En faisant $x = a + y$ dans l'équation $f(x) = 0$, l'équation résultante est

$$f(a) + f'(a)y + f''(a)\frac{y^2}{2} + f'''(a)\frac{y^3}{2.3} + \ldots = 0;$$

d'où

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{1}{f'(a)}\left[f''(a)\frac{y^2}{2} + f'''(a)\frac{y^3}{2.3} + \ \ldots\right].$$

Si a est une valeur approchée d'une racine de $f(x) = 0$, et $a + y$ la racine exacte, y sera une quantité très-petite. Les termes $f''(a)\frac{y^2}{2}$, $f'''(a)\frac{y^3}{2.3}$, etc., seront donc, en général, très-petits par rapport à y; de sorte qu'on obtiendra une valeur approchée de cette quantité en prenant simplement

$$(1) \qquad y = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Avec la valeur a' de la racine, qui résultera de cette correction, on en calculera une autre, de la même manière, c'est-à-dire qu'en nommant y' ce qu'il faudra ajouter à a', on prendra

$$y' = -\frac{f(a')}{f'(a')}.$$

Ainsi de suite.

L'approximation résultante de chaque correction dépend principalement de l'ordre du carré de la quantité que l'on calcule. C'est pourquoi, lorsque la première valeur a est approchée à moins de 0,1, on prend la valeur de y, par la formule (1), jusqu'aux centièmes; on calcule ensuite la valeur de y' jusqu'aux dix-millièmes, et ainsi de suite, en doublant, à chaque opération, le nombre des décimales. Mais l'exactitude des résultats de ces opérations n'est pas certaine; et elle est nécessairement subordonnée aux valeurs des coefficients des termes que l'on néglige.

498. On se rend compte de la méthode de Newton par les considérations géométriques; on reconnaît de cette manière les conditions de l'approximation qu'il faut avoir obtenue avant de recourir à cette méthode; et on voit, en outre, qu'elle est applicable aux équations transcendantes, aussi bien qu'aux équations algébriques. Mais, pour une explication plus complète et qui comprenne les règles relatives au degré d'approximation auquel on doit s'arrêter dans chacune des opérations successives, il faut s'appuyer sur quelques formules que je vais établir.

499. Supposons que la fonction $F(z)$ devienne nulle pour $z = 0$; et soient m et M la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la fonction dérivée $F'(z)$, quand z varie depuis zéro jusqu'à une limite déterminée; en sorte que l'on aura

$$F'(z) - m > 0, \quad F'(z) - M < 0.$$

D'après ces conditions, lorsque z croîtra, la fonction $F(z) - mz$ croîtra, et la fonction $F(z) - Mz$ décroîtra (n° 399). D'ailleurs ces fonctions seront toutes deux nulles pour $z = 0$; donc, pour $z > 0$, la première sera positive, et la seconde sera né-

gative; et, pour $z<0$, la première sera négative, et la seconde sera positive. On aura ainsi, si z est positif,

$$F(z)-mz>0,\quad F(z)-Mz<0;$$

et, si z est négatif,

$$F(z)-mz<0,\quad F(z)-Mz>0.$$

Ces inégalités établissent que la valeur de la fonction $F(z)$ est comprise entre les deux produits mz et Mz. Donc elle est égale au produit de z par une quantité K comprise entre m et M. En outre, si la fonction dérivée $F'(z)$ est continue, entre les valeurs de z auxquelles correspondent les limites m et M, elle ne peut passer d'une de ces limites à l'autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires. La quantité K est donc une valeur de cette fonction, qui correspond à une certaine valeur de z comprise entre zéro et la valeur qui est attribuée à cette variable dans la fonction $F(z)$. D'où il suit qu'il existe entre 0 et 1 un nombre θ par lequel on a l'égalité

$$F(z)=zF'(\theta z). \tag{2}$$

500. Supposons en second lieu que la fonction $F(z)$ et sa dérivée $F'(z)$ soient nulles pour $z=0$, et soient m et M la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la fonction dérivée du second ordre, $F''(z)$, quand z varie depuis zéro jusqu'à une limite déterminée.

Si z est positif, on aura, par ce qui vient d'être démontré,

$$F'(z)-mz>0,\quad F'(z)-Mz<0.$$

Il suit de là que la fonction $F(z)-\frac{mz^2}{2}$ sera croissante, et la fonction $F(z)-\frac{Mz^2}{2}$ sera décroissante; d'ailleurs ces deux fonctions sont nulles pour $z=0$. Donc, z croissant à partir de zéro, on aura

$$F(z)-\frac{mz^2}{2}>0,\quad F(z)-\frac{Mz^2}{2}<0. \tag{3}$$

Si z est négatif, on aura

$$F'(z)-mz<0,\quad F'(z)-Mz>0.$$

Il suit de là que la fonction $F(z) - \frac{mz^2}{2}$ décroîtra lorsque z croîtra, et la fonction $F(z) - \frac{Mz^2}{2}$ croîtra. Donc, z décroissant à partir de zéro, la première fonction croîtra et la seconde décroîtra ; ce qui laissera subsister les inégalités (3).

On conclura, d'ailleurs, de ces inégalités, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait ci-dessus, en supposant que la fonction $F''(z)$ soit continue pour les valeurs de z que l'on devra considérer, et en désignant toujours par θ un nombre compris entre o et 1,

$$F(z) = \frac{z^2}{2} F''(\theta z). \tag{4}$$

501. Considérons maintenant la différence

$$f(a+y) - f(a).$$

Cette différence est une fonction de y qui devient nulle pour $y = 0$, et sa dérivée est $f'(a+y)$; on conclut de là, d'après la formule (2),

$$f(a+y) = f(a) + yf'(a+\theta y). \tag{5}$$

Considérons aussi la fonction

$$f(a+y) - f(a) - yf'(a).$$

Cette fonction est nulle pour $y = 0$; la dérivée est $f'(a+y) - f'(a)$; elle est aussi nulle pour $y = 0$; et la dérivée du second ordre est $f''(a+y)$.

On conclut de là, d'après la formule (4),

$$f(a+y) = f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2} f''(a+\theta y). \tag{6}$$

Les formules (5) et (6) sont celles qui vont servir pour l'examen de la méthode de Newton.

502. Suivant la formule (6), si $a+y$ est une racine de l'équation $f(x) = 0$, on doit avoir

$$f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2} f''(a+\theta y) = 0 ;$$

donc

(7) $$y = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a+\theta y)}{f'(a)} \cdot \frac{y^2}{2}.$$

Quand on prend seulement $y = -\frac{f(a)}{f'(a)}$, l'erreur de la correction est le terme

(8) $$-\frac{f''(a+\theta y)}{f'(a)} \cdot \frac{y^2}{2}.$$

Donc, si la valeur de ce terme est d'un ordre de grandeur inférieur à celui de y, la quantité $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ approchera plus de la racine que a. En outre, on connaîtra par la grandeur de ce terme quelle sera la nouvelle approximation.

503. La valeur exacte de y doit aussi vérifier l'équation

$$f(a) + y f'(a + \theta y) = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a+\theta y)}.$$

La correction donnée par la formule (1) serait vicieuse si elle avait un signe contraire à celui de la véritable valeur de y. Il faut donc que $f'(a)$ ait le même signe que $f'(a+\theta y)$. On sera assuré que cette condition est remplie, si l'on connaît, outre le nombre a, un autre nombre b, de telle sorte que la racine soit comprise entre a et b; et si, de plus, la fonction dérivée $f'(x)$ ne change pas de signe entre a et b, ce qui exigera que ces nombres ne comprennent aucune racine de $f'(x) = 0$.

504. Admettons qu'on ait réalisé ce qui vient d'être dit. Si $a < b$, la valeur de y est positive; d'où il suit que $f(a)$ est de signe contraire à $f'(a+\theta y)$, par conséquent aussi à $f'(a)$. D'après la formule (7), si $f''(a+\theta y)$ a le même signe que $f(a)$, la valeur exacte de y est plus grande que $-\frac{f(a)}{f'(a)}$; donc $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ est une quantité comprise entre a et la racine; elle

approche donc plus de la racine que a, et dans le même sens.

Quand le signe de $f''(a+\theta y)$ est contraire à celui de $f(a)$, la valeur exacte de y est plus petite que $-\frac{f(a)}{f'(a)}$. Par suite, en prenant $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$, on peut avoir une valeur de la racine plus grande que b, et qui serait alors moins approchée que ce nombre. Mais, dans ce cas, si $f''(x)$ ne change pas de signe entre a et b, on peut se servir de la plus grande limite b. La correction que l'on a alors à calculer devant être négative, si on la représente par $-y_1$, il faudra remplacer dans la formule (7) y par $-y_1$ et a par b; ce qui donne

$$(9) \qquad y_1=\frac{f(b)}{f'(b)}+\frac{f''(b-\theta y_1)}{f'(b)}\cdot\frac{y_1^2}{2}.$$

$f(b)$ étant de signe contraire à $f(a)$, tandis que $f'(b)$ sera de même signe que $f'(a)$, $\frac{f(b)}{f'(b)}$ est une quantité positive. En outre, $f''(b-\theta y_1)$ étant de même signe que $f''(a)$ et $f''(b)$, et $f''(a)$ étant par hypothèse de signe contraire à $f(a)$, les quantités $f''(b-\theta y_1)$, $f(b)$ et $f'(b)$ auront le même signe. Donc, en prenant pour y_1 le terme $\frac{f(b)}{f'(b)}$, on aura une valeur trop petite; par suite la quantité $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$ sera comprise entre b et la racine; elle sera donc plus approchée de la racine que b, et dans le même sens.

Lorsqu'on aura ainsi déduit de l'une des deux limites a et b, au moyen de toutes les conditions qui ont été exprimées, une autre limite plus approchée dans le même sens, celle-ci en fera trouver de même une autre encore dans le même sens. L'opération se continuera ainsi avec les valeurs successives que l'on en conclura, aussi longtemps qu'il sera nécessaire.

505. Pour juger de l'approximation qui a été obtenue après chaque correction, il faut apprécier la valeur du terme $\frac{f''(a+\theta y)}{f'(a)}\cdot\frac{y^2}{2}$ ou $\frac{f''(b-\theta y_1)}{f'(b)}\cdot\frac{y_1^2}{2}$. On peut obtenir un nombre M plus grand que toutes les valeurs numériques de $f''(x)$,

lorsque x varie depuis a jusqu'à b. A cet effet, si les valeurs de $f''(x)$ sont positives, on remplacera x par b dans les termes positifs, et par a dans les termes négatifs. Si ces valeurs sont négatives, on remplacera, au contraire, x par b dans les termes négatifs, et par a dans les termes positifs. Le nombre M sera la valeur absolue de la différence des deux sommes qui résulteront de ces substitutions. On obtient plus simplement un nombre N plus petit que toutes les valeurs de $f'(x)$ pour les valeurs de x comprises entre a et b, que l'on a à considérer dans le cours des opérations. Quand les valeurs de $f''(x)$ sont positives, celles de $f'(x)$ sont croissantes; en outre, elles sont négatives lorsque l'on emploie la limite a, et positives lorsque l'on emploie la limite b. Donc, dans le premier cas, le nombre N est la valeur absolue de $f'(b)$; dans l'autre, il est $f'(a)$. Quand les valeurs de $f''(x)$ sont négatives, celles de $f'(x)$ sont décroissantes; en outre, elles sont positives lorsque l'on emploie la limite a, et négatives lorsque l'on emploie la limite b. Donc, dans le premier cas, le nombre N est $f'(b)$; dans l'autre, il est la valeur absolue de $f'(a)$.

En désignant par e l'erreur de l'une des corrections successives, par y la quantité que l'on devait calculer, on aura

$$e < \frac{M}{2N} y^2.$$

Soit $y < \frac{1}{10^n}$ et $\frac{M}{2N} < \frac{1}{10^p}$, les exposants n et p pouvant être négatifs, il en résultera $e < \frac{1}{10^{2n+p}}$, et pour que l'on soit assuré d'obtenir des chiffres exacts, au delà de ceux qui seront déjà connus, il faudra que l'on ait $2n+p > n$, ou $n > -p$.

506. Lorsqu'on réduira en décimales la quantité $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, ou $\frac{f(b)}{f'(b)}$, en prenant $2n+p$ chiffres, on commettra sur le quotient une erreur qui s'ajoutera à l'erreur e. La valeur exacte de la fraction sur laquelle on opérera étant trop faible, on devrait prendre le quotient par excès, pour être assuré que l'erreur totale ne sera pas d'une unité du dernier chiffre. Mais

le sens de l'approximation du résultat serait incertain, et il pourrait arriver que la valeur qu'on obtiendrait ainsi ne fût pas celle que l'on devrait employer dans l'opération suivante. On devra préférer, par cette raison, le quotient par défaut. Si l'erreur est réellement de plus d'une unité du dernier chiffre, on en sera averti par la correction suivante, qui changera ce chiffre; on en tiendra compte dans l'estimation de l'approximation qui devra résulter de cette nouvelle opération, et on ne conservera que les chiffres dont l'exactitude sera certaine, sauf l'erreur produite par la réduction en décimales.

507. 1[er] Exemple. $x^3 - 2x - 5 = 0.$

Cette équation a une racine comprise entre 2 et 2,1; et les deux fonctions dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ sont rendues positives par ces nombres, et par tous les nombres intermédiaires. On emploiera la limite 2,1 qui rend le premier membre de l'équation positif. On aura $M = 12{,}6$, $N = 10$, d'où $\frac{M}{2N} < 1$; ce qui fait voir qu'on pourra doubler à chaque opération le nombre des décimales.

On a

$$y = -\frac{f(x)}{f'(x)} = -\frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2},$$

et en faisant $x = 2{,}1$,

$$y = -\frac{0{,}061}{11{,}23}.$$

Le quotient de la division de 0,061 par 11,23 étant plus petit que 0,01, il s'ensuit que 2,1 est la valeur de la racine à moins de 0,01. On peut donc pousser la correction jusqu'aux dix-millièmes. On a $y = -0{,}0054$; d'où l'on conclut

$$x = 2{,}0946.$$

En substituant cette valeur de x dans les polynômes $f(x)$ et $f'(x)$, on trouve avec huit décimales $y = -0{,}00004851$; d'où

$$x = 2{,}09455149.$$

Suivant ce qui a été dit dans le n° 506, l'erreur de cette

valeur pourrait surpasser une unité du huitième chiffre décimal. Mais si l'on substitue dans l'équation le nombre 2,09455148, on trouve un résultat négatif, ce qui prouve que ce nombre est plus petit que la racine.

2e Exemple. $6x^3 - 141x + 263 = 0.$

En effectuant la séparation des racines, on reconnaît qu'elles sont toutes réelles; qu'il y en a une entre 2,7 et 2,8, une entre 2,8 et 2,9, et la troisième entre — 5,6 et — 5,7. Les nombres 2,7 et 2,8 donnent pour $f'(x)$ des valeurs de signes contraires. En conséquence, il faut chercher des limites plus rapprochées. La substitution de 2,75 dans l'équation donne un résultat de même signe que celui de la substitution de 2,7, et la substitution de 2,76 en donne un de signe contraire; la racine est donc comprise entre 2,75 et 2,76. La dérivée du second ordre est positive pour toutes les valeurs de x, et comme le résultat de la substitution de 2,75 dans l'équation est positif, il faut employer cette limite. On a $M = 36 \times 2{,}76$ et $N = 141 - 18 \times (2{,}76)^2$; d'où $\frac{M}{2N} < 13$. Il suit de cette valeur de $\frac{M}{2N}$ que la première correction pourra ne pas donner exactement le chiffre des millièmes. Mais lorsque ce chiffre aura été obtenu, chacune des corrections subséquentes fera trouver de nouveaux chiffres exacts, dont le nombre ne sera pas inférieur de plus de deux unités à celui des chiffres décimaux de la valeur qui aura été employée.

Les limites de la plus grande racine positive, 2,8 et 2,9, ne comprennent aucune racine de la dérivée, et on doit employer la plus grande de ces limites. Mais, en calculant avec ces nombres la quantité $\frac{M}{2N}$, on trouve qu'elle surpasse 400, ce qui ne permet pas d'apprécier le degré d'approximation de la première correction. Cette correction, calculée jusqu'aux centièmes, est — 0,04. On est assuré par là que la racine est plus petite que 2,86. La substitution de 2,85 donne un résultat positif, et celle de 2,84 donne un résultat négatif. La racine est donc comprise entre 2,84 et 2,85. Ces limites font trouver

$M = 36 \times 2,85$, $N = 18 \times (2,84)^2 - 141$, d'où $\frac{M}{2N} < 13$. Il suit de là qu'en continuant l'opération avec la valeur 2,85, on ne sera pas assuré d'obtenir exactement le chiffre des millièmes. Mais lorsque ce chiffre aura été obtenu, chacune des corrections subséquentes fera trouver de nouveaux chiffres décimaux, dont le nombre ne sera pas inférieur de plus de deux unités à celui des chiffres décimaux de la valeur qui aura été employée.

On peut se dispenser de calculer directement la racine négative; car sa valeur absolue est la somme des deux racines positives.

508. Lorsque les nombres a et b ne comprennent aucune racine de l'équation $f''(x) = 0$, la première dérivée $f'(x)$ est constamment croissante ou constamment décroissante, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Il s'ensuit qu'elle ne peut pas devenir nulle plus d'une fois entre ces deux valeurs, et que, si elle le devient, elle passe du négatif au positif, ou du positif au négatif, suivant que les valeurs de $f''(x)$ sont positives ou négatives; de sorte qu'on a

$$(10) \qquad f''(x) > 0, \quad f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0;$$

ou bien

$$(11) \qquad f''(x) < 0, \quad f'(a) > 0, \quad f'(b) < 0.$$

Dans le premier cas, en prenant $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ si $f(a) > 0$, et $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ si $f(b) > 0$, on aura encore une valeur de la racine de $f'(x) = 0$, plus approchée que celle qui aura été employée, et dans le même sens. La même chose aura lieu avec les conditions (11), en prenant la première valeur si $f(a) < 0$, et la seconde si $f(b) < 0$.

Ces dernières considérations peuvent être appliquées au calcul de la plus petite racine de l'équation $6x^3 - 141x + 263 = 0$ au moyen de la limite 2,7. On en conclut la valeur plus approchée 2,74, trop faible de plus de 0,01. On trouve ensuite avec celle-ci, par une seconde correction, le nombre 2,754, qui

diffère de la racine de moins de 0,003. Mais, lorsque la première dérivée s'annule entre a et b, on ne peut plus faire usage de ce qui a été dit dans le nº 505 pour apprécier le degré d'approximation de chacune des corrections successives; il faut alors prendre à chaque opération, pour le nombre N, la valeur même de $f'(x)$ qui a servi de diviseur.

509. Quand les deux dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ ne changent pas de signe depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, si, au lieu d'employer la limite pour laquelle $f(x)$ et $f''(x)$ ont le même signe, on se sert de l'autre limite, la correction change le sens de l'approximation. Mais lorsque la valeur qui en résulte est comprise entre les deux limites a et b, l'opération subséquente et toutes celles qui viennent après se trouvent faites conformément à la condition dont on s'était d'abord écarté. C'est ce qui se présenterait pour l'équation $x^3-2x-5=0$, si l'on employait d'abord la plus petite limite 2,0; la valeur qu'on en conclurait serait l'autre limite 2,10; l'opération se continuerait ensuite comme on l'a vu plus haut.

510. La correction qui a été indiquée dans le nº 486, et qui résulte de la valeur de z représentée par $-\frac{u}{A}$, n'est pas différente de celle que donne la méthode de Newton. Car, puisqu'on a fait $\frac{x-x_0}{h}=z$, d'où $x=x_0+hz$, l'équation (5) du nº 486 est

$$f(x_0)+f'(x_0)\,hz+f''(x_0)\frac{h^2z^2}{1.2}+\ldots=0.$$

On a donc $A=f'(x_0).h$, et $-\frac{u}{A}h=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Mais, quand la valeur x_0 a été obtenue au moyen des différences, au lieu de calculer directement la valeur de $f'(x_0)$, il est préférable de calculer la quantité A, en se servant des nombres que l'on a trouvés.

511. On obtient une autre correction par la formule (3) [page 377]. En supposant que x_0 soit une valeur approchée

d'une racine de l'équation $u_x = 0$, et que x désigne la racine exacte, on doit avoir, d'après cette formule,

$$u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 u_0}{1 . 2} + \text{etc.} = 0.$$

Si la différence $\Delta^2 u_0$ et toutes celles qui suivent sont très-petites, on a, en les négligeant,

$$u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 = 0,$$

d'où

$$x = x_0 - \frac{hu_0}{\Delta u_0}.$$

Suivant ces formules, la valeur x_0 est corrigée comme elle devrait l'être si les variations de la fonction u_x, entre x_0 et $x_0 + h$, étaient proportionnelles à celles de x. La signification géométrique de cette correction fait voir qu'elle est surtout avantageuse lorsque la racine que l'on calcule diffère très-peu d'une racine de $f''(x) = 0$.

CHAPITRE SEIZIÈME.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES. EXEMPLES DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES. RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES. INTERPOLATION. FORMATION DES TABLES NUMÉRIQUES PAR LES DIFFÉRENCES.

Décomposition des fractions rationnelles.

512. Soit une fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ dont les deux termes sont des fonctions entières de x. Supposons que ces deux termes n'aient pas de facteurs communs, parce que s'ils en ont, on pourra les supprimer; supposons aussi le degré du numérateur moindre que celui du dénominateur, parce que s'il est plus grand, on pourra effectuer la division, et on obtiendra une partie entière avec une fraction dont le numérateur sera d'un degré moins élevé que le dénominateur. Soit, en outre,

$$F(x) = (x-a)^n F_1(x),$$

a étant une des racines de l'équation $F(x) = 0$, et $F_1(x)$ un polynôme qui ne contient plus le facteur $x - a$. Nous allons prouver qu'on aura

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1} F_1(x)}, \tag{1}$$

A étant une constante, et $f_1(x)$ étant un polynôme entier.

En effet, on a identiquement

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{f(x) - AF_1(x)}{(x-a)^n F_1(x)}.$$

Pour que le facteur $x - a$ ne soit qu'à la puissance $n - 1$ dans le dénominateur de la dernière fraction, il suffit que $f(x) - AF_1(x)$ soit divisible par $x - a$; or cette condition

sera remplie si l'on a

$$f(a) - \mathrm{AF}_1(a) = 0, \quad \text{d'où (2)} \quad \mathrm{A} = \frac{f(a)}{\mathrm{F}_1(a)}.$$

On obtient ainsi pour A une valeur finie, déterminée et différente de zéro; car $f(x)$ et $\mathrm{F}_1(x)$ n'étant pas divisibles par $x - a$, les quantités $f(a)$ et $\mathrm{F}_1(a)$ sont différentes de zéro.

Si $\mathrm{F}(x)$ est du degré m, $f(x)$ est au plus du degré $m - 1$; la fonction $f_1(x)$ est au plus du degré $m - 2$, car elle est le quotient de $f(x) - \mathrm{AF}_1(x)$ par $x - a$, et $\mathrm{F}_1(x)$ est tout au plus du degré $m - 1$.

En outre, les fonctions $f_1(x)$ et $\mathrm{F}_1(x)$ n'ont aucun facteur commun; car, si elles en avaient un, le second membre de l'égalité (1) se réduirait à une fraction dont le dénominateur serait d'un degré moindre que celui de $\mathrm{F}(x)$.

On aura par une décomposition semblable,

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}\mathrm{F}_1(x)} = \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{n-2}\mathrm{F}_1(x)};$$

$f_2(x)$ sera au plus du degré $m - 3$, et n'aura aucun facteur commun avec $\mathrm{F}_1(x)$. Mais A_1 pourra être zéro, attendu que $f_1(x)$ peut être divisible par $x - a$.

En continuant ainsi, on obtiendra

$$(3) \qquad \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\mathrm{A}}{(x-a)^n} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^{n-1}} \cdots + \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{\mathrm{F}_1(x)}.$$

La fonction $\varphi(x)$ sera d'un degré inférieur à celui de $\mathrm{F}_1(x)$, et elle n'aura aucun facteur commun avec $\mathrm{F}_1(x)$.

Si $\mathrm{F}_1(x) = (x - b)^p \mathrm{F}_2(x)$, b étant une seconde racine de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$, il en résultera

$$\frac{\varphi(x)}{\mathrm{F}_1(x)} = \frac{\mathrm{B}}{(x-b)^p} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x-b)^{p-1}} \cdots + \frac{\mathrm{B}_{p-1}}{x-b} + \frac{\psi(x)}{\mathrm{F}_2(x)}.$$

En poursuivant ces opérations, on parviendra à un développement qui ne comprendra que des fractions dont les numérateurs seront constants, et dont les dénominateurs seront les diverses puissances des facteurs correspondants aux racines de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$.

513. On peut trouver les valeurs des constantes A, A_1, etc., autrement que par les calculs qui viennent d'être expliqués.

Soit la fraction

$$\frac{x^3-2}{(x-1)^2(x+1)(x+2)}.$$

On posera

$$\frac{x^3-2}{(x-1)^2(x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$

L'égalité devant subsister quelle que soit la valeur de x, il faudra qu'en chassant les dénominateurs, les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres soient égaux; ce qui donne les quatre équations

$$\begin{aligned} A_1+B+C&=1,\\ A+2A_1-C&=0,\\ 3A-A_1-3B-C&=0,\\ 2A-2A_1+2B+C&=-2. \end{aligned}$$

On en conclut les valeurs suivantes :

$$A=-\frac{1}{6},\quad A_1=\frac{23}{36},\quad B=-\frac{3}{4},\quad C=\frac{10}{9}.$$

514. Lorsque $x-a$ est un facteur simple de $F(x)$, la fraction $\frac{f(a)}{F_1(a)}$ qu'on a obtenue pour la valeur du coefficient A, est équivalente à $\frac{f(a)}{F'(a)}$. Car, puisque $F(x)=(x-a)F_1(x)$, on a, en prenant les dérivées des deux membres...... $F'(x)=F_1(x)+(x-a)F_1'(x)$; donc en faisant $x=a$, $F'(a)=F_1(a)$.

515. Dans le cas d'un facteur multiple, suivant la formule (3), en chassant les dénominateurs, et en remplaçant $F_1(x)$ par $\frac{F(x)}{(x-a)^n}$, on obtient

$$f(x)-A\frac{F(x)}{(x-a)^n}-A_1\frac{F(x)}{(x-a)^{n-1}}\ldots-A_{n-1}\frac{F(x)}{x-a}=(x-a)^n\varphi(x).$$

On a $f(x)=f(a+x-a)$; donc

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots;$$

et puisque $F(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées sont nulles pour $x=a$,

$$F(x)=\frac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n+\frac{F^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)}(x-a)^{n+1}+\ldots.$$

En mettant ces développements à la place de $f(x)$ et de $F(x)$, dans l'égalité précédente, il vient

$$\left.\begin{array}{l}
f(a)-A\dfrac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}\\
+\left\{f'(a)-A\dfrac{F^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)}-A_1\dfrac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}\right\}(x-a)\\
+\text{ etc.}\\
+\left\{\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)}-A\dfrac{F^{(2n-1)}(a)}{1.2\ldots(2n-1)}\ldots-A_{n-1}\dfrac{F^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}\right\}(x-a)^{n-1}\\
+\text{ etc.}
\end{array}\right\}=(x-a)^n\varphi(x).$$

Il suit de cette égalité que le premier membre doit être divisible par $(x-a)^n$; et comme tous les termes qui suivent le dernier de ceux qui sont écrits sont divisibles par $(x-a)^n$, il faut que les coefficients de toutes les puissances de $x-a$, jusqu'à celui de $(x-a)^{n-1}$ inclusivement, soient nuls. Cette condition fournit n équations, par lesquelles on déterminera les n coefficients $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

En appliquant cette méthode à la fraction $\dfrac{x^3-2x}{(x-1)^3(x+2)}$, on obtient

$$-\frac{1}{3(x-1)^3}+\frac{4}{9(x-1)^2}+\frac{23}{27(x-1)}+\frac{4}{27(x+2)}.$$

516. La décomposition relative aux facteurs multiples peut être effectuée au moyen d'une division.

En supposant, comme précédemment, $F(x)=(x-a)^nF_1(x)$, on fera $x=a+z$ dans la fraction $\dfrac{f(x)}{F(x)}$; elle deviendra $\dfrac{f(a+z)}{z^nF_1(a+z)}$. Or, si l'on effectue la division de $f(a+z)$ par $F_1(a+z)$, en ordonnant ces polynômes suivant les puissances croissantes de z, et en arrêtant le quotient au terme du degré $n-1$, le reste sera un polynôme dont tous les

termes seront divisibles par z^n. Soit $z^n R$ ce reste, R sera un polynôme entier, et l'on aura

$$\frac{f(a+z)}{F_1(a+z)} = A + A_1 z + A_2 z^2 \ldots + A_{n-1} z^{n-1} + \frac{z^n R}{F_1(a+z)}.$$

D'où l'on conclura, en divisant par z^n et remplaçant z par $x-a$,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n F_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

Pour trouver les fractions simples correspondantes à une autre racine multiple b, on appliquera la même méthode à la fraction $\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}$.

517. Tout ce qui vient d'être dit s'applique aux racines imaginaires aussi bien qu'aux racines réelles ; mais, pour les racines imaginaires, il est préférable de modifier la décomposition de manière à n'obtenir que des fractions qui ne contiennent pas de quantités imaginaires.

Considérons deux racines conjuguées, $\alpha + 6\sqrt{-1}$ et $\alpha - 6\sqrt{-1}$, et supposons d'abord que le facteur correspondant à ces racines n'entre qu'une fois dans le polynôme $F(x)$. Les numérateurs des fractions simples données par ces racines, seront

$$\frac{f(\alpha+6\sqrt{-1})}{F'(\alpha+6\sqrt{-1})}, \quad \frac{f(\alpha-6\sqrt{-1})}{F'(\alpha-6\sqrt{-1})}.$$

La première quantité étant $A + B\sqrt{-1}$, la seconde est $A - B\sqrt{-1}$, et la somme des deux fractions est

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-6\sqrt{-1}} + \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+6\sqrt{-1}}, \quad \text{ou} \quad \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+6^2},$$

en réduisant au même dénominateur et en faisant

$$2A = M \quad \text{et} \quad -2(A\alpha + B6) = N.$$

518. Supposons actuellement que le facteur du second degré correspondant aux deux racines $\alpha + 6\sqrt{-1}$ et $\alpha - 6\sqrt{-1}$,

entre plusieurs fois dans $F(x)$. Représentons ce facteur par x^2+px+q, et soit $F(x)=(x^2+px+q)^n F_1(x)$.

On posera

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots$$
$$+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q}+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)}.$$

On conclut de cette égalité

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l}Mx+N+(M_1x+N_1)(x^2+px+q)+\ldots\\+(M_{n-1}x+N_{n-1})(x^2+px+q)^{n-1}\end{array}\right\}F_1(x)$$
$$+(x^2+px+q)^n\varphi(x).$$

Celle-ci montre que $f(x)-(Mx+N)F_1(x)$ doit être divisible par x^2+px+q; par conséquent, il faut que, si l'on fait $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ dans $f(x)-(Mx+N)F_1(x)$, le résultat soit zéro. On obtiendra ainsi une équation qui se partagera en deux autres, au moyen desquelles on déterminera M et N.

Soit

$$\frac{f(x)-(Mx+N)F_1(x)}{x^2+px+q}=f_1(x);$$

la quantité $f_1(x)-(M_1x+N_1)F_1(x)$ devra aussi être divisible par x^2+px+q; et par conséquent, si l'on y remplace x par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, le résultat devra être zéro, ce qui déterminera M_1 et N_1.

De même, en posant

$$\frac{f_1(x)-(M_1x+N_1)F_1(x)}{x^2+px+q}=f_2(x),$$

il faudra que $f_2(x)-(M_2x+N_2)F_1(x)$ soit divisible par x^2+px+q, et devienne par conséquent zéro quand on fera $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ce qui déterminera M_2 et N_2. Ainsi de suite.

Comme $F_1(x)$ ne peut pas devenir zéro pour $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, on aura pour tous les coefficients M, N, M_1, N_1, etc., des valeurs finies; ce qui démontre la possibilité de la décomposition qu'on avait établie d'une manière hypothétique.

519. Soit la fraction

$$\frac{2x^4-5x^3+1}{(x^2+1)^3(x^2-3x+2)}.$$

On a

$$f(x)=2x^4-5x^3+1, \qquad F_1(x)=x^2-3x+2,$$
$$x^2+px+q=x^2+1, \qquad \alpha+6\sqrt{-1}=\sqrt{-1},$$

D'après ces valeurs, on trouve d'abord

$$M\sqrt{-1}+N=\frac{3+5\sqrt{-1}}{1-3\sqrt{-1}}; \quad \text{d'où} \quad M=\frac{7}{5}, \quad N=-\frac{6}{5}.$$

On a ensuite

$$f_1(x)=\frac{2x^4-5x^3+1-\frac{1}{5}(7x-6)(x^2-3x+2)}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{5}(10x^2-32x+17);$$

$$M_1\sqrt{-1}+N_1=\frac{7-32\sqrt{-1}}{5(1-3\sqrt{-1})}; \quad \text{d'où} \quad M_1=-\frac{11}{50}, \quad N_1=\frac{103}{50}.$$

$$f_2(x)=\frac{\frac{1}{5}(10x^2-32x+17)-\frac{1}{50}(-11x+103)(x^2-3x+2)}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{50}(11x-36);$$

$$M_2\sqrt{-1}+N_2=\frac{-36+11\sqrt{-1}}{50(1-3\sqrt{-1})};$$

d'où

$$M_2=-\frac{97}{500}, \quad N_2=-\frac{69}{500}.$$

On a ainsi, pour les trois fractions partielles correspondantes au facteur $(x^2+1)^3$,

$$\frac{7x-6}{5(x^2+1)^3}, \quad \frac{-11x+103}{50(x^2+1)^2}, \quad \frac{-97x-69}{500(x^2+1)}.$$

En joignant à ces fractions celles que donnent les facteurs simples du trinôme x^2-3x+2, et qu'on obtient comme nous l'avons expliqué dans le nº 514, on a le développement suivant :

$$\frac{1}{4(x-1)}-\frac{7}{125(x-2)}-\frac{97x+69}{500(x^2+1)}$$
$$+\frac{-11x+103}{50(x^2+1)^2}+\frac{7x-6}{5(x^2+1)^3}.$$

520. Une fraction donnée $\frac{f(x)}{F(x)}$ ne peut être décomposée que d'une seule manière en fractions partielles, telles que celles que nous venons de considérer.

En effet, 1° les dénominateurs des fractions partielles ne peuvent être que des facteurs de $F(x)$. Car, soit X un facteur de premier degré, ou un facteur du second degré de la forme $(x-\alpha)^2+6^2$, qui ne soit pas l'un de ceux de $F(x)$. Si l'on suppose que l'une des fractions partielles ait pour dénominateur X^n, après la réduction de toutes ces fractions au même dénominateur, X divisera tous les numérateurs, à l'exception d'un seul; donc il ne divisera pas leur somme; donc la somme de ces fractions ne pourra pas être égale à $\frac{f(x)}{F(x)}$.

2°. Si X est un des facteurs de $F(x)$, et s'il entre dans $F(x)$ à la puissance n, et n'y entre pas à une puissance plus élevée, on verra, par le même raisonnement, qu'on ne pourra obtenir aucune fraction ayant pour dénominateur X^{n+1}, ou une puissance plus élevée de X. On en aura nécessairement une dont le dénominateur sera X^n; autrement, en réduisant toutes les fractions au même dénominateur, et les ajoutant, on obtiendrait une fraction dont le dénominateur ne contiendrait le facteur X qu'à une puissance inférieure à la $n^{ième}$.

3°. Enfin, la fraction donnée ne pourra pas être égale en même temps à plusieurs sommes de fractions ayant les mêmes dénominateurs, et des numérateurs différents. Car, suivant ce qu'on a vu dans les nos 514, 515 et 518, en supposant la décomposition effectuée, on ne peut obtenir qu'une seule valeur pour le numérateur de chacune des fractions simples (*).

(*) Cette explication ne s'appliquerait pas si l'on n'employait que la méthode du no 516 pour établir la possibilité du développement et pour calculer les valeurs des constantes. Mais alors on ferait la démonstration comme il suit :

Supposons qu'il existe deux développements différents,

$$\frac{A}{(x-a)^n}\cdots+\frac{B}{(x-b)^p}+\cdots,\qquad \frac{A'}{(x-a)^{n'}}\cdots+\frac{B'}{(x-b)^{p'}}+\cdots,$$

n et n' étant les plus forts exposants de $x-a$ dans les deux développements. Si l'on n'a pas $n=n'$, soit $n>n'$; on conclura de l'égalité des deux développements, en mettant la fraction $\frac{A}{(x-a)^n}$ seule dans un membre, et en multi-

Exemples de la résolution des équations transcendantes.

521. Le problème connu en astronomie sous le nom de problème de Kepler consiste dans la résolution de l'équation suivante :

$$u - e\sin u = \zeta.$$

Les quantités u, e et ζ sont des angles, le nombre e est aussi la valeur de l'excentricité de l'orbite. L'angle ζ est donné en parties de la circonférence, et le nombre e est donné en parties du rayon ; pour le convertir en parties de la circonférence, il faut le diviser par $\sin 1''$.

La considération de la dérivée fait reconnaître que la quantité $u - e\sin u$ est toujours croissante avec u. Pour les valeurs 0 et 180° de ζ, on a $u = \zeta$. Quand ζ est plus petit que 180°, u est aussi plus petit que 180°, et l'on a $u > \zeta$. Quand ζ est plus grand que 180°, u est aussi plus grand que 180°, et on a $u < \zeta$.

522. Soient $\zeta = 38^\circ\,27'\,18'',7$ et $e = 0,5$ (ce qui suppose que l'astre soit une comète, l'équation sera

$$u - \frac{0,5}{\sin 1''}\sin u = 38^\circ\,27'\,18'',7.$$

---

pliant par $(x-a)^n$, que la constante A serait égale à une quantité qui deviendrait nulle pour $x = a$; il faudrait donc que l'on eût $A = 0$. Il suit de là que les plus forts exposants de $x - a$, de part et d'autre, sont égaux. Cela posé, si l'on n'a pas $A = A'$, en retranchant de chacun des deux développements la quantité $\dfrac{A'}{(x-a)^n}$, les restes devront être égaux ; ce qui sera contraire à la conclusion ci-dessus ; puisque l'un d'eux contiendra encore en dénominateur $(x-a)^n$, et dans l'autre il n'y aura pour dénominateur que des puissances moindres de $x - a$.

Les deux fractions correspondantes aux plus hautes puissances de $x - a$ devant être les mêmes de part et d'autre, on pourra les supprimer ; et en raisonnant de la même manière, on prouvera que les fractions qui auront pour dénominateurs les plus hautes puissances du même binôme $x - a$, ou d'un autre binôme, dans l'un et l'autre reste, devront être identiques. En continuant ainsi, on démontrera que les fractions simples des deux développements sont égales chacune à chacune.

On fera une démonstration semblable pour les fractions correspondantes aux facteurs du second degré de la forme $(x-\alpha)^2 + 6^2$.

Le log de $\frac{0,5}{\sin 1''}$ est $5,013.3951$; l'angle dont il fait trouver le nombre de secondes est compris entre 28° et 29° ; et comme on doit avoir $\sin u > \frac{1}{2}$, puisque $u > \zeta$, l'angle u doit surpasser ζ de plus de 14° ; en conséquence, je prends pour un premier essai $u = 54^\circ$. La différence $u - (38^\circ 27' 18'',7)$ est alors $15^\circ 32' 41'',3$ ou $55961'',3$; et le terme $e \sin u$ est $83435'',8$. Le nombre 54° est donc trop petit. Si l'on prend $u = 38^\circ 27' 18'',7 + 83435'',8$ ou $u = 61^\circ 37' 54'',5$, le terme $e \sin u$ est $90747'',4$; cette seconde valeur de u est donc encore trop petite. On pourrait l'augmenter de l'excès de $90747'',4$ sur $83435'',8$; on calculerait alors la valeur du terme $e \sin u$; il en résulterait une nouvelle augmentation de la valeur de u ; et ainsi de suite. Mais, pour un moyen plus rapide, on calculera la valeur de la différence $u - \zeta$ par une proportion. En prenant successivement pour cette différence les deux nombres $55961'',3$ et $83435'',8$, qui diffèrent de $27474'',5$, on trouve qu'ils sont moindres que les valeurs correspondantes de $e \sin u$ des nombres $27474'',5$ et $7311'',6$, dont la différence est $20162'',9$. D'après cela, on supposera que la valeur de u qui annule $e \sin u - (u - \zeta)$, peut être obtenue en augmentant celle que l'on a choisie en premier lieu, du quatrième terme de la proportion

$$\frac{20162,9}{27474,5} = \frac{27474,5}{x};$$

d'où l'on conclut

$$x = 37437'',5 = 10^\circ 23' 57'',5 \quad \text{et} \quad u = 64^\circ 23' 57'',5.$$

Parvenu à ce point, on se servira de la méthode de Newton. En désignant par u' ce qu'il faudra ajouter à la dernière valeur de u, on aura

$$u' = \frac{e \sin u - (u - \zeta)}{1 - e \cos u} = \frac{e \sin u - 93398'',8}{1 - e \cos u}.$$

Le nombre 1, dans cette formule, doit être divisé par $\sin 1''$; il représente un angle de $206265''$; et, d'après la valeur précédente de u, on trouve $u' = -499''$. Cette correction réduit la valeur de $u - \zeta$ à $92899'',8$, dont le logarithme est $4,968.0148$.

La valeur correspondante de u est $64^\circ\,15'38'',5$, et le logarithme de $e \sin u$ est $4{,}968.0135$. L'équation n'est pas encore vérifiée avec une exactitude suffisante ; mais si l'on diminuait l'angle u de $1''$, le logarithme de $u - \zeta$ diminuerait de 47, et celui de $e \sin u$ diminuerait seulement de 10 ; donc la différence de ces logarithmes diminuerait de 37 ; et, comme cette différence est 13, il faudra diminuer l'angle u de $\frac{13}{37}$, ou $0'',35$. On aura ainsi, finalement, $u = 64^\circ\,15'38'',15$.

Voici le tableau des opérations :

$$\text{pour } e = 0{,}5, \qquad \log \frac{e}{\sin 1''} = 5{,}013.3951.$$

$$u = 54^\circ$$
$$u - \zeta = 15^\circ 32' 41'',3 = 55961'',3 \qquad e \sin u = 83435'',8 = 23^\circ 10' 35'',8$$
$$u = 61^\circ 37' 54'',5 \qquad e \sin u = 90747'',4$$
$$\text{différ.} \quad 7311'',6$$

$$\begin{array}{rr}
 & 83435'',8 \\
 & 55961'',3 \\ \hline
\text{diff.} & 27474\ ,5 \\
 & 7311\ ,6 \\ \hline
\text{diff.} & 20162\ ,9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
2 \log 27474{,}5 = & 8{,}877.8596 \\
\text{compl.} \ \log 20162{,}9 = & 5{,}695.4470 \\ \hline
\text{somme} & 4{,}573.3066
\end{array}
\left\} \begin{array}{r} 37437'',5 \\ \text{ou } 10^\circ 23' 57'',5 \end{array}\right.$$

$$u = 64^\circ 23' 57'',5$$
$$u - \zeta = \quad 93398'',8 \qquad e \sin u = 93007'',6 \qquad 391'',2$$
$$\left.\begin{array}{r} e \cos u = 44563 \\ \dfrac{1}{\sin 1''} = 206265 \end{array}\right\} \ 161702''$$

$$\begin{array}{rr}
\log 391{,}2 = & 2{,}592.3988 \\
\text{compl.} \ \log 161702 = & 4{,}791.2846 \\
\text{compl.} \ \log \sin 1'' = & 5{,}314.4251 \\ \hline
\text{somme} & 2{,}698.1085
\end{array} \qquad 499'' = 8' 19''$$

$$u = 64^\circ 15' 38'',5$$
$$u - \zeta = \quad 92899'',8$$
$$\log(u - \zeta) = 4{,}968.0148 \qquad \log e \sin u = 4{,}968.0135, \ \frac{13}{37} = 0{,}35$$
$$u = 64^\circ 15' 38'',15$$

523. Soit l'équation.

$$e^x - e^{-x} = ax \ (\text{dans laquelle } a = 7{,}384).$$

Cette équation est vérifiée par $x = 0$; mais elle admet une autre solution positive, qui est celle qu'il s'agira de trouver.

Le nombre e étant moindre que 3, la valeur de x devra être

plus grande que 2. Pour $x=3$, on trouve

$$e^x = 20,08553, \qquad e^{-x} = 0,04978;$$

d'où

$$e^x - e^{-x} - ax = -2,11625.$$

Si l'on faisait $x=4$, le terme e^x surpasserait 54, et, comme le terme ax augmenterait seulement de 7,384, la différence $e^x - e^{-x} - ax$ serait positive. La valeur de x est donc comprise entre 3 et 4. On voit, de plus, que cette valeur doit être beaucoup plus près de 3 que de 4. En prenant $x = 3,1$, on a

$$e^x = 22,19795, \quad e^{-x} = 0,04505.$$

La valeur de $e^x - e^{-x}$ surpasse alors la précédente de 2,11715, et comme la quantité ax augmente en même temps de 0,7384, la différence $e^x - e^{-x} - ax$ est encore négative, et elle est $-0,7375$. Mais, d'après ces nombres, si les accroissements de $e^x - e^{-x} - ax$ étaient proportionnels à ceux de x, la valeur qu'on veut obtenir serait $3 + 0,1 \times \dfrac{2,11625}{2,11625 - 0,7375}$, nombre peu différent de 3,15.

Désignons $e^x - e^{-x} - ax$ par $f(x)$, d'où $f'(x) = e^x + e^{-x} - a$ et $f''(x) = e^x - e^{-x}$. Pour les valeurs de x comprises entre 3,1 et 3,2, on a $f'(x) > 22,19\ldots - 7,384$ ou $f'(x) > 14,8$. On a en même temps $e^x < 24,54$, donc, *à fortiori*, $f''(x) < 24,54$.

Il suit de là qu'en employant la méthode de Newton avec l'une ou l'autre des deux limites 3,1 et 3,2, et en représentant par h la quantité cherchée, l'erreur sera plus petite que h^2 (nº 505); de sorte qu'on pourra doubler à chaque correction le nombre des décimales.

Avec la limite 3,1 on obtient $h = 0,05$, donc $x = 3,15$. En formant la valeur correspondante de $f(x)$, pour le calcul d'une seconde correction, on reconnaît que le nombre 3,15 est trop grand, et on en conclut la valeur plus approchée 3,1479; celle-ci est exacte à moins de 0,0001, par excès. En continuant les opérations, les valeurs successives que l'on obtiendra seront toutes approchées dans le même sens.

Calcul des solutions réelles de deux équations simultanées.

524. Lorsqu'on doit calculer les solutions réelles de deux équations simultanées à deux inconnues, on peut construire les courbes qui résultent de ces équations considérées séparément; les couples de coordonnées des points d'intersection des deux courbes seront les solutions demandées. Mais, si l'on veut une approximation plus grande que celle qui sera fournie par les opérations graphiques, on fera usage de la méthode suivante, analogue à celle de Newton pour les équations à une seule inconnue.

Soient $f(x,y)=0$ et $F(x,y)=0$ les deux équations proposées, et soient a et b des nombres peu différents de ceux qui forment une des solutions réelles. On posera $x=a+u$, $y=b+v$; les deux équations deviendront

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(a,b)+f'_x(a,b).u+f'_y(a,b).v+U=0, \\ F(a,b)+F'_x(a,b).u+F'_y(a,b).v+V=0. \end{array}\right.$$

$f'_x(a,b)$ désigne la dérivée du polynôme $f(x,y)$, prise par rapport à x, en considérant y comme une constante, et dans laquelle on a remplacé x par a et y par b; de même $f'_y(a,b)$ est la dérivée prise par rapport à y, en regardant x comme une constante, et dans laquelle on a remplacé x par a et y par b. U et V sont des polynômes dont tous les termes contiennent des puissances ou des produits des inconnues u et v, d'un degré supérieur au premier par rapport à ces inconnues.

Les valeurs qu'il s'agira d'obtenir pour u et v devant être très-petites, on négligera les quantités U et V; on aura alors à résoudre deux équations du premier degré. Soient h et k les valeurs qu'on déduira pour u et v de ces deux équations du premier degré, les valeurs correspondantes de x et de y seront $a+h$ et $b+k$. Nommons a_1 et b_1 ces valeurs; si l'on a lieu de craindre qu'elles ne soient pas suffisamment approchées, on calculera par leur moyen une nouvelle correction, de la même manière que la précédente. On continuera ainsi autant qu'il sera nécessaire.

Les premiers membres des équations (1) étant les résultats de la substitution de $a+u$ et de $b+v$, pour x et y, dans les premiers membres des équations proposées, les valeurs que prendront U et V, lorsqu'on y remplacera u et v par les valeurs approchées h et k, seront celles que prendront les polynômes $f(x,y)$ et $F(x,y)$ quand on fera $x=a_1$ et $y=b_1$. Donc, si, en prenant successivement, dans les équations (1), à la place de a et de b, d'abord a_1 et b_1, puis les valeurs qu'on aura déduites de celles-ci, et ainsi de suite, les valeurs des inconnues u et v déduites des deux équations du premier degré deviennent de plus en plus petites, ce qui fera converger les quantités U et V vers zéro; les nombres a et b, a_1 et b_1, etc., convergeront vers un des couples de valeurs réelles de x et y qui vérifieront les deux équations proposées.

525. Soient les deux équations

$$y^2-4x^2+1=0,$$
$$y^2+xy-2x^2-6y+51x-313=0.$$

Sans construire exactement les hyperboles déterminées par ces deux équations, on voit qu'elles se coupent en trois points très-voisins de ceux qui résultent des intersections des asymptotes. On peut obtenir exactement les coordonnées des points d'intersection des asymptotes; on a pour un de ces points $x=5{,}25$, $y=10{,}5$; pour un autre, $x=-15$, $y=-30$, et pour le troisième, $x=+5$, $y=-10$. Chacun de ces trois couples est une solution approchée des deux équations proposées. Considérons le premier. En remplaçant x par $5{,}25+u$ et y par $10{,}5+v$, on obtient les deux équations

$$1+21v-42u+v^2-4u^2=0,$$
$$2+20{,}25v+40{,}5u+v^2+uv-2u^2=0;$$

et en négligeant les termes du second degré par rapport à u et v, on trouve

$$u=-\frac{21{,}75}{1701},\quad v=-\frac{124{,}5}{1701}.$$

Si l'on veut une approximation plus grande, on mettra d'abord les valeurs de u et de v en décimales, pour la commo-

dité du calcul; en s'arrêtant aux millièmes, on a

$$u = -0{,}013, \quad v = -0{,}073.$$

Il faut remplacer, dans les équations précédentes, u par $-0{,}013 + u_1$ et v par $-0{,}073 + v_1$, ce qui conduit à

$$0{,}017653 + 20{,}854\,v_1 - 41{,}896\,u_1 + v_1^2 - 4\,u_1^2 = 0,$$
$$0{,}00119 + 20{,}091\,v_1 + 40{,}479\,u_1 + v_1^2 + u_1 v_1 - 2\,u_1^2 = 0.$$

On conclut de celles-ci, en négligeant les termes du second degré, et en se servant des logarithmes,

$$u_1 = +0{,}000.195.62, \quad v_1 = -0{,}000.453.44.$$

En se bornant à six décimales, on a

$$x = 5{,}237.196, \quad y = 10{,}426.547.$$

Avec les valeurs approchées de u_1 et de v_1, les termes du second degré des deux dernières équations ne donneraient que des quantités moindres que 0,000.001. Or, si les inconnues x et y étaient remplacées par des nombres tels que les équations proposées fussent exactement vérifiées, et si l'on altérait l'un ou l'autre de ces nombres d'une unité du sixième ordre décimal, cette altération rendrait les premiers membres différents de zéro de plus de 0,000.001. On juge par là que les valeurs obtenues peuvent être admises comme exactes jusqu'au sixième chiffre décimal. La vérification de toutes les opérations se fait par la substitution de ces valeurs approchées dans les deux équations. En calculant les différents termes à l'aide des logarithmes, on trouve que la somme des termes positifs de chaque équation ne diffère pas de celle des termes négatifs d'une quantité appréciable.

526. Dans le cas de deux équations du second degré, on peut employer la méthode suivante :

En ajoutant l'une des équations à l'autre multipliée par un facteur indéterminé λ, on a l'équation générale des lignes du second degré qui passent par les points d'intersection des deux courbes correspondantes aux équations proposées. Or, parmi ces lignes, il y a toujours au moins un système de deux lignes droites, et il y en a trois quand les courbes se coupent en quatre points.

Soient les deux équations générales,

$$(2)\qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

$$(3)\qquad A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0.$$

On en conclut celle-ci,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}(\lambda A+A')y^2+(\lambda B+B')xy+(\lambda C+C')x^2\\ +(\lambda D+D')y+(\lambda E+E')x+\lambda F+F'=0.\end{array}\right.$$

La condition qui doit être remplie pour que l'équation (2) soit celle d'un système de deux lignes droites, est

$$AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF=0.$$

En l'appliquant à l'équation (4), on aura une équation du troisième degré de laquelle on déduira toujours une valeur réelle de λ. On obtiendra les solutions du système des équations (2) et (3), en résolvant les systèmes formés de l'une de ces équations avec chacune des équations du premier degré qui résulteront de la valeur de λ.

527. Pour l'exemple du n° 525, l'équation qui détermine λ est

$$8\lambda^3-2492\lambda^2-2523\lambda+9=0.$$

En posant pour l'évanouissement du second terme

$$\lambda=\lambda_1+\frac{2492}{24},$$

elle se change dans la suivante :

$$432\lambda_1^3-18\times 783\,827\lambda_1-981\,363\,443=0.$$

Les deux équations linéaires qui résultent de l'équation (4) sont

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+8(\lambda+1)(2\lambda+1)}}{2(1+\lambda)}x$$
$$+\frac{1}{2(1+\lambda)}\left[6\mp\frac{6+102(\lambda+1)}{\sqrt{1+8(\lambda+1)(2\lambda+1)}}\right].$$

En représentant, pour abréger, ces équations par

$$y=mx+n,\quad y=m'x+n',$$

on a par la première, en la combinant avec $y^2 - 4x^2 + 1 = 0$,

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{4n^2 - m^2 + 4}}{m^2 - 4}.$$

Je placerai ici le tableau complet des opérations.

I.

Résolution de l'équation

$$432\lambda_1^3 - 18 \times 783\,827\,\lambda_1 - 981\,363\,443 = 0\ (*).$$

log 4	0,602.0600
log 18	1,255.2725
log 783 827	5,894.2292
comp. log 3 × 432	6,887.3950
	4,638.9477
log r	2,319.4738
log 981 363...	8,991.8300
comp. log 3 × 432	6,887.3950
log 3	0,477 1212
log q	6,356.3462
log $\frac{p}{3}$	4,036.8877
log b	2,319.4585

(*) Pour la résolution de l'équation $x^3 - px + q = 0$, quand $4p^3 > 27q^2$, en faisant $r = \sqrt{\frac{4p}{3}}$, $b = \frac{3q}{p}$, $\sin\alpha = \frac{b}{r}$, les trois racines sont $r\sin\frac{\alpha}{3}$, $r\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{3}\right)$, $-r\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{3}\right)$. (*Voir* les Traités de Trigonométrie.)

Lorsque $4p^3 < 27q^2$, l'équation n'a qu'une seule racine réelle, qui est donnée par la formule

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

On peut calculer cette racine au moyen des logarithmes en se servant de deux angles auxiliaires, ou en n'employant que les logarithmes des nombres.

$\log \sin \alpha$	$\bar{1},999.9847$	$89^\circ 31' 10''$
$\frac{1}{3}\alpha$		$29^\circ 50' 23''$
$60^\circ + \frac{1}{3}\alpha$ (*)	$\bar{1},999.9983$	$89^\circ 50' 23''$
$\log \lambda_1$	$2,319.4721$	$208,6757$
	$\frac{2492}{24} = \frac{623}{6} =$	$103,8333$
	$\lambda =$	$312,509.$

Vérification de la valeur de λ.

$\log \lambda$	2,494.8625	
	3,401.9173	
	5,896.7798	7884..
$2 \log \lambda$	4,989.7250	
	3,396.5480	
	8,386.2730	243 373 3..
		244 161 7..
$3 \log \lambda$	7,484.5875	
	0,903.0900	
	8,387.6775	244 161 6.. (**).

(*) La valeur de q étant négative, et l'angle α ayant été pris positif, la racine positive de l'équation est

$$r \sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Si l'on calculait une des valeurs négatives de λ_1, on trouverait qu'elle diffère peu du nombre 103,8333..., qui lui doit être ajouté, et comme cette valeur de λ_1, obtenue par les logarithmes, peut n'être pas exacte au delà du sixième chiffre, la valeur de λ qu'on en conclurait n'aurait pas un nombre suffisant de chiffres exacts. Par cette raison, la racine positive est ici la seule que l'on puisse employer.

(**) Si l'on augmentait la valeur de λ de 0,001, ce qui ferait augmenter le logarithme de 14 unités du dernier ordre, le premier membre de l'équation serait positif. La valeur de λ est donc exacte à moins de 0,001.

II.

Calcul des deux équations linéaires.

	Nombres.	*Logarithmes.*
$1+\lambda$	313,509	2,496.2500
$1+2\lambda$	626,018	2,796.5869
log de 8		0,903.0900
		6,195.9269
	1 253,036	3,097.9636
	+ 1 252,036	3,097.6169
	— 1 254,036	3,098.3100
m		0,300.3369 (*)
$-m'$		0,301.0300
$102(1+\lambda)$	31 977,9	4,504.8502 (**)
	31 983,9	4,504.9314
		3,097.9636
	25,5251	1,406.9678
	— 19,5251	1,290.5932
	+ 31,5251	1,498.6565
$-n$		$\bar{2}$,493.3132 (***)
$+n'$		$\bar{2}$,701.3765

Equations linéaires.

$$y = +(0{,}300.3369)\,x - (\bar{2}{,}493.3132),$$

$$y = -(0{,}301.0300)\,x + (\bar{2}{,}701.3765)\ (****).$$

(*) Ce logarithme et le suivant sont les deux précédents dont on a soustrait le logarithme de $2(1+\lambda)$. Ces soustractions sont effectuées au moyen du logarithme de $1+\lambda$, écrit plus haut.

(**) On calcule d'abord le logarithme, on trouve ensuite le nombre.

(***) On obtient ce logarithme et le suivant en retranchant des deux précédents le logarithme de $2(1+\lambda)$.

(****) On n'a pas mis dans ces équations les valeurs des nombres m et n, m' et n', mais seulement leurs logarithmes.

III.

Calcul des valeurs de x *et de* y.

A cause de la petitesse de $m^2 - 4$, on emploie la formule

$$x = \frac{n^2 + 1}{-mn \mp \sqrt{4n^2 - m^2 + 4}} \quad (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{176}).$$

	Logarithmes.		*Nombres.*
$-mn$	$\bar{2},793.6501$		$+\ 0,0621799$
n^2	$\bar{4},986.6264$	n^2+1	$1,00096967$
		$4n^2+4$	$4,0038787$
m^2	$0,600.6738$		$3,987253$
n^2+1	$0,000.4209$		
$4n^2-m^2+4$	$\bar{2},220.7617$		$0,016625$
$\sqrt{}$	$\bar{1},110.3808$		$0,128938$
$-mn+\sqrt{}$	$\bar{1},281.3016$		$+\ 0,191118$
$-mn-\sqrt{}$	$\bar{2},824.5033$		$-\ 0,066758$
x'	$0,719.1193$		$+\ 5,23744$
x''	$1,175.9176$ (*)		$-\ 14,9940$
mx'	$1,019.4562$		$+\ 10,4582$
mx''	$1,476.2545$		$-\ 29,9401$
n			$-\ 0,0311$
y'			$+\ 10,4271$
y''			$-\ 29,9712$

Calcul de la troisième solution (**).

$\frac{n}{4}$	$\bar{2},099.3165$	$0,012569$
$\frac{1}{4n}$	$0,696.5635$	$4,97237$
x'''		$+\ 4,98494$
y'''		$-\ 9,91960$

(*) On obtient les logarithmes de x' et de x'', en retranchant les deux logarithmes précédents de celui de n^2+1 écrit plus haut.

(**) La valeur de m pour la seconde équation linéaire, ou m', étant -2, une des valeurs de x qui en résulte est infinie, l'autre est

$$\frac{n^2+1}{4n}, \quad \text{ou} \quad \frac{n}{4} + \frac{1}{4n}.$$

Les solutions calculées par ces opérations n'ont pas le même degré d'exactitude que celle qu'on a obtenue par des approximations successives. On ne retrouve celle-ci qu'avec quatre chiffres exacts seulement, pour la valeur de x et pour celle de y. On pouvait d'ailleurs reconnaître qu'il n'y avait pas lieu de compter sur une plus grande approximation. En effet, pour que l'on pût obtenir le cinquième chiffre de la valeur de x, il faudrait que le logarithme ne fût pas fautif de 83 unités du dernier ordre. Or, en supposant seulement 2 unités d'erreur sur le logarithme de m, l'erreur du logarithme de m^2 sera 4, et l'on ne pourra répondre du nombre qu'à $\frac{4}{109}$ de l'unité du cinquième chiffre, ou environ 4 unités dn septième chiffre (*voir* la *Table des logarithmes*). Il en résultera sur le nombre $4n^2 - m^2 + 4$ une erreur de 0,000004; le logarithme sera fautif de 4×261, et celui de la racine carrée sera fautif de 522. L'erreur du nombre $\sqrt{4n^2 - m^2 + 4}$ sera $\frac{522}{337}$, ou plus de 1,5 de l'unité du cinquième chiffre. L'erreur sera la même sur $-mn + \sqrt{4n^2 - m^2 + 4}$, et elle altérera le logarithme de ce nombre et celui de x d'environ 340.

De l'interpolation.

528. On nomme *interpolation* l'opération par laquelle, lorsque l'on connaît un certain nombre de valeurs d'une fonction, et les valeurs de la variable auxquelles elles correspondent, on calcule les valeurs de cette fonction pour d'autres valeurs intermédiaires et données de la variable.

Dans le cas d'une fonction entière dont le degré est n, il suffit que l'on connaisse $n + 1$ couples de valeurs de la variable et de la fonction pour que celle-ci soit entièrement déterminée (n° 474); et, lorsque ces valeurs de la variable sont en progression par différence, l'expression de la fonction est donnée par la formule (3) [page 377]. Mais il arrive souvent que l'on a recours à l'interpolation pour calculer les valeurs d'une quantité dont on n'a pas l'expression générale, et dont on connaît seulement un certain nombre de valeurs particulières. Le

problème est alors indéterminé. En le considérant au point de vue géométrique, il revient à tracer une courbe qui passe par des points désignés; or, quel que soit le nombre de ces points, il est toujours possible de les joindre par une infinité de lignes courbes qui diffèrent les unes des autres dans l'intervalle de chaque point au suivant.

Toutefois, dans les applications qui se présentent le plus habituellement, la fonction inconnue devant être considérée seulement pour un intervalle dans lequel la marche de ses valeurs ne doit pas être affectée d'irrégularités sensibles, on peut la représenter assez approximativement par une courbe du genre de celles que l'on nomme paraboliques, pour lesquelles l'ordonnée est une fonction entière de l'abscisse; ce qui permet de continuer à faire usage de la formule de la page 377.

Cette formule d'interpolation est, en outre, pleinement justifiée, pour les Tables numériques relatives à une fonction susceptible d'être développée en une série ordonnée suivant les puissances entières de la variable, et qui reste convergente dans un certain intervalle des valeurs de cette variable; car la fonction étant alors exprimée, au degré d'approximation nécessaire, par un nombre limité de termes de la série, on peut la considérer comme une fonction entière. Tel est, par exemple, le cas des Tables de logarithmes des nombres; puisque la différence $\log(n+z) - \log n$ peut être développée en une série ordonnée suivant les puissances entières de z, et qui reste convergente tant que le rapport $\frac{z}{n}$ est plus petit que 1.

529. En faisant dans la formule de la page 377, $x - x_0 = h'$, $u_x - u_0 = \Delta' u$, et en écrivant simplement u au lieu de u_0, il vient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u &+ \frac{h'(h'-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 u \\ &+ \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 u + \ldots \end{aligned}\right.$$

Cette formule fera connaître la différence $\Delta' u$, pour un intervalle h', au moyen des différences relatives à l'intervalle h.

Si la différence seconde et toutes les suivantes sont assez

petites pour qu'on puisse les négliger, la différence $\Delta' u$ sera proportionnelle à l'intervalle h'. C'est ce qui a lieu pour les usages ordinaires des Tables de logarithmes (*). Mais on rencontre aussi des cas dans l'emploi de ces Tables, qui exigent que l'on ne tienne pas seulement compte du premier terme de la valeur de $\Delta' u$.

530. Supposons, par exemple, qu'on veuille obtenir le logarithme de 3,141.592.653.6, par le moyen d'une Table contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1000, avec dix décimales. On regardera les logarithmes contenus dans cette Table, comme les valeurs données de la fonction u_x, les nombres comme celles de x, et l'on formera le tableau suivant :

NOMBRES.	LOGARITHMES.	DIFFÉRENCES 1res	DIFFÉR. 2es.	DIFF. 3es.	DIF. 4es.
3,14	0,496.929.648.1	+1.380.905.7	−4.376.9	+27.7	−3
3,15	0,498.310.553.8	+1.376.528.8	−4.349 2	+27.4	
3,16	0,499 687.082.6	+1.372.179.6	−4.321.8		
3,17	0,501.059.262.2	+1.367.857.8			
3,18	0,502.427.120.0				

Si l'on prenait quelques logarithmes consécutifs de plus, on trouverait encore — 3 pour la différence quatrième; de sorte que, lorsqu'on s'arrête à dix chiffres décimaux, les différences suivantes sont nulles; et comme le quatrième terme de l'expression de $\Delta' u$ est inférieur à $\frac{\Delta^4}{25}$, qui ne donne pas une unité du dixième chiffre décimal, on doit calculer seulement les trois premiers termes.

On a

$$u = 0,496.929.648.1, \quad \Delta u = +0,001.380.905.7,$$
$$\Delta^2 u = -0,000.004.376.9, \quad \Delta^3 u = +0,000.000.027\ 7;$$

(*) Le coefficient de $\Delta^2 u$ étant toujours au plus égal à $\frac{1}{8}$ (no 476), le terme dépendant de cette différence peut être négligé toutes les fois qu'elle est plus petite que 8 unités de l'ordre décimal auquel on doit s'arrêter.

en outre,

$$h = 0{,}01, \quad h' = 0{,}001.592.653.6,$$

d'où il résulte

$$\frac{h'}{h} = 0{,}159.265.36, \quad \frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \frac{1}{2} = -0{,}420.367.32,$$

$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \frac{2}{3} = -0{,}613.578.21,$$

On trouve avec ces valeurs $\Delta' u = 0{,}000.220.224.5$, et, par conséquent,

$$\log 3{,}141.592.653.6 = 0{,}497.149.872.6.$$

531. Pour les logarithmes trigonométriques, les différences des nombres auxquels les logarithmes se rapportent sont remplacées par celles des arcs. Mais les quantités h et h' n'entrent dans la formule (1) que par leur rapport; et, pour des différences très-petites, le rapport des différences des arcs ne diffère pas sensiblement de celui des différences des quantités trigonométriques. On a, en effet, en considérant par exemple les sinus,

$$\frac{\sin(a+z) - \sin a}{\sin(a+z') - \sin a} = \frac{\sin\frac{1}{2}z\cos(a+\frac{1}{2}z)}{\sin\frac{1}{2}z'\cos(a+\frac{1}{2}z')}.$$

Si les arcs z et z' sont très-petits, et si, de plus, l'arc a n'est pas très-voisin de 90°, le rapport $\frac{\cos(a+\frac{1}{2}z)}{\cos(a+\frac{1}{2}z')}$ est très-peu différent de l'unité (*); et, en même temps, le rapport $\frac{\sin\frac{1}{2}z}{\sin\frac{1}{2}z'}$ est sensiblement égal à $\frac{z}{z'}$.

Lorsque les arcs $a+\frac{1}{2}z$ et $a+\frac{1}{2}z'$ sont très-voisins de 90°, le rapport de leurs cosinus peut être très-différent de l'unité, et il n'est plus permis de substituer le rapport des différences des arcs à celui des différences des sinus; mais,

(*) En cherchant dans les Tables la différence des logarithmes des cosinus des arcs 89° et 89° 0′ 10″, on voit que le rapport de ces cosinus est moindre que 1,003.

dans ce cas, les petites différences des arcs ne font varier les sinus et leurs logarithmes que de quantités insensibles au degré d'approximation des Tables; ainsi il n'y a pas lieu de calculer ces quantités.

532. Quand les arcs sont très-petits, on peut ne pas obtenir les logarithmes des sinus ou des tangentes avec une exactitude suffisante, en ne tenant compte que du premier terme de la valeur de $\Delta' u$, parce que les différences premières des logarithmes varient alors très-rapidement. Mais, au lieu de se servir de la formule (1), il est préférable d'employer le moyen suivant, qui est indiqué dans l'Avertissement placé en tête des Tables de Callet, et que je rapporterai ici, pour la commodité du lecteur.

Supposons qu'on veuille avoir le logarithme du sinus de 23",63. Les arcs très-petits étant sensiblement proportionnels à leurs sinus, on aura, à très-peu près,

$$\sin 23'',63 = \sin 23'' \times \frac{23,63}{23}.$$

On prendra donc, dans les Tables qui donnent les logarithmes des sinus et des tangentes des arcs de seconde en seconde, le logarithme du sinus de 23"; on y ajoutera le logarithme de 23,63 et le complément du logarithme de 23; la somme diminuée de 10 sera le logarithme demandé. On suivra une marche analogue pour trouver l'arc au moyen du log sin, quand cet arc sera très-petit.

533. La formule (1) s'applique seulement au cas de l'interpolation pour des valeurs connues, correspondantes à des valeurs équidistantes de la variable. Dans le cas plus général où l'on connaît $n+1$ valeurs d'une fonction, correspondantes à un égal nombre de valeurs quelconques données de la variable, en supposant toujours la fonction entière et du degré n, on peut poser

$$u_x = A + Bx + Cx^2 \ldots + Kx^n;$$

on a alors, pour déterminer les coefficients A, B, C,..., K,

les $n+1$ équations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_0 &= A + Bx_0 + Cx_0^2 \ldots + Kx_0^n,\\
u_1 &= A + Bx_1 + Cx_1^2 \ldots + Kx_1^n,\\
u_2 &= A + Bx_2 + Cx_2^2 \ldots + Kx_2^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= A + Bx_n + Cx_n^2 \ldots + Kx_n^n.
\end{aligned}$$

D'après la loi des valeurs des inconnues dans les équations du premier degré, celles qu'on obtiendrait pour les coefficients A, B, C, ..., K, ne contiendraient les quantités u_0, u_1, u_2..., u_n qu'au premier degré et dans les numérateurs seulement; de sorte qu'il en résulterait une expression de cette forme :

$$u_x = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 \ldots + X_n u_n;$$

les fonctions X_0, X_1, X_2, ... X_n ne dépendant que de la variable x et de ses valeurs x_0, x_1, x_2, ..., x_n.

Cette expression de u_x donnera $u_x = u_0$ pour $x = x_0$, si l'on a, par cette valeur de x,

$$X_0 = 1, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots, \quad X_n = 0;$$

de même $x = x_1$ donnera $u_x = u_1$, si l'on a alors

$$X_0 = 0, \quad X_1 = 1, \quad X_2 = 0, \ldots, \quad X_n = 0;$$

$x = x_2$ donnera $u_x = u_2$, s'il en résulte

$$X_0 = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 1, \ldots, \quad X_n = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

enfin $x = x_n$ donnera $u_x = u_n$, si l'on a, par cette valeur de x,

$$X_0 = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots, \quad X_n = 1.$$

En considérant par colonnes le tableau de ces conditions, on voit d'abord que la fonction X_0 doit devenir nulle lorsqu'on donne à x toutes les valeurs comprises dans la série x_0, x_1, x_2, ..., x_n, excepté la première. Or on satisfait à cette condition de la manière la plus simple, en prenant le produit

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Lorsqu'on fait $x = x_0$, ce produit devient

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n);$$

donc, en divisant le premier produit par le second, le quotient, qui deviendra l'unité pour $x = x_0$, remplira toutes les conditions relatives à la fonction X_0. On pourra donc prendre

$$X_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

On trouvera de même

$$X_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)},$$

$$X_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\ldots(x_2 - x_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

On aura ainsi la formule suivante :

$$u_x = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}u_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}u_1$$
$$\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}u_n.$$

Cette formule, due à Lagrange, est remarquable par son élégance ; mais elle est peu employée. Elle présente d'ailleurs, pour les applications, un grave inconvénient, qui consiste en ce que les quantités x_0, x_1, x_2, etc., étant ordinairement très-voisines les unes des autres, et ne pouvant être mesurées qu'approximativement, les erreurs relatives des différences de ces quantités peuvent être très-grandes ; et celles qui en résultent sur les multiplicateurs des quantités u_0, u_1, u_2, etc., sont du même ordre de grandeur.

534. Il est à remarquer que les considérations par lesquelles on a formé les valeurs des quantités X_0, X_1, X_2, ..., X_n sont bien propres à montrer comment l'interpolation est un problème indéterminé, lorsqu'on ignore la forme de la fonction d'où dérive la série des nombres donnés. En effet, le produit des binômes $x - x_1$, $x - x_2$, ..., $x - x_n$, n'est pas la seule fonction susceptible de s'évanouir pour les valeurs $x = x_1, = x_2, \ldots, = x_n$. Si l'on sort des fonctions algébriques, on trouve d'abord l'expression très-simple

$$\sin p\,(x - x_1)\sin q\,(x - x_2)\ldots\sin t\,(x - x_n),$$

qui jouit de la même propriété, quels que soient les nombres $p, q, \ldots, t$; on pourra donc poser encore

$$X_0 = \frac{\sin p(x-x_1)\sin q(x-x_2)\ldots\sin t(x-x_n)}{\sin p(x_0-x_1)\sin q(x_0-x_2)\ldots\sin t(x_0-x_n)},$$

$$X_1 = \frac{\sin p'(x-x_0)\sin q'(x-x_2)\ldots\sin t'(x-x_n)}{\sin p'(x_1-x_0)\sin q'(x_1-x_2)\ldots\sin t'(x_1-x_n)},$$

etc.;

en observant que les nombres $p', q', \ldots, t'$ peuvent-être différents des nombres $p, q, \ldots, t$; et ainsi de suite pour toutes les autres fonctions X.

Si de pareilles expressions s'accordent avec celles qui précèdent pour les valeurs comprises dans la série x_0, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, elles en diffèrent beaucoup pour les valeurs intermédiaires, dès que les arcs ne sont plus assez petits pour être sensiblement proportionnels à leurs sinus.

De la formation des Tables numériques au moyen des différences.

535. Le calcul des valeurs d'une fonction au moyen des différences n'est pas seulement applicable aux fonctions entières.

Considérons, par exemple, la fonction $L(x)$; en formant ses différences successives, on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta Lx &= L(x+h) - L(x) = L\left(1+\frac{h}{x}\right)\\
&= M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots\right),\\
\Delta^2 L(x) &= L(x+2h) - 2L(x+h) + Lx\\
&= L\left(1+\frac{2h}{x}\right) - 2L\left(1+\frac{h}{x}\right)\\
&= -M\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\right),\\
\Delta^3 Lx &= L(x+3h) - 3L(x+2h) + 3L(x+h) - Lx\\
&= L\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3L\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3L\left(1+\frac{h}{x}\right)\\
&= M\left(\frac{2h^3}{x^3} - \ldots\right),
\end{aligned}$$

etc.

Pour $h=1$, et en prenant $x=10000$, ou $x>10000$, ces différences successives décroissent très-rapidement; et celle du troisième ordre, d'après la valeur du module M, est moindre que 0,000000000000869. Il suit de là que, si l'on ne voulait avoir les logarithmes qu'avec huit décimales, on pourrait négliger longtemps les différences du troisième ordre, et ne tenir compte que de celles du premier et du deuxième ordre.

La formule (2) [page 373] permet d'apprécier l'erreur qu'occasionne, sur une valeur d'un rang quelconque, la suppression des différences d'un ordre donné. Dans l'exemple que nous considérons, en faisant $n=40$, et en calculant, pour cette valeur, celle du terme

$$\frac{u\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,\Delta^3 u,$$

on voit qu'il n'influera pas sur la huitième décimale du logarithme de 10040; il en serait à plus forte raison de même des différences des ordres supérieurs. On pourra donc calculer les logarithmes des nombres, depuis 10000 jusqu'à 10040, en partant de celui de 10000 qui est 4, et en calculant les valeurs correspondantes de $\Delta \mathrm{L} x$ et $\Delta^2 \mathrm{L}\, x$, qui sont :

$$\Delta \mathrm{L}\, x = 0{,}000.043.427.27,$$
$$\Delta^2 \mathrm{L}\, x = 0{,}000.000.004.34.$$

Il est nécessaire de prendre ces valeurs avec quelques chiffres au delà de ceux qu'on veut avoir exactement dans les derniers résultats, afin d'éviter l'accumulation des erreurs. En négligeant dans $\Delta^2 \mathrm{L}\, x$ les chiffres qui suivent le onzième, l'erreur qui en résulte sur le logarithme de 10040 est celle du terme $\frac{n\,(n-1)}{2}\,\Delta^2 u$ pour $n=40$, et elle est inférieure à une unité du huitième ordre.

Lorsqu'on sera parvenu au logarithme de 10040, on pourra le calculer directement, par la série

$$\mathrm{L}\,(x+h)=\mathrm{L}\,x+\mathrm{M}\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2\,x^2}+\frac{h^3}{3\,x^3}-\ldots\right),$$

en faisant

$$x=10000 \quad \text{et} \quad h=40\,;$$

il suffira des trois premiers termes de la série. On appréciera ainsi le degré d'exactitude des opérations qui auront été faites jusque-là au moyen des différences. On calculera, en outre, les différences première et seconde pour $x = 10\,040$ et $h = 1$, et l'on formera ensuite, par leur moyen, les logarithmes des nombres consécutifs dans un nouvel intervalle qui pourra être plus étendu que le précédent. Ainsi de suite.

536. Considérons aussi les différences de la fonction $\sin x$; on a

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{1}{2}h\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right),$$

$$\Delta^2 \sin x = \Delta \sin(x+h) - \Delta \sin x = -\left(2\sin\frac{1}{2}h\right)^2 \sin(x+h);$$

$$\Delta^3 \sin x = \Delta^2 \sin(x+h) - \Delta^2 \sin x = -\left(2\sin\frac{1}{2}h\right)^3 \cos\left(x+\frac{3}{2}h\right),$$

$$\Delta^4 \sin x = \Delta^3 \sin(x+h) - \Delta^3 \sin x = \left(2\sin\frac{1}{2}h\right)^4 \sin(x+2h),$$

etc.

Il est facile de reconnaître la loi de ces différences, et l'on voit qu'elles décroissent très-rapidement lorsque l'arc h est très-petit.

On obtiendrait des formules analogues pour la fonction $\cos x$.

537. On a

$$\Delta^2 \sin x = \sin(x+2h) - \sin(x+h) - [\sin(x+h) - \sin x];$$

en faisant $x = (m-1)h$, on obtient, par la valeur ci-dessus de $\Delta^2 \sin x$, la formule de Thomas Simpson pour le calcul des Tables de sinus,

$$\sin(m+1)h - \sin mh = \sin mh - \sin(m-1)h - \left(2\sin\frac{1}{2}h\right)^2 \sin mh.$$

Si l'on pouvait avoir les valeurs exactes des différences $\Delta^2 \sin x$, et celle de $\Delta \sin x$ pour $x = 0$, on en déduirait les valeurs exactes des sinus de tous les arcs suivant la progression croissante h, $2h$, $3h$, etc. Les erreurs de valeurs des sinus calculées successivement ne seront donc occasionnées que par les erreurs de ces différences.

Soit e l'erreur du premier terme de la suite des différences secondes ou $-\left(2 \sin \frac{1}{2} h\right)^2 \sin h$. Cette erreur produira une erreur égale sur chacun des termes de la suite des différences premières, à partir du second, et ces erreurs des différences premières produiront, sur les termes de la suite des sinus, à partir du troisième terme ou $\sin 2h$, des erreurs croissantes e, $2e$, $3e$, $4e$, etc.

Si le second terme de la suite des différences secondes est encore fautif de la même quantité e, il en résultera, sur les sinus consécutifs, à partir de $\sin 3h$, des erreurs e, $2e$, $3e$. Ainsi de suite. On conclut de là qu'en supposant toutes les différences secondes fautives de la même quantité e, et que le dernier sinus calculé soit $\sin mh$, l'erreur de ce sinus produite par les erreurs des différentes secondes sera

$$e\,(m-1+m-2+m-3\ldots+1) \quad \text{ou} \quad \frac{m\,(m-1)}{2}\,e.$$

Quant à l'erreur qui résultera de celle du premier terme de la suite des différences premières, elle sera seulement multipliée par m.

En général, lorsqu'on calcule une suite de quantités u_0, u_1, u_2, etc., au moyen de leurs différences, si l'une des différences de l'ordre n, $\Delta^n u_p$, est fautive d'une quantité e, toutes les différences de l'ordre $n-1$, depuis $\Delta^{n-1} u_{p+1}$, sont fautives de la même quantité, et les erreurs qui en résultent sur les différences des ordres inférieurs et sur les quantités qu'il s'agit d'obtenir, à partir de $\Delta^{n-2} u_{p+2}$, $\Delta^{n-3} u_{p+3} \ldots$, u_{p+n}, croissent, pour chaque suite, comme les nombres figurés des ordres successifs. Si toutes les différences de l'ordre n depuis $\Delta^n u_p$ sont fautives de la même quantité e, l'erreur sur un terme quelconque de la suite u_0, u_1, u_2, etc., d'un rang supérieur à $p+n$, par exemple $u_{p+n+m-1}$, est la quantité e multipliée par la somme des m premiers nombres figurés de l'ordre $n-1$, ou le $m^{\text{ième}}$ nombre figuré de l'ordre n (n° 362).

Pour le calcul des sinus, lorsqu'on fait $h = 10''$ on peut obtenir les différences secondes

$$-\left(2 \sin \frac{1}{2} h\right)^2 \sin (x+h),$$

avec seize décimales exactes, ou à moins de $\frac{1}{10^{16}}$ (*); la différence première pour $x=0$ est $\sin h$, et elle est connue avec treize décimales. Il suffit de calculer les sinus et les cosinus jusqu'à 30° ou 108000″, de sorte qu'on a, pour le dernier terme de chaque suite, $m=10800$. On conclut de là qu'en supposant que toutes les erreurs atteignent leur limite supérieure, et qu'elles soient toutes dans le même sens, les erreurs des différences secondes n'occasionneront, sur aucun terme de la suite des sinus, une erreur supérieure à $\frac{10800\times 10799}{2\times 10^{16}}$, ou $0,000.000.005.831.46$. L'erreur du premier terme de la suite des différences premières, ou $\sin 10''$, produira sur le dernier sinus une erreur moindre que $0,000.000.001.08$. Il y aura donc au moins huit décimales exactes dans toute la suite des résultats.

(*) On a pour $h=10''$,

$$\sin\frac{1}{2}h < 0,000.024.240.684.055\ldots$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3 < \frac{1}{48}(0,000.05)^3.$$

Donc

$$\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3 < 0,000.000.000.000.003,$$

et

$$\sin\frac{1}{2}h > 0,000.024.240.684.052.$$

On conclut de là

$$2\sin\frac{1}{2}h \begin{array}{l} < 0,000.048.481.368.110 \\ > 0,000.048.481.368.104 \end{array}.$$

La valeur de $2\sin\frac{1}{2}h$ est donc connue avec quatorze décimales exactes. En multipliant cette valeur par elle-même, on pourra avoir le produit avec dix-sept décimales. Le facteur $\sin(x+h)$, par lequel le nombre constant $\left(2\sin\frac{1}{2}h\right)^2$ doit être multiplié, étant toujours moindre que 1, les plus hautes unités de ce facteur donneront un produit partiel dont le dernier chiffre ne sera pas d'un rang inférieur au dix-huitième, à partir de la virgule, et le produit total n'aura pas moins de seize chiffres décimaux exacts. Comme le nombre $\left(2\sin\frac{1}{2}h\right)^2$ a, d'ailleurs, huit zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif, l'erreur du facteur $\sin(x+h)$ ne pourra influer sur les seize premières décimales du produit, tant qu'elle n'aura pas dépassé elle-même une unité du huitième ordre décimal.

CHAPITRE DIX-SEPTIÈME.

THÉORÈME DE STURM. THÉORÈME DE ROLLE; SÉPARATION DES RACINES PAR CE THÉORÈME ET PAR CELUI DE BUDAN OU DE FOURIER. MÉTHODE D'APPROXIMATION DE LAGRANGE. FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Théorème de Sturm; son emploi dans la résolution des équations.

538. Soit $V = 0$ une équation d'un degré quelconque, qui ne contient que des coefficients réels, et dont toutes les racines sont inégales. Représentons par V_1 le polynôme dérivé de V, et par $V_2, V_3, \ldots, V_r$ des polynômes de degrés décroissants que l'on formera en opérant comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur entre V et V_1, avec cette différence, que l'on devra changer le signe de chaque reste avant de le prendre pour diviseur; en sorte que V_2 sera le reste de la division de V par V_1, dans lequel on aura changé les signes de tous les termes; V_3 sera le reste de la division de V_1 par V_2, dans lequel on aura changé pareillement les signes de tous les termes; ainsi de suite, jusqu'à V_r qui sera un reste numérique, puisque, par hypothèse, l'équation $V = 0$ n'a pas de racines égales. On aura ainsi cette suite d'égalités

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} V = V_1\ Q_1 - V_2, \\ V_1 = V_2\ Q_2 - V_3, \\ V_2 = V_3\ Q_3 - V_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{n-1} = V_n\ Q_n - V_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{r-2} = V_{r-1}\ Q_{r-1} - V_r\ (*). \end{array}\right.$$

La considération des fonctions déterminées de cette manière conduit au théorème suivant :

(*) On peut éviter, dans les divisions successives, les coefficients fractionnaires, en multipliant chaque dividende par un facteur numérique convenable; mais les facteurs qu'on introduit doivent être positifs, afin que les signes des restes ne soient pas altérés.

539. **Théorème.** — *Lorsqu'on substitue à la place de* x, *dans la suite des fonctions*

$$V,\ V_1,\ V_2,\ldots,\ V_{r-1},\ V_r,$$

deux nombres quelconques α *et* β *positifs ou négatifs, si* α *est plus petit que* β, *le nombre des variations de la suite des signes de ces fonctions pour* $x=\beta$ *ne peut pas surpasser le nombre des variations de la suite des signes de ces mêmes fonctions pour* $x=\alpha$; *et s'il est moindre, la différence est égale au nombre des racines réelles de l'équation* $V=0$ *comprises entre* α *et* β.

Pour démontrer ce théorème, il faut examiner comment le nombre des variations formées par les signes des fonctions $V, V_1, V_2,\ldots, V_r$, disposées dans l'ordre indiqué, pour une valeur quelconque de x, peut s'altérer, quand x passe par différents états de grandeur. Or il ne peut arriver de changement dans cette suite de signes, à mesure qu'on fait croître x, qu'autant qu'une des fonctions V, V_1, V_2, etc., change de signe, et par conséquent devient nulle. Il y a donc deux cas à considérer, suivant que la fonction qui s'annule est la première V, ou l'une des fonctions intermédiaires V_1, V_2, etc.; car ce n'est pas la dernière V_r qui peut devenir nulle, puisqu'elle est un nombre.

1^er^ Cas. Supposons que x, en croissant par degrés insensibles, atteigne et dépasse une valeur a qui rend V égal à zéro. Si l'on substitue cette valeur de x dans la fonction dérivée V_1, cette fonction deviendra un nombre positif ou négatif, puisque, par hypothèse, l'équation $V=0$ n'a pas de racines égales. Représentons par u une quantité positive assez petite pour que l'équation $V_1=0$ n'ait pas de racine comprise entre $a-u$ et $a+u$. Alors V_1 conservera le même signe quand on y fera $x=a-u$, $x=a$, $x=a+u$.

Désignons pour un moment V par $f(x)$ et V_1 par $f'(x)$; on aura, en observant que $f(a)=0$,

$$f(a-u)=-\frac{u}{1}f'(a)+\frac{u^2}{1.2}f''(a)-\frac{u^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots$$

Comme rien ne limite la petitesse de u, on pourra la rendre telle que le signe du développement de $f(a-u)$ ne dépende

que du signe de son premier terme (n° 416) : ainsi $f(a-u)$ aura le même signe que $-uf'(a)$, et par conséquent il aura un signe contraire à celui de $f'(a)$; or $f'(a)$ et $f'(a-u)$ ont le même signe; donc $f(a-u)$ et $f'(a-u)$ auront des signes contraires.

En changeant $-u$ en $+u$ dans le développement précédent, on a

$$f(a+u)=\frac{u}{1}f'(a)+\frac{u^2}{1.2}f''(a)+\frac{u^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots;$$

ce qui prouve que $f(a+u)$ aura le même signe que $f'(a)$, et, par suite, le même signe que $f'(a+u)$.

Il suit de là que les signes de V et de V_1 pour $x=a-u$, $x=a$ et $x=a+u$, sont tels qu'on le voit dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llcccc}
 & & \mathrm{V}\ \mathrm{V}_1 & & \mathrm{V}\ \mathrm{V}_1 \\
\text{Pour} & \left\{\begin{array}{l} x=a-u \\ x=a \\ x=a+u \end{array}\right. & \begin{array}{c} -\ + \\ 0\ + \\ +\ + \end{array} & \text{ou bien} & \begin{array}{c} +\ - \\ 0\ - \\ -\ - \end{array}
\end{array}$$

Par conséquent, lorsque a est une racine de l'équation $V=0$, le signe de V forme avec le signe de V_1 une *variation* avant que x atteigne la valeur a, et cette variation est changée en une *permanence* après que x a dépassé cette valeur.

Quant aux autres fonctions V_2, V_3, etc., chacune d'elles aura, comme V_1, soit pour $x=a-u$, soit pour $x=a+u$, le même signe qu'elle a pour $x=a$; si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x=a$, en même temps que V. Nous allons examiner ce qui arrive lorsqu'une de ces fonctious s'évanouit.

2ᵉ Cas. Supposons qu'une fonction intermédiaire V_n s'annule pour $x=b$. Cette valeur de x ne peut réduire à zéro ni la fonction V_{n-1} qui précède V_n, ni la fonction V_{n+1} qui la suit immédiatement; car, si cela était, le facteur $x-b$ diviserait en même temps deux restes consécutifs V_{n-1} et V_n, ou V_n et V_{n+1}; par conséquent $x-b$ serait un facteur multiple du polynôme V : ce qui est impossible, puisque nous avons supposé que l'équation $V=0$ n'a pas de racines égales. En outre, d'après l'égalité $V_{n-1}=V_nQ_n-V_{n+1}$, qui est une des relations (1) du n° 538, V_n étant nulle pour $x=b$, on aura

$V_{n-1} = -V_{n+1}$; donc V_{n-1} et V_{n+1} auront des signes contraires lorsqu'on y fera $x = b$.

Celà posé, si l'on substitue à la place de x deux nombres $b - u$ et $b + u$ très-peu différents de b, chacune des fonctions V_{n-1} et V_{n+1} aura pour ces deux valeurs de x le même signe que pour $x = b$; puisqu'on peut prendre u assez petit pour que ces fonctions V_{n-1} et V_{n+1} ne deviennent pas nulles dans l'intervalle de $b - u$ à $b + u$. Donc, quel que soit le signe de V_n pour $x = b - u$, comme il est placé entre les signes de V_{n-1} et de V_{n+1} qui sont contraires, les signes des trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1} ; quand on fera $x = b - u$, formeront une permanence et une variation, ou une variation et une permanence. Par la même explication, quand on fera $x = b + u$, les signes des trois fonctions consécutives V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, présenteront encore une variation et une permanence, ou une permanence et une variation.

Il suit de là que les signes des fonctions depuis V_1 jusqu'à V_r, pour $x = b + u$, présenteront précisément autant de variations que les signes de ces mêmes fonctions pour $x = b - u$. Donc, quand une fonction intermédiaire quelconque passe par zéro, le nombre des variations de la suite des signes de toutes les fonctions n'est pas changé; à moins que la valeur de x qui annule cette fonction intermédiaire ne réduise aussi à zéro la première fonction V; ce qui ferait disparaître une variation sur la gauche de la suite des signes (1er cas).

Il est clair que la même conclusion subsisterait si plusieurs fonctions intermédiaires non adjacentes devenaient nulles pour la valeur $x = b$.

Donc, chaque fois que la variable x, en croissant par degrés insensibles, atteint et dépasse une valeur qui rend V égale à zéro, la suite des signes des fonctions V, V_1, V_2,..., V_r, perd une variation formée par les signes de V et de V_1, laquelle est remplacée par une permanence; tandis que les changements de signes des fonctions intermédiaires V_1, V_2,..., V_{r-1}, ne peuvent jamais ni augmenter ni diminuer le nombre des variations. Par conséquent, si l'on prend une nombre quelconque α, positif ou négatif, et un autre nombre 6 plus grand que α, et si l'on fait croître x depuis α jusqu'à 6, autant il y aura de

valeurs de x comprises entre α et 6 qui réduiront V à zéro, autant la suite des signes des fonctions V, V_1, $V_2,\ldots$, V_r, pour $x=6$, contiendra de variations de moins que la suite des signes de ces fonctions pour $x=\alpha$. Cette conclusion constitue évidemment le théorème qu'il s'agissait d'établir.

Scolie. — Il peut arriver que l'une des fonctions V_1, V_2, $V_3,\ldots$, V_{r-1}, devienne nulle, soit pour $x=\alpha$, soit pour $x=6$. Dans ce cas, il suffit de considérer les variations de la suite des signes de toutes les fonctions, sans avoir égard à celle qui s'évanouit. Car on a vu que, lorsque la fonction V_n devient nulle pour $x=\alpha$, si l'on substitue à la place de x une quantité très-peu différente de α, les signes des trois fonctions V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, présenteront toujours une variation et une permanence; et la variation subsistera encore quand on omettra la fonction V_n.

Corollaire i. — Pour connaître le nombre total des racines réelles de l'équation $V=0$, il faudra substituer, dans toutes les fonctions, deux quantités α et 6 entre lesquelles toutes les racines soient comprises. Or il est toujours possible de donner à x une valeur assez grande pour que chacune des fonctions V, V_1, $V_2,\ldots$, V_r ait le signe de son premier terme (n° 415). Donc, si l'on considère d'abord les signes des premiers termes de ces fonctions en supposant x négatif, et ensuite les signes de ces mêmes termes en supposant x positif, l'excès du nombre des variations de la première suite de signes sur le nombre des variations de la seconde suite sera précisément le nombre des racines réelles de l'équation.

Corollaire ii. — Le théorème de Sturm fait trouver les conditions nécessaires pour que toutes les racines d'une équation soient réelles. L'équation $V=0$ étant du degré m, il faudra que la suite des signes des premiers termes des fonctions V, V_1, V_2, etc., puisse présenter m variations; ce qui exige que le nombre des fonctions ne soit pas moindre que $m+1$. Or ce nombre ne peut pas surpasser $m+1$, puisque le degré de chaque fonction est inférieur au moins d'une unité à celui de la fonction précédente; donc il devra être $m+1$. Il faudra de plus que les premiers termes des fonctions, en supposant x positif, aient tous le même signe. Ces conditions sont

suffisantes; car, si les exposants des premiers termes des fonctions ne diminuent que d'une unité, de chaque fonction à la suivante, ils seront alternativement pairs et impairs; et, si les signes de ces premiers termes ne présentent que des permanences quand x est positif, ils ne présenteront que des variations pour x négatif. Le nombre des racines réelles sera donc égal à m.

Pour exprimer ces conditions, comme les premiers termes des fonctions V et V_1 sont toujours de même signe, on aura seulement à considérer les premiers termes des fonctions suivantes V_2, V_3, etc.; on obtiendra donc $m-1$ conditions. Il pourra d'ailleurs arriver que quelques-unes de ces conditions rentrent dans les autres, ainsi qu'on le voit par l'exemple I ci-après.

Corollaire III. — Toutes les fois que le nombre des fonctions auxiliaires V_1, V_2, V_3, etc., est égal à m, on peut connaître le nombre des racines imaginaires de l'équation $V=0$ par la simple inspection des signes des premiers termes de ces fonctions. *L'équation* $V=0$ *a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations dans la suite des signes des premiers termes des fonctions* V, V_1, V_2, etc., *jusqu'à la constante* V_m *inclusivement*. Car, si cette suite présente n variations, elle présente $m-n$ permanences; quand on change x en $-x$, les permanences se changent en variations et *vice versâ*, de sorte que le nombre des variations est $m-n$; le nombre des racines réelles est donc $m-2n$.

540. Je placerai ici quelques exemples de l'emploi des propositions qui viennent d'être exposées.

Exemple I. — Trouver les conditions nécessaires pour que l'équation $x^3+px+q=0$ ait toutes ses racines réelles.

On a

$$V=x^3+px+q,$$
$$V_1=3x^2+p.$$

Pour calculer la fonction V_2, on divise V par V_1, et, afin d'éviter les fractions, on multiplie V par 3; on obtient ainsi le reste $2px+3q$; donc

$$V_2=-2px-3q.$$

On divise V_1 par V_2. Pour éviter les fractions, il faut multiplier V_1 par $2p$; mais comme le signe de p n'est pas connu, on doit multiplier par $2p^2$, qui est toujours une quantité positive; et pour n'avoir aucune préparation à effectuer après la première division partielle, il faut multiplier par $4p^2$. De cette manière, le reste indépendant de x est $4p^3 + 27q^2$; donc

$$V_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

On obtient les conditions demandées en exprimant que les premiers termes des fonctions doivent avoir le même signe, ce qui donne

$$p < 0, \quad \text{et} \quad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

La première condition est comprise dans la seconde; car $27q^2$ étant toujours positif, la quantité $4p^3 + 27q^2$ ne peut être négative que si p est une quantité négative.

Exemple II. — Soit l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$.

La condition de réalité des racines est vérifiée; car on a

$$4p^3 + 27q^2 = -49.$$

Comme l'équation a deux variations, deux des racines sont positives, et la troisième est négative (n° 440). Le premier membre est positif pour $x = \sqrt{7}$ et pour toute valeur plus grande de x; et en substituant à la place de x les nombres 0, 1, 2, on a des résultats positifs. Pour séparer les deux racines positives, on peut former les fonctions de Sturm. En déduisant les fonctions V_2 et V_3 de celles qui ont été calculées dans l'exemple précédent, on a

$$\begin{aligned} V &= x^3 - 7x + 7, \\ V_1 &= 3x^2 - 7, \\ V_2 &= 14x - 21, \\ V_3 &= 49. \end{aligned}$$

La substitution dans ces fonctions des nombres 0, 1, 2, donne les suites de signes :

$$\begin{array}{l} (0)\ldots + \; - \; - \; +, \\ (1)\ldots + \; - \; - \; +, \\ (2)\ldots + \; + \; + \; +. \end{array}$$

Les deux racines sont donc comprises entre 1 et 2. Si l'on fait $x = 1,5$, la fonction V est négative ; donc une des racines est entre 1 et 1,5 ; et l'autre est entre 1,5 et 2.

Si l'on substituait la valeur 1,5 dans les fonctions V_1 et V_2, on trouverait que la dernière devient nulle, et on aurait pour les quatre fonctions cette suite de signes :

$$- \quad - \quad 0 \quad +.$$

En ne tenant pas compte dans cette suite du signe 0, on y trouve une variation : ainsi elle a une variation de moins que la suite qu'on obtient pour $x = 1$, et une de plus que la suite qu'on obtient pour $x = 2$; ce qui s'accorde avec le scolie du n° 539.

Exemple. $x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$

On a vu que cette équation n'a pas moins de trois racines réelles (n° 481) ; il ne s'agit donc plus que de reconnaître si toutes les racines sont réelles, ou si elle a deux racines imaginaires. Or on trouve

$$\begin{aligned} V_1 &= 5x^4 - 9x^2 + 2x - 8, \\ V_2 &= 6x^3 - 3x^2 + 32x + 50, \\ V_3 &= 413x^2 + 636x + 346, \\ V_4 &= -195395x - 256937. \end{aligned}$$

Le premier terme de la fonction V_4 étant négatif, l'équation a nécessairement des racines imaginaires (n° 539, Cor. II). On peut donc se dispenser de calculer la constante V_5. Si l'on achève l'opération, on trouvera que cette constante est négative ; de sorte que la suite des signes des premiers termes des fonctions $V, V_1, \ldots, V_5$ a une seule variation ; ce qui est d'accord avec le corollaire III.

541. Lorsqu'on a calculé les fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc., s'il ne suffit pas de quelques essais pour effectuer la séparation des racines, on doit substituer dans toutes les fonctions des nombres croissants, jusqu'à ce qu'on ait atteint une limite pour laquelle la suite des signes des résultats ne présente pas plus de variations qu'il ne s'en trouve dans la suite

des signes des premiers termes des fonctions. On est alors certain qu'il n'y a aucune racine au delà de cette limite; et on substitue des nombres intermédiaires, dans les intervalles où on a reconnu qu'il se trouve plusieurs racines, jusqu'à ce que ces racines soient séparées. On peut ne considérer que les racines positives, et changer ensuite x en $-x$ dans toutes les fonctions, pour la séparation des racines négatives. Les nombres que l'on substitue peuvent être choisis d'une manière arbitraire; mais pour la facilité des calculs, il convient d'employer d'abord les nombres 0, 1, 10, 100, 1000, etc. S'il y a plusieurs racines entre 100 et 1000, par exemple, on substituera 500 et successivement les autres nombres de centaines compris entre 100 et 1000. Si plusieurs racines ont le même chiffre de centaines, on substituera les nombres de dizaines entre les deux nombres de centaines qui comprendront ces racines. On passera ensuite, s'il est nécessaire, à la substitution des nombres comprenant des unités, puis à celle des nombres avec des dixièmes; ainsi de suite. De cette manière, on obtiendra successivement les chiffres de chaque racine, à partir des plus hautes unités, jusqu'à ce que les racines soient toutes séparées. Si l'on doit substituer les nombres 310, 320, etc., on pourra faire dans toutes les fonctions $x = 300 + x'$; on n'aura plus qu'à substituer dans les fonctions transformées en x' les nombres 10, 20, etc. Pareillement, s'il faut substituer pour x' des nombres compris entre 20 et 30, on fera $x' = 20 + x''$, et l'on n'aura qu'à substituer dans les nouvelles fonctions en x'' des nombres de 1 à 10.

542. Lorsque l'on reconnaît qu'une des fonctions auxiliaires, telle que V_n, intermédiaire entre V et V_r, conserve toujours le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre α et 6, il n'est point nécessaire de considérer les fonctions qui suivent V_n; il suffit de substituer les deux nombres α et 6 dans les fonctions des degrés supérieurs, V, V_1, V_2, etc., en s'arrêtant à V_n, et d'écrire les signes des résultats. *Le nombre des racines réelles de l'équation* $V = 0$ *comprises entre* α *et* 6 *est égal à l'excès du nombre des variations de la suite des signes produits par la substitution de* α, *sur le nombre des*

variations de la suite des signes produits par la substitution de 6.

Pour se rendre compte de cette propriété, il suffit de remarquer qu'on peut appliquer au système partiel de fonctions $V, V_1, \ldots, V_n$, la démonstration que nous avons donnée plus haut pour le système complet des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}, \ldots, V_r$, dont la dernière était un nombre constant. Dans l'hypothèse actuelle, V_n conserve toujours le même signe, sans avoir une valeur constante, pour toutes les valeurs croissantes de x depuis α jusqu'à 6; or la suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_n$ perd une variation chaque fois que V devient nulle, et l'évanouissement des fonctions intermédiaires entre V et V_n ne peut ni augmenter ni diminuer le nombre des variations. Donc, autant l'équation $V = 0$ a de racines comprises entre α et 6, autant la suite des signes produits par la substitution de 6 a de variations de moins que la suite des signes produits par la substitution de α.

Le théorème, modifié comme on vient de le voir, sera souvent d'une application plus facile. Ainsi, lorsqu'en cherchant le plus grand commun diviseur de V et V_1, on parvient à un polynôme V_n (par exemple celui du second degré) qui, égalé à zéro, ne donne que des valeurs imaginaires de x, il n'est pas nécessaire de pousser plus loin les divisions; car ce polynôme V_n sera constamment de même signe que son premier terme, pour toutes les valeurs réelles de x; de sorte qu'on pourra le prendre pour la dernière des fonctions auxiliaires V_1, V_2, etc. On pourrait même s'arrêter à un polynôme V_n qui s'annulerait pour des valeurs réelles de x, pourvu qu'on pût déterminer toutes ces valeurs. Car, en désignant par p, q, r, etc., celles de ces valeurs qui seraient comprises entre α et 6, et les supposant disposées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, on trouverait par l'application du principe ci-dessus, combien l'équation $V = 0$ a de racines entre α et $p - u$, u étant une quantité positive aussi petite qu'on le voudrait; on trouverait de même combien $V = 0$ a de racines entre $p + u$ et $q - u$, c'est-à-dire entre p et q, en prenant le nombre u suffisamment petit; on trouverait de même combien $V = 0$ a de racines entre q et r; et ainsi de suite. On sup-

pose toutefois que les valeurs p, q, r, etc., qui annulent V_n, ne réduisent pas en même temps V à zéro.

543. On peut remarquer que, lorsque la fonction V_n ne change pas de signe pour les valeurs croissantes de x, depuis α jusqu'à β, on obtiendra constamment le même nombre de variations en substituant soit α, soit β, soit tout autre nombre compris entre α et β, dans la suite partielle des fonctions V_n, $V_{n+1}, \ldots, V_r$; puisque l'évanouissement des fonctions intermédiaires de cette suite partielle ne peut pas altérer le nombre de ses variations. Mais il ne faut pas croire que, si les deux nombres α et β substitués dans ces fonctions donnent le même nombre de variations, V_n conservera le même signe pour toutes les valeurs croissantes de x depuis α jusqu'à β. Cette proposition réciproque n'est vraie que dans le cas où l'équation $V=0$ a toutes ses racines réelles.

544. Nous avons supposé jusqu'à présent que l'équation proposée $V=0$ n'avait pas de racines égales. Mais le théorème du n° 539 subsiste également quand cette condition n'a pas lieu.

Pour le faire voir, supposons que l'équation ayant des racines égales, on opère sur les polynômes V et V_1 comme on l'a dit dans le n° 538. On parviendra alors à un reste V_r, fonction de x, qui divisera exactement le reste précédent V_{r-1}; ce reste V_r sera le plus grand commun diviseur de V et de V_1, et il divisera exactement chacun des restes successifs $V_2, V_3, \ldots, V_{r-2}$.

Concevons que l'on divise les fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, par V_r, et représentons les quotients par $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$. Il est facile de reconnaître que le théorème du n° 539 aura lieu pour l'équation $T=0$, en considérant la suite des fonctions $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$.

En effet, on voit d'abord que le dernier quotient T_r sera indépendant de x, puisqu'il sera égal à l'unité. En second lieu, comme on aura toujours, entre les fonctions V, V_1, V_2, etc., les équations $V=V_1Q_1-V_2$, $V_1=V_2Q_2-V_3$, etc., on aura aussi, en divisant toutes ces équations par V_r, $T=T_1Q_1-T_2$, $T_1=T_2Q_2-T_3$, etc.; et de là on conclura

comme dans le n° 539, que, si une valeur de x annule une des fonctions $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{r-1}$, elle ne pourra annuler aucune des deux fonctions adjacentes, et elle fera prendre à ces deux fonctions des valeurs de signes contraires.

Tout se réduit donc à faire voir que, si a est une racine de l'équation $T=0$, les deux fonctions T et T_1, dont la seconde n'est plus la dérivée de la première, auront néanmoins des signes contraires pour $x=a-u$, et les mêmes signes pour $x=a+u$. Soit

$$V=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)(x-d).$$

On aura

$$V_1=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}\times\left\{\begin{array}{l} n\,(x-b)(x-c)(x-d)\\ +n'(x-a)(x-c)(x-d)\\ +\ \ (x-a)(x-b)(x-d)\\ +\ \ (x-a)(x-b)(x-c)\end{array}\right\};$$

et en observant que $V_r=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}$, on conclura de ces valeurs de V et de V_1 :

$$T=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

$$T_1=\left\{\begin{array}{l} n(x-b)(x-c)(x-d)+n'(x-a)(x-c)(x-d)\\ +\ \ (x-a)(x-b)(x-d)+\ \ (x-a)(x-b)(x-c).\end{array}\right.$$

Cela posé, si l'on fait $x=a-u$, u étant une quantité très-petite, toutes les parties de T_1 qui contiennent le facteur $x-a$ auront des valeurs très-petites; par conséquent, le signe de T_1 sera le même que celui du produit $n(x-b)(x-c)(x-d)$; or ce produit aura un signe contraire à celui de T, puisque le facteur $x-a$ se réduira à la quantité négative $-u$; donc T et T_1 auront des signes contraires. Si l'on fait, au contraire, $x=a+u$, le facteur $x-a$ devenant $+u$, T et T_1 auront le même signe.

Il résulte, de ces explications, que, *Si l'on donne successivement à* x, *dans la suite des fonctions* T, T_1, T_2, etc., *deux valeurs* α *et* 6 (α *étant plus petit que* 6), *l'excès du nombre des variations qu'on trouvera en faisant* $x=\alpha$, *sur celui des variations qu'on trouvera pour* $x=6$, *sera égal au nombre des racines réelles de l'équation* $T=0$ *comprises entre* α *et* 6.

On peut se dispenser de calculer les quotients T, T_1, T_2, etc.;

car les fonctions V, V_1, V_2, etc., qui sont respectivement égales aux fonctions T, T_1, T_2, etc., multipliées par V_r, auront pour une valeur particulière de x les mêmes signes que les fonctions T, T_1, T_2, etc., ou bien elles auront toutes des signes contraires; suivant que la fonction V_r sera positive ou négative pour cette valeur de x. Par conséquent, le nombre des variations de signes des fonctions V, V_1, V_2, etc., pour une valeur quelconque de x, sera toujours égal au nombre des variations de signes de la suite des fonctions T, T_1, T_2, etc.

Donc, *Si l'on donne successivement à* x, *dans la suite des fonctions* $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, *deux valeurs* α *et* 6 (α *étant moindre que* 6), *l'excès du nombre de variations qu'on obtiendra en faisant* $x=\alpha$, *sur celui des variations qu'on obtiendra pour* $x=6$, *sera égal au nombre des racines réelles différentes de l'équation* $V=0$ *comprises entre* α *et* 6, *abstraction faite du degré de multiplicité de chaque racine.*

545. Parmi les observations qui ont été faites par Sturm, au sujet de son théorème, je rapporterai encore la suivante :

V_1 étant la fonction dérivée de V, on a vu que si V est nul pour $x=a$, V a le signe contraire à celui de V_1 pour $x=a-u$, et le même signe que V_1 pour $x=a+u$. C'est ce qu'on peut exprimer plus brièvement en disant que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe toujours du négatif au positif quand V s'évanouit.

Supposons maintenant que V_1 ne soit plus la fonction dérivée de V, mais que ce soit un polynôme quelconque d'un degré inférieur à celui de V, et qui n'ait aucun facteur réel du premier degré commun avec V. On pourra se servir de ce polynôme V_1 pour en former d'autres V_2, V_3, etc., de degrés décroissants, par des divisions successives, comme on s'est servi du polynôme dérivé (n° 538).

Considérons ce nouveau système de fonctions $V, V_1, \ldots, V_r$, qui vérifient aussi les équations (1) du n° 538. Quand x, en croissant, atteint et dépasse une valeur a qui annule V, il peut arriver que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, ou du positif au négatif, ou enfin qu'il ne change pas de signe.

Dans le premier cas, la suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$ perd sur sa gauche une variation; dans le deuxième cas elle acquiert, au contraire, une variation; dans le troisième cas le nombre des variations de la suite n'est pas changé. D'ailleurs, l'évanouissement d'une fonction intermédiaire entre V et V_r ne peut pas altérer le nombre des variations. De là résulte le théorème suivant, qui remplace celui du n° 539 lorsque la fonction V_1 n'est pas la dérivée de V.

Le nombre des racines de l'équation $V=0$ comprises entre les deux nombres α et β, pour lesquelles le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe du négatif au positif, moins le nombre des racines de la même équation comprises entre α et β, pour lesquelles $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif, est égal au nombre des variations qui se trouvent dans la suite des signes des fonctions $V, V_1, \ldots, V_r$, pour $x=\alpha$, moins le nombre de leurs variations pour $x=\beta$.

Le nombre des racines de l'équation $V=0$ comprises entre α et β ne peut donc pas être moindre que la différence entre ces deux nombres de variations; mais il peut être égal à cette différence, ou la surpasser d'un nombre pair quelconque. Pour qu'il lui soit précisément égal, il faut que V_1 soit la fonction dérivée de V, ou bien une fonction qui ait toujours le même signe que cette dérivée, ou bien un signe contraire au sien, pour chaque valeur réelle de x comprise entre α et β qui annule V. Comme on ne connaît pas à priori une telle fonction, on est obligé de prendre pour V_1 la fonction dérivée de V, si l'on veut déterminer avec certitude toutes les racines réelles de l'équation $V=0$.

Théorème de Rolle. — *Séparation des racines par ce théorème et par celui de* M. Budan.

546. Soient a et b deux racines réelles d'une équation $f(x)=0$, entre lesquelles il ne s'en trouve aucune autre. Puisque $f(x)$ sera nulle pour $x=a$ et pour $x=b$, si x croît depuis a jusqu'à b, en supposant $a<b$, il faudra que la valeur de $f(x)$ soit d'abord croissante et devienne ensuite décrois-

sante; ou qu'elle soit d'abord décroissante et devienne ensuite croissante. On conclut de là que la dérivée sera positive pour $x = a$, et négative pour $x = b$; ou bien, négative pour $x = a$, et positive pour $x = b$ (n° 399). Donc il y aura une ou plusieurs racines de l'équation $f'(x) = 0$ comprises entre les nombres a et b. C'est là le théorème de Rolle : *Entre deux racines consécutives d'une équation* $f(x) = 0$, *il y a au moins une racine de l'équation* $f'(x) = 0$.

Si la dérivée $f'(x)$ est zéro pour l'une des valeurs $x = a$ et $x = b$, ou pour toutes les deux, elle aura des signes contraires lorsqu'on donnera à x une valeur un peu plus grande que a, et ensuite une valeur un peu plus petite que b. Par conséquent le théorème est encore vrai dans ce cas.

Ce théorème a lieu pour les équations transcendantes aussi bien que pour les équations algébriques; il faut seulement que la dérivée $f'(x)$ soit continue depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Dans le cas d'une équation algébrique, s'il y a plusieurs racines de l'équation $f'(x) = 0$ entre les deux racines consécutives a et b de $f(x) = 0$, elles sont en nombre impair (n° 478).

On déduit du théorème de Rolle les conditions nécessaires pour qu'une équation algébrique ait toutes ses racines réelles. Mais il est surtout utile pour séparer les racines d'une équation $f(x) = 0$, quand il est possible d'obtenir toutes les racines réelles de l'équation plus simple $f'(x) = 0$.

547. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda$, ces racines de $f'(x) = 0$, rangées par ordre de grandeur, en commençant par les plus petites; et supposons d'abord que l'équation proposée n'ait pas de racines égales, auquel cas elle ne sera vérifiée par aucune des valeurs α, β, γ, etc.

Puisque deux racines quelconques de $f(x) = 0$ doivent comprendre au moins une des quantités α, β, γ, etc., cette équation ne peut avoir qu'une seule racine plus petite que α, une seule comprise entre α et β, une seule entre β et γ, etc., une seule plus grande que λ. Donc, si l'on substitue successivement, à la place de x dans $f(x)$, les nombres $-L'$, α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$, $+L$, en désignant par $-L'$ et $+L$ deux limites quel-

conques des racines de $f(x)=0$, on connaîtra par les signes des résultats de ces substitutions quelles sont celles entre lesquelles il y a une racine, et celles entre lesquelles il n'y en a aucune.

Il suffit que la suite α, β, γ,..., λ, soit formée de toutes les racines de $f'(x)=0$ dont le degré de multiplicité est impair; car, lorsque deux racines consécutives a et b de $f(x)=0$ comprennent une racine de $f'(x)=0$ d'un degré de multiplicité pair, elles doivent en comprendre une autre d'un degré de multiplicité impair; puisque les racines de $f'(x)=0$ comprises entre a et b sont en nombre impair.

Quand l'équation $f(x)=0$ a des racines égales, si β est une de ces racines, qui doit se trouver comprise parmi celles de la dérivée, la racine de $f(x)=0$ immédiatement plus grande que β doit être aussi plus grande que la racine suivante γ de $f'(x)=0$.

548. On peut séparer de cette manière les racines d'une équation quelconque du troisième degré ou du quatrième. Car, dans le cas d'une équation du troisième degré, l'équation $f'(x)=0$ est du second degré; de sorte qu'on peut la résoudre. Pour une équation du quatrième degré, si l'on fait évanouir le second terme, et si l'on change ensuite x en $\frac{1}{x}$, on aura une équation qui ne contiendra pas la première puissance de x; la dérivée aura une racine nulle, et ses deux autres racines seront données par une équation du second degré.

549. Quand on est assuré que toutes les racines d'une équation sont réelles, on peut les séparer en employant, au lieu des fonctions de Sturm, les fonctions dérivées successives; puisque, dans ce cas, les signes des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, etc., jusqu'à la constante $f^{(m)}(x)$, pour deux valeurs quelconques de x, font connaître le nombre exact des racines comprises entre ces deux valeurs (n° 445).

550. Le problème de la séparation des racines se trouvant ainsi complétement résolu, pour le cas de la réalité de toutes les racines, par le théorème de Budan ou par celui de Fou-

rier, qui lui est équivalent, ces deux géomètres s'étaient efforcés de rendre le même théorème applicable à tous les cas; mais ils n'avaient pu y réussir. A la vérité, Fourier avait énoncé, en 1827, dans les Mémoires de l'Institut, que, lorsqu'il resterait de l'incertitude sur le nombre des racines comprises dans un certain intervalle, elle serait toujours dissipée par les opérations ultérieures pour le calcul des valeurs approchées de ces racines, en les supposant réelles; mais il n'avait donné aucune preuve à l'appui de cette assertion, dont l'exactitude n'a été établie qu'en 1834, par une démonstration de M. Vincent, qui a ainsi complété la méthode de Fourier. M. Ossian Bonnet a montré depuis qu'on peut également parvenir à la détermination de toutes les racines réelles d'une équation, au moyen de la remarque de M. Jacobi, que nous avons mentionnée dans le n° 446. (*Voir* les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, décembre 1847.) Les travaux de Fourier sur les équations ont été réunis dans un ouvrage publié, après sa mort, par les soins de Navier, sous le titre d'*Analyse des Équations*. Le Mémoire de M. Vincent a d'abord été inséré parmi ceux de la *Société des Sciences de Lille*. Il a été ensuite imprimé séparément sous ce titre : *Note sur la résolution des équations numériques*. (Paris, Bachelier.). On le trouve aussi dans le Journal de M. Liouville (tome I, 1836).

551. Si l'on avait trouvé un nombre plus petit que la différence de deux racines réelles quelconques d'une équation, et si l'on formait une progression par différence avec ce nombre pour raison, il ne pourrait se trouver plus d'une racine entre deux termes consécutifs de cette progression. Donc, en substituant successivement tous ces termes dans l'équation, depuis une limite inférieure jusqu'à une limite supérieure des racines, on connaîtrait par les signes des résultats les intervalles qui comprendraient une racine, et ceux qui n'en comprendraient aucune. On séparerait ainsi les racines réelles, et l'on saurait exactement quel en est le nombre.

On peut obtenir un nombre tel que celui dont il s'agit ici, en formant une équation dont les racines soient toutes les dif-

rences des racines de l'équation proposée considérées deux à deux, et en calculant une limite inférieure des racines de cette équation.

Ce moyen avait été indiqué par Waring; il a été reproduit par Lagrange, qui y était parvenu sans connaître cette partie des travaux de Waring. Mais il est rendu en quelque sorte impraticable par la longueur des calculs que nécessite la formation de l'équation aux différences, et il n'y a lieu de le mentionner qu'à titre de renseignement historique.

Méthode d'approximation de LAGRANGE.

552. Soient a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs qui comprennent une seule racine d'une équation. Si l'on pose $x=a+\frac{1}{y}$, l'équation résultante en y aura nécessairement une racine plus grande que 1; et parmi les racines de cette équation en y, il n'y en aura qu'une seule plus grande que 1; autrement il y aurait plusieurs valeurs de x entre a et $a+1$, ce qui est contre l'hypothèse. On pourra donc déterminer la partie entière de cette valeur de y, en substituant successivement dans l'équation en y les nombres entiers 1, 2, 3, etc., jusqu'à ce qu'on ait obtenu deux résultats de signes contraires.

Soient b et $b+1$ les deux nombres qui donnent ces résultats de signes contraires. Si l'on pose $y=b+\frac{1}{z}$, l'équation résultante en z aura encore une seule racine plus grande que 1, et l'on pourra déterminer la partie entière de cette valeur de z, en opérant de la même manière que pour la valeur de y.

Si c est la partie entière de la valeur de z, on posera $z=c+\frac{1}{u}$; ainsi de suite.

On aura de cette manière la valeur de x exprimée par une fraction continue

553. L'équation proposée étant exprimée par $f(x)=0$, celle

qu'on obtiendra en posant $x = a + \frac{1}{y}$ sera

$$f(a) + f'(a)\frac{1}{y} + \frac{f''(a)}{2}\frac{1}{y^2} + \frac{f'''(a)}{2.3}\frac{1}{y^3} + \ldots = 0.$$

On chassera les dénominateurs en multipliant tous les termes par y^m, m étant le degré de l'équation, ce qui donnera

$$f(a)y^m + f'(a)y^{m-1} + \frac{f''(a)}{2}y^{m-2} + \frac{f'''(a)}{2.3}y^{m-3} + \ldots = 0.$$

Si l'on représente le premier membre de cette équation par $\varphi(y)$, la transformée suivante sera

$$\varphi(b)z^m + \varphi'(b)z^{m-1} + \frac{\varphi''(b)}{2}z^{m-2} + \frac{\varphi'''(b)}{2.3}z^{m-3} + \ldots = 0;$$

et de même pour toutes les autres.

554. Quand les nombres a et $a+1$ comprennent plusieurs racines de l'équation proposée, la transformée en y qu'on obtient en posant $x = a + \frac{1}{y}$ a aussi plusieurs racines plus grandes que 1 ; de sorte que la substitution des nombres entiers 1, 2, 3, etc., à la place de y, peut ne plus suffire pour faire connaître les parties entières des valeurs de y. Mais quand on a effectué, par quelque méthode que ce soit, la séparation des racines, il est toujours facile de voir par quel nombre on doit multiplier les racines qui sont comprises entre les mêmes nombres entiers, afin de les changer en d'autres dont les parties entières soient différentes. De cette manière, le calcul des valeurs approchées des racines par la méthode de Lagrange se ramène toujours à ce qui a été dit ci-dessus. Au reste, quand les différences des racines comprises entre deux nombres entiers consécutifs a et $a+1$ ne sont pas des fractions très-petites, on peut encore opérer directement sur l'équation proposée; ainsi qu'on le verra dans le deuxième exemple ci-après.

555. 1^er^ Exemple. $x^3 - 2x - 5 = 0.$

Cette équation ayant une seule racine réelle, qui est comprise

entre 2 et 3 (n° 507), on pose $x = 2 + \frac{1}{y}$. On a

$$f\ (2) = 2^3 - 2.2 - 5 = -1,$$
$$f'\ (2) = 3.2^2 - 2 = 10,$$
$$\frac{1}{2}f''\ (2) = 3.2 = 6,$$
$$\frac{1}{2.3}f'''(2) = 1.$$

1re transformée. $y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$.

La seule inspection de cette équation fait reconnaître que $y = 10$ donne un résultat négatif; le nombre 11 est une limite supérieure des racines (n° 447); la valeur de y est donc comprise entre 10 et 11. En posant $y = 10 + \frac{1}{z}$, on trouve

$$\varphi\ (10) = 10^3 - 10.10^2 - 6.10 - 1 = -61,$$
$$\varphi'\ (10) = 3.10^2 - 20.10 - 6 = 94,$$
$$\frac{1}{2}\varphi''(10) = 3.10 - 10 = 20,$$
$$\frac{1}{2.3}\varphi'''(10) = 1.$$

2e transformée. $61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0$.

L'hypothèse $z = 2$ donnant un résultat positif, on en conclut que la valeur de z est comprise entre 1 et 2; il faut donc poser $z = 1 + \frac{1}{u}$. On obtient

$$\psi\ (1) = 61.1^3 - 94.1^2 - 20.1 - 1 = -54,$$
$$\psi'\ (1) = 183.1^2 - 188.1 - 20 = -25,$$
$$\frac{1}{2}\psi''(1) = 183.1 - 94 = 89,$$
$$\frac{1}{2.3}\psi'''(1) = 61.$$

3e transformée. $54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$.

Cette équation fait connaître que la valeur de u est comprise entre 1 et 2.

En continuant les opérations, les quotients incomplets suivants sont 1, 2, 1, 3, 1, etc., et il en résulte les réduites

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ldots$$

En s'arrêtant à la fraction $\frac{731}{349}$, on a une valeur trop forte (n° 243); mais l'erreur est moindre que $\frac{1}{349(349+275)}$ ou $\frac{1}{217776}$ (n° 247). Cette dernière fraction étant plus petite que 0,000 005, on peut obtenir, au moyen de la réduite $\frac{731}{349}$, une valeur approchée de la racine avec cinq décimales exactes; cette valeur est 2,094 55.

2ᵉ Exemple. $x^3 - 7x + 7 = 0.$

On a vu que cette équation a une racine négative comprise entre -3 et -4; et deux racines positives, comprises l'une entre 1 et $\frac{3}{2}$ et l'autre entre $\frac{3}{2}$ et 2 (n° 540). Pour obtenir une équation dont les racines positives n'aient pas la même partie entière, il suffit de remplacer x par $\frac{x'}{2}$: la transformée est

$$x'^3 - 28x' + 56 = 0;$$

elle a une racine comprise entre 2 et 3, et une autre comprise entre 3 et 4.

En opérant sur cette équation comme dans l'exemple précédent, on trouve pour la première racine les quotients incomplets 2, 1, 2, 2, 40, etc.; et en prenant la cinquième réduite, on en déduit une valeur approchée de la racine avec quatre décimales exactes, qui est 2,7138.

Les quotients incomplets de la racine comprise entre 3 et 4, sont 3, 2, 1, 1, 1, 1, 9, etc. La septième réduite donne une valeur approchée de la racine avec quatre décimales exactes, qui est 3,3840.

Il suit de là que les valeurs approchées des deux racines positives de l'équation proposée, à moins d'un demi-dix-millième, sont 1,3569 et 1,6920.

Pour calculer la racine négative, on changerait x en $-x$; mais on peut se dispenser de chercher directement cette racine; car, la somme des racines étant nulle, la valeur absolue de la racine négative est égale à la somme des deux racines positives.

On pourrait calculer les deux racines positives sans faire subir à l'équation aucune transformation; car, l'une de ces racines étant comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$, et l'autre entre $\frac{3}{2}$ et 2, si l'on pose $x = 1 + \frac{1}{y}$, l'inconnue y aura seulement deux valeurs positives, l'une plus grande que 2, l'autre comprise entre 1 et 2. L'équation qui résulte de la substitution de $1 + \frac{1}{y}$ à la place de x est $y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0$. En faisant $y = 1$, on a un résultat positif; $y = 2$ donne un résultat négatif, et $y = 3$ donne un résultat positif; ainsi la partie entière de la plus grande valeur de y est 2. En posant $y = 2 + \frac{1}{z}$, et $y = 1 + \frac{1}{z}$, on obtiendra deux transformées qui auront chacune une seule racine plus grande que l'unité.

556. Lorsqu'on calcule une racine par la méthode de Lagrange, on peut obtenir une fraction continue périodique. Cette racine est alors une quantité de la forme $a + \sqrt{b}$, qu'on détermine au moyen d'une équation du second degré (n° 251). Soit $x^2 + px + q = 0$ cette équation du second degré, et soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Si les coefficients de l'équation $f(x) = 0$ sont rationnels, son premier membre sera exactement divisible par $x^2 + px + q$. En effet, on peut effectuer la division jusqu'à ce que le reste ne contienne x qu'au premier degré. Soit $\mathrm{M}x + \mathrm{N}$ le reste, et soit Q le quotient; on aura

$$f(x) = (x^2 + px + q)\,\mathrm{Q} + \mathrm{M}x + \mathrm{N}.$$

Si l'on remplace x dans les deux membres de cette égalité par $a + \sqrt{b}$, le premier membre sera zéro, $(x^2 + px + q)\,\mathrm{Q}$ sera aussi zéro; par conséquent $\mathrm{M}x + \mathrm{N}$ devra être aussi zéro. Or il faut, pour cela, que l'on ait $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$; autrement,

comme M et N sont des quantités rationnelles, on aurait une quantité rationnelle égale à une quantité irrationnelle, ce qui est impossible : $f(x)$ est donc divisible par $x^2 + px + q$.

Il suit de là que lorsque l'on trouve une suite de quotients incomplets qui se reproduisent dans le même ordre, pour s'assurer si la racine est réellement exprimée par une fraction continue périodique, il faut former l'équation du second degré qui donnerait la valeur de cette fraction continue périodique, et voir si le premier membre est un diviseur du premier membre de l'équation proposée. Si la division se fait exactement, on connaîtra deux racines de l'équation, et la recherche des autres racines ne dépendra que d'une équation d'un degré moindre de deux unités (*).

557. Si l'on n'a pas supprimé les racines commensurables, on pourra les obtenir par la méthode de Lagrange; elles seront exprimées par des fractions continues terminées. Mais, tant que l'on n'est pas parvenu à une transformée qui admet une racine entière, on ne peut pas être assuré que la fraction continue ne se prolongera pas indéfiniment. La méthode de Newton donnerait également les racines commensurables; elles seraient exprimées par des fractions décimales terminées ou périodiques. Mais si l'on devait parvenir à une fraction décimale périodique, les calculs ne pourraient que faire soupçonner la périodicité; et pour lever l'incertitude, il faudrait substituer dans l'équation la fraction ordinaire équivalente à la fraction périodique.

558. En combinant la méthode de Lagrange avec le théorème de Sturm, on peut calculer toutes les racines d'une équation qui ont la même partie entière, sans faire subir à ces racines aucune transformation.

(*) On pourrait penser que, lorsqu'on doit obtenir une fraction continue périodique, on parviendra, après un certain nombre d'opérations, à une transformée identique avec l'une des précédentes. Mais il n'en est pas ainsi, et les transformées successives sont toujours différentes. Cette propriété des transformées se conclut de celle que M. Vincent a démontrée dans le Mémoire cité à la p. 455; et dont l'auteur a tiré, pour l'emploi de la méthode de Newton, des règles qui conduisent au même but que celles qui ont été expliquées dans le n° 504.

Supposons que a et $a+1$ soient deux nombres qui comprennent plusieurs racines. On fera, selon la méthode de Lagrange, $x=a+\frac{1}{y}$; mais au lieu de se borner à substituer $a+\frac{1}{y}$ à la place de x dans l'équation proposée, que nous représenterons par $V=0$, on fera en outre la même substitution dans les fonctions que nous avons désignées par V_1, V_2, V_3, etc., en s'arrêtant à la première fonction qui garde le même signe pour toutes les valeurs de x. Si l'on substitue alors dans les fonctions résultantes en y les nombres entiers consécutifs, la différence entre les nombres des variations que donneront les signes de ces fonctions pour deux nombres consécutifs b et $b+1$, sera le nombre des valeurs de y comprises entre b et $b+1$. Car, puisque l'on a posé $x=a+\frac{1}{y}$, les résultats qu'on obtient en substituant pour y les nombres b et $b+1$, sont ceux qu'on aurait en substituant $a+\frac{1}{b}$ et $a+\frac{1}{b+1}$ à la place de x dans les polynômes primitifs V, V_1, V_2, etc. Ainsi, la différence entre les deux nombres des variations que présentent les signes de ces résultats, est égale au nombre des racines de l'équation $V=0$ comprises entre $a+\frac{1}{b}$ et $a+\frac{1}{b+1}$, et auxquelles correspondent autant de valeurs de y comprises entre b et $b+1$.

S'il y a plusieurs valeurs de y comprises entre b et $b+1$, on posera $y=b+\frac{1}{z}$, et l'on remplacera y par $b+\frac{1}{z}$ dans toutes les fonctions précédentes en y; on substituera ensuite pour z, dans les nouvelles fonctions, les nombres entiers consécutifs. Ainsi de suite.

Quand une des inconnues successives y, z, etc., n'aura qu'une seule valeur comprise entre deux nombres entiers consécutifs, on continuera les calculs pour cette valeur, en ne considérant plus que la seule transformée qui proviendra de la fonction V.

Comme on n'a besoin que de connaître les signes et non les valeurs des fonctions de y pour chaque nombre substitué à la place de y, on pourra multiplier ces fonctions par des facteurs positifs. Ainsi, après avoir mis $a + \frac{1}{y}$ à la place de x dans la fonction V, on pourra multiplier la fonction résultante par y^m, ce qui revient à prendre immédiatement pour cette fonction celle qu'on obtient en opérant comme il a été dit dans le n° 553. Il en sera de même des fonctions transformées qui se déduiront des polynômes V_1, V_2, etc., et de toutes les fonctions semblables que l'on aura à considérer dans la suite des calculs.

Quand on doit calculer avec une grande approximation des racines qui sont très-peu différentes, on peut d'abord obtenir, par les moyens que nous venons d'indiquer, une valeur suffisamment approchée de chaque racine, et recourir ensuite à la méthode de Newton.

EXEMPLE. $\quad x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$

Cette équation a deux racines comprises entre 3 et 4; ainsi, en posant $x = 3 + \frac{1}{y}$, y a deux valeurs plus grandes que 1. En remplaçant x par $3 + \frac{1}{y}$, dans les fonctions V, V_1, V_2, et en substituant ensuite pour y les nombres 1, 2, 3, 4, etc., on voit que les deux valeurs de y sont comprises entre 4 et 5. Il faut alors poser $y = 4 + \frac{1}{z}$, et z doit avoir deux valeurs plus grandes que 1. L'une de ces valeurs de z est comprise entre 1 et 2, et l'autre entre 2 et 3. Arrivé à ce point, on n'a plus besoin de considérer les fonctions auxiliaires, et l'on peut continuer à développer les deux racines en fractions continues, comme il a été expliqué dans le n° 552.

Lorsqu'on a trouvé la valeur de chacune des deux racines à moins de 0,001, en calculant trois chiffres de plus par la méthode de Newton, on obtient les valeurs approchées 2,213128 et 3,229521.

Évaluation des fonctions symétriques des racines d'une équation.

559. On nomme *fonction symétrique* de plusieurs quantités, a, b, c, etc., toute expression composée de telle sorte qu'elle ne change pas lorsqu'on y échange entre elles ces quantités d'une manière quelconque; ainsi les coefficients d'une équation sont des fonctions symétriques des racines; de même

$$a^2 b^3 + b^2 a^3 + a^2 c^3 + c^2 a^3 + b^2 c^3 + c^2 b^3$$

est une fonction symétrique des trois quantités a, b, c.

On désigne abréviativement cette fonction par $S(a^2 b^3)$, la lettre S étant employée pour exprimer le mot somme.

Quand chaque terme de la fonction ne contient qu'une seule lettre, comme $a^p + b^p + c^p +$ etc., on emploie la notation plus simple S_p.

La fonction S_p est dite *fonction symétrique simple, ou du premier ordre.* $S(a^2 b^3)$ est *une fonction double, ou du deuxième ordre.* $S(a^m b^n c^p)$ est *une fonction triple, ou du troisième ordre,* etc.

Si l'on voulait former le développement de la fonction $S(a^m b^n c^p)$, il faudrait faire tous les arrangements trois à trois des lettres a, b, c, d, etc., qui devraient être contenues dans la fonction. On affecterait ensuite la première lettre de chaque arrangement de l'exposant m; la deuxième lettre, de l'exposant n; la troisième lettre, de l'exposant p.

Toutes les fonctions symétriques rationnelles qui ne sont pas comprises parmi celles que nous venons de définir, ne peuvent résulter que de la combinaison de deux ou de plusieurs de ces fonctions; c'est pourquoi celles-ci sont les seules dont on ait à s'occuper.

Lorsque les termes d'une fonction symétrique ont des coefficients autres que l'unité, il faut que leurs coefficients soient égaux; on a ainsi, par exemple, $S\left(\frac{2}{3}a^2 b^3\right) = \frac{2}{3}S\left(a^2 b^3\right)$.

560. *Les sommes des puissances semblables et entières des racines d'une équation peuvent être exprimées rationnellement au moyen des coefficients.*

Soient a, b, c, ..., k, les m racines de l'équation

$$(1) \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Le quotient de la division du premier membre de cette équation par $x - a$ est (n° 425)

$$\begin{array}{r|r|r} x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 & x^{m-3} \ldots + a^{m-1} \\ + A_1 & + A_1 a & + A_1 a^{m-2} \\ & + A_2 & + A_2 a^{m-3} \\ & & \ldots\ldots\ldots \\ & & + A_{m-1}. \end{array}$$

En remplaçant successivement a par b, par c, etc., on a les quotients de la division du même polynôme par les facteurs $x - b$, $x - c$, etc.; et si l'on fait la somme de ces m quotients, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{array}{r|r|r} mx^{m-1} + \quad S_1 & x^{m-2} + \quad S_2 & x^{m-3} \ldots + S_{m-1} \\ + m A_1 & + A_1 S_1 & + A_1 S_{m-2} \\ & + m A_2 & + A_2 S_{m-3} \\ & & \ldots\ldots\ldots \\ & & + m A_{m-1}. \end{array}$$

Cette somme doit être égale au polynôme dérivé du premier membre de l'équation proposée (n° 385), ou

$$mx^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} \ldots + A_{m-1}.$$

Il suit de là que les coefficients des mêmes puissances de x dans ces deux expressions sont égaux; ce qui fournit les $m - 1$ équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S_1 \quad + A_1 = 0, \\ S_2 \quad + A_1 S_1 + 2 A_2 = 0, \\ S_3 \quad + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3 A_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1} + A_1 S_{m-2} + A_2 S_{m-3} \ldots + (m-1) A_{m-1} = 0. \end{array} \right.$$

Pour obtenir les sommes S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, etc., on multiplie l'équation proposée par x^n; il vient

$$x^{m+n} + A_1 x^{m+n-1} + A_2 x^{m+n-2} \ldots + A_{m-1} x^{n+1} + A_m x^n = 0.$$

En remplaçant successivement x par chacune des racines a, b,

c, etc., et ajoutant tous les résultats, on a

$$(3)\ S_{m+n} + A_1 S_{m+n-1} + A_2 S_{m+n-2} \ldots + A_{m-1} S_{n+1} + A_m S_n = 0.$$

Si l'on fait successivement, dans cette dernière relation, $n = 0, 1, 2,$ etc., en remarquant que $S_0 = a^0 + b^0 + \ldots = m$, on obtient

$$(4)\ \begin{cases} S_m \quad + A_1 S_{m-1} + A_2 S_{m-2} \ldots + A_{m-1} S_1 + m A_m = 0, \\ S_{m+1} + A_1 S_m \quad + A_2 S_{m-1} \ldots + A_{m-1} S_2 + A_m S_1 = 0, \\ S_{m+2} + A_1 S_{m+1} + A_2 S_m \ldots + A_{m-1} S_3 + A_m S_2 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

En résolvant par ordre les équations (2) et (4), on trouvera successivement S_1, S_2, S_3, etc., et chacune de ces sommes sera déterminée au moyen des coefficients de l'équation et des sommes précédentes, par une équation du premier degré. On voit que S_2 dépend seulement des deux premiers coefficients A_1 et A_2; que S_3 dépend seulement des trois premiers coefficients A_1, A_2, A_3, etc.; et que la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ et les sommes des puissances supérieures dépendent de tous les coefficients.

Pour évaluer les sommes des puissances négatives des racines, on pourrait donner à n des valeurs négatives dans l'équation (3); mais il est plus simple de remplacer dans l'équation proposée x par $\frac{1}{y}$. On a ainsi une transformée dont les racines sont a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, etc. Donc les sommes des puissances semblables positives des racines de cette transformée, sont les sommes des puissances semblables négatives, S_{-1}, S_{-2}, etc., des racines de la proposée.

561. Au moyen des formules (2) et (4), lorsque l'on connaît les sommes S_1, S_2, S_3, etc., jusqu'à S_m, on peut trouver les coefficients A_1, A_2, A_3, ..., A_m.

562. *Toute fonction algébrique, rationnelle et symétrique, des racines d'une équation, peut être exprimée rationnellement par les coefficients de cette équation.*

Considérons la fonction $S(a^n b^p)$. Si l'on multiplie l'une par

l'autre les deux quantités

$$S_n = a^n + b^n + c^n + d^n + \ldots,$$
$$S_p = a^p + b^p + c^p + d^p + \ldots,$$

le produit contiendra deux sortes de termes : les uns seront de la forme a^{n+p}, et leur somme sera S_{n+p}; les autres seront de la forme $a^n b^p$, et leur somme sera la fonction $S(a^n b^p)$. Donc

$$S_n \times S_p = S_{n+p} + S(a^n b^p),$$

d'où

(5) $$S(a^n b^p) = S_n \times S_p - S_{n+p}.$$

Pour évaluer la fonction $S(a^n b^p c^q)$, concevons que l'on multiplie l'une par l'autre les deux quantités

$$S(a^n b^p) = a^n b^p + a^n c^p + a^n d^p + b^n a^p \ldots,$$
$$S_q = a^q + b^q + c^q + d^q \ldots.$$

Il y aura dans le produit trois sortes de termes : 1° des termes formés de deux lettres avec les exposants $n+q$ et p, et dont la somme sera $S(a^{n+q} b^p)$; 2° des termes formés de deux lettres avec les exposants $p+q$ et n, et dont la somme sera $S(a^{p+q} b^n)$; 3° enfin, des termes formés de trois lettres différentes, dont la somme sera $S(a^n b^p c^q)$. Donc

$$S(a^n b^p) \times S_q = S(a^{n+q} b^p) + S(a^{p+q} b^n) + S(a^n b^p c^q);$$

et, en remplaçant $S(a^n b^p)$, $S(a^{n+q} b^p)$, $S(a^{p+q} b^n)$ par leurs valeurs déduites de la formule (5),

(6) $$S(a^n b^p c^q) = S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q - S_{n+q} S_p - S_{p+q} S_n + 2S_{n+p+q}.$$

On évaluera de la même manière les fonctions symétriques dont les termes contiendront un plus grand nombre de lettres.

Lorsque quelques-uns des exposants deviennent égaux, les formules doivent être modifiées.

Soit $n = p$ dans la fonction $S(a^n b^p)$. Cette fonction est composée d'autant de termes que l'on peut faire d'arrangements deux à deux avec les m racines; et ces termes sont tous différents, quand les deux exposants sont différents; mais s'ils deviennent égaux, les termes sont rendus égaux deux à deux, de sorte que $S(a^n b^p)$ est alors égale à $2S(a^n b^n)$, et on a, d'a-

près la formule (5),

$$(7)\qquad S(a^n b^n) = \frac{1}{2}(S_n^2 - S_{2n}).$$

Pareillement, si $n = p$ dans la fonction $S(a^n b^p c^q)$, cette fonction deviendra $2S(a^n b^n c^q)$, et on conclura, par conséquent, de la formule (6),

$$(8)\qquad S(a^n b^n c^q) = \frac{1}{2}(S_n^2 S_q - S_{2n} S_q - 2S_{n+q} S_n + 2S_{2n+q}).$$

Si $n = p = q$, la fonction $S(a^n b^p c^q)$ sera $6S(a^n b^n c^n)$, et de là on conclut

$$(9)\qquad S(a^n b^n c^n) = \frac{1}{6}(S_n^3 - 3S_{2n}S_n + 2S_{3n}).$$

En général, lorsque α exposants deviennent égaux entre eux, la valeur de la fonction est égale à celle de la fonction générale du même ordre, divisée par le produit $2.3.4\ldots\alpha$.

Calcul de l'équation aux carrés des différences.

563. On a vu, dans le chapitre XIII, comment on change une équation en une autre dont les racines soient liées à celles de la première, chacune à chacune, par une condition déterminée. On peut également former des équations dont les racines soient des combinaisons déterminées des racines d'une équation donnée, considérées deux à deux, trois à trois, etc. Prenons pour exemple le cas où il s'agit d'obtenir une équation dont les racines soient les carrés des différences des racines d'une équation donnée. Soit l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots + A_m = 0.$$

Si l'on retranchait successivement chaque racine de toutes les autres, il en résulterait $m(m-1)$ différences qui seraient deux à deux égales en valeur absolue, avec des signes contraires. L'équation cherchée devra donc être du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, et si l'on désigne ce nombre par n, elle sera

$$z^n + B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} \ldots + B_n = 0.$$

Il s'agit d'obtenir les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Désignons par S_1, S_2, S_3, etc., les sommes des puissances semblables des m racines a, b, c, etc., de l'équation proposée, et par s_1, s_2, s_3, etc., les sommes des puissances semblables des n racines $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(b-c)^2$, etc., de l'équation aux carrés des différences. La question sera résolue si l'on parvient à obtenir s_1, s_2, s_3, etc., au moyen de S_1, S_2, S_3, etc.; car, les sommes S_1, S_2, S_3, etc., pouvant être exprimées par les coefficients connus A_1, A_2, A_3, etc. (n° 560), on connaîtra ainsi les sommes s_1, s_2, s_3, etc.; et, au moyen de ces sommes, on pourra évaluer les coefficients inconnus B_1, B_2, B_3, etc. (n° 561).

En développant les quantités $(x-a)^{2p}$, $(x-b)^{2p}$, etc., on obtient

$$(x-a)^{2p}+(x-b)^{2p}+(x-c)^{2p}+\ldots=$$
$$mx^{2p}-2pS_1x^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}S_2x^{2p-2}-\frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}S_3x^{2p-3}+\ldots.$$

Si l'on remplace successivement x, dans cette formule, par a, b, c, etc., en ajoutant toutes les égalités qui en résulteront et en écrivant s_p au lieu de $(a-b)^{2p}+(a-c)^{2p}+$ etc., on trouvera

$$2s_p=mS_{2p}-2pS_1S_{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}S_2S_{2p-2}-\ldots.$$

Les termes également éloignés de celui du milieu dans la valeur de $2s_p$ sont égaux, et leur signe est le même. En conséquence, si l'on désigne par K le terme du milieu, ou $\pm\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots p}S_p^2$, en réunissant les termes égaux, et en divisant par 2, on aura

$$(1)\quad s_p=mS_{2p}-2pS_1S_{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}S_2S_{2p-2}\ldots+\frac{1}{2}K.$$

Le terme K sera positif ou négatif, selon que p sera un nombre pair ou un nombre impair.

564. Pour faire bien apprécier l'ensemble des opérations, j'en donnerai un exemple en considérant l'équation

$$x^3+px+q=0.$$

L'équation aux carrés des différences sera

$$z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 = 0.$$

On trouve par les formules (2) et (4) du n° 560

$$(2)\qquad \begin{cases} B_1 = -s_1, \\ B_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2), \\ B_3 = \frac{1}{6}(3 s_1 s_2 - 2 s_3 - s_1^3). \end{cases}$$

Pour obtenir s_1, s_2, s_3, en fonction des sommes S_1, S_2, S_3, etc., on applique la formule (1) ci-dessus, qui donne

$$(3)\qquad \begin{cases} s_1 = 3 S_2 - S_1^2, \\ s_2 = 3 S_4 - 4 S_1 S_3 + 3 S_2^2, \\ s_3 = 3 S_6 - 6 S_1 S_5 + 15 S_2 S_4 - 10 S_3^2. \end{cases}$$

Il faut maintenant évaluer $S_1, S_2, \ldots, S_6$, au moyen des coefficients p et q de l'équation donnée. Pour cela, on fait dans les équations (2) et (4) du n° 560

$$A_1 = 0, \quad A_2 = p, \quad A_3 = q, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 0, \ldots;$$

il en résulte

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = -2p, \qquad S_3 = -3q,$$
$$S_4 = 2p^2, \quad S_5 = 5pq, \qquad S_6 = 3q^2 - 2p^3.$$

Ces valeurs de S_1, S_2, S_3, etc., substituées dans les relations (3), conduisent à

$$s_1 = -6p, \quad s_2 = 18p^2, \quad s_3 = 66p^3 - 81 q^2,$$

et la substitution des valeurs de s_1, s_2, s_3, dans les relations (2), donne enfin

$$B_1 = 6p, \quad B_2 = 9p^2, \quad B_3 = 4p^3 + 27 q^2.$$

Par conséquent, l'équation aux carrés des différences est

$$z^3 + 6pz^2 + 9p^2 z + 4p^3 + 27 q^2 = 0.$$

On peut toujours simplifier le calcul de l'équation aux carrés des différences, en faisant évanouir le second terme de l'équation proposée; car, puisqu'on diminue ainsi toutes les

racines d'une même quantité, leurs différences ne changent pas.

De l'élimination et du degré de l'équation finale.

565. Soient les deux équations à deux inconnues

$$(1)\qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

$$(2)\qquad x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} \ldots + B_{n-1} x + B_n = 0.$$

La première est du degré m, la seconde du degré n ; m n'est pas inférieur à n, et les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., B_1, B_2, B_3, etc., sont des fonctions entières de y.

Supposons qu'on ait résolu l'équation (1) par rapport à x, et soient a, b, c, etc., les m racines qui seront des fonctions de y. Si l'on fait successivement, dans l'équation (2), $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc., on obtiendra m équations qui ne contiendront que l'inconnue y, et qui seront

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a^n + B_1 a^{n-1} + B_2 a^{n-2} \ldots + B_{n-1} a + B_n = 0, \\ b^n + B_1 b^{n-1} + B_2 b^{n-2} \ldots + B_{n-1} b + B_n = 0, \\ c^n + B_1 c^{n-1} + B_2 c^{n-2} \ldots + B_{n-1} c + B_n = 0, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Si $x=\alpha, y=\beta$ est une solution du système des équations (1) et (2), il est clair que $y=\beta$ devra vérifier l'une des équations (3). D'un autre côté, toute valeur de y qui satisfait à l'une des équations (3), convient aux équations (1) et (2). Car, si β est une racine de la première équation, $a^n + B_1 a^{n-1} + \ldots = 0$, et si α est la valeur de x qui résulte de la substitution de β à la place de y dans a, les valeurs $y=\beta$, $x=\alpha$ satisferont à l'équation (2); elles satisferont aussi à l'équation (1), puisque celle-ci est vérifiée par $x=a$, quelle que soit y.

Il suit de là qu'en faisant le produit de toutes les équations (3), on aura l'*équation finale* en y. Or, les facteurs de ce produit restant les mêmes quand on échange entre elles, d'une manière quelconque, les racines a, b, c, etc., le produit sera une fonction symétrique de ces racines ; par conséquent il pourra être exprimé rationnellement par les coefficients A_1, A_2, A_3, etc., de l'équation (1).

Prenons pour exemple les deux équations suivantes :

$$(y-2)x^2-2x+5y-2=0,$$
$$yx^2-5x+4y=0.$$

Soient a et b les valeurs de x déterminées par la seconde, en les substituant dans la première, on a

$$(y-2)a^2-2a+5y-2=0,$$
$$(y-2)b^2-2b+5y-2=0;$$

et en faisant le produit de ces deux équations, on obtient

$$(y-2)a^2b^2-2(y-2)S(a^2b)+(y-2)(5y-2)S_2-2(5y-2)S_1$$
$$+4ab+(5y-2)^2=0.$$

Il faut évaluer les quantités ab, a^2b^2, S_1, S_2 et $S(a^2b)$. Or, a et b étant les deux racines de l'équation $yx^2-5x+4y=0$, on sait que

$$a+b=\frac{5}{y}, \quad \text{et} \quad ab=4, \quad \text{d'où} \quad a^2b^2=16.$$

On peut obtenir les valeurs des deux autres quantités S_2 et $S(a^2b)$ sans recourir aux formules générales; car

$$S_2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab, \quad S(a^2b)=a^2b+ab^2=ab(a+b);$$

par suite,

$$S_2=\frac{25-8y^2}{y^2}, \quad S(a^2b)=\frac{20}{y}.$$

Ces diverses valeurs donnent, après toute réduction, l'équation finale

$$y^4+12y^3+87y^2-200y+100=0.$$

566. *Le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues, est au plus égal au produit des degrés des deux équations.*

Le produit des premiers membres des m équations du système (3) (page 471), est une somme de termes tels que

$$B_h a^{n-h}\times B_k b^{n-k}\times B_l b^{n-l}\times\ldots, \text{ou } (B_h B_k B_l\ldots)(a^{n-h}b^{n-k}c^{n-l}\ldots);$$

et comme ce produit est une fonction symétrique des racines

a, b, c, etc., le coefficient $B_h B_k B_l \ldots$ multiplie une somme qui se compose de tous les termes de la fonction symétrique $S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$; il suffit donc de démontrer que le plus fort exposant de y dans le produit

$$(B_h B_k B_l \ldots) \times S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$$

ne surpasse pas mn. Or, l'équation (1) étant, par hypothèse, du degré m, et l'équation (2), du degré n; les coefficients A_1 et B_1 ne sont pas d'un degré en y supérieur au premier; A_2 et B_2 ne sont pas d'un degré supérieur au second; et de même des autres. Il suit d'abord de là que le produit $B_h B_k B_l \ldots$ n'est pas d'un degré supérieur à $h+k+l \ldots$. En outre, en se reportant aux équations qui donnent les valeurs de S_1, S_2, etc. (n° 560), on voit que S_1 ne peut être que du premier degré en y; S_2, du deuxième degré; et, en général, S_p, du degré p. Donc le produit $S_{n-h} \times S_{n-k} \times S_{n-l} \ldots$ est au plus d'un degré marqué par $n-h+n-k+n-l+$ etc. ou $mn-(h+k+l+\text{etc.})$. Par suite, d'après les formules qui donnent les valeurs des fonctions doubles, triples, etc. (n° 562), la fonction $S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$ est aussi, au plus, du même degré $mn-(h+k+l \ldots)$. Donc le plus fort exposant de y dans $(B_h B_k B_l \ldots) \times S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \ldots)$ n'est pas supérieur à $mn-(h+k+l \ldots)+(h+k+l \ldots)$ ou $m \times n$.

La démonstration qui vient d'être faite paraît s'appliquer seulement au cas où l'inconnue x, que l'on élimine, se trouve dans les équations avec des exposants égaux aux degrés m et n. Mais il n'y aurait rien de changé si les plus hautes puissances de x, au lieu d'avoir l'unité pour coefficient, avaient des coefficients quelconques, indépendants de y, A_0 et B_0. L'équation finale pour les équations générales avec ces coefficients serait donc au plus du degré mn. Or, pour en déduire l'équation finale relative à deux équations qui ne contiendraient pas les plus hautes puissances de x, il suffirait de rendre nuls un certain nombre de coefficients; ce qui ne pourrait pas élever le degré, et pourrait seulement l'abaisser. Le théorème est donc général.

La démonstration de ce théorème au moyen des fonctions symétriques, a été étendue par Poisson au cas de l'élimination

de $m-1$ inconnues entre m équations (*Journal de l'École Polytechnique*, XI[e] cahier).

Méthode de M. Cauchy, *pour l'évaluation des fonctions symétriques, rationnelles et entières, des racines d'une équation* (*).

567. Soit une équation

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0.$$

Soient $a, b, c, \ldots . i, k, l$ les racines, et V une fonction symétrique quelconque, rationnelle et entière, de ces racines.

Admettons qu'on ait éliminé de l'expression de V, par un moyen quelconque, toutes les racines, excepté a, et qu'il en soit résulté une valeur de cette fonction sous la forme d'un polynôme rationnel et entier par rapport à a. On aura ainsi

$$V = A_0 a^\mu + A_1 a^{\mu-1} \ldots + A_{\mu-1} a + A .$$

A_0, A_1, etc., étant des quantités composées rationnellement avec les coefficients de l'équation proposée.

Soit, en outre, en remplaçant x par a dans l'équation,

$$A = a^m + p_1 a^{m-1} + p_2 a^{m-2} \ldots + p_{m-1} a + p_m.$$

Si l'on divise le polynôme V par le polynôme A, le reste sera indépendant de a, et sera la valeur de la fonction V.

En effet, si Q et R désignent le quotient et le reste de la division de V par A, on aura $V = AQ + R$, et, comme A est nul,

$$V = R.$$

Le reste R est au plus du degré $m-1$ en a; représentons-le par

$$q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1}.$$

On aura donc aussi

$$V = q_0 a^{m-1} + q_1 a^{m-2} \ldots + q_{m-2} a + q_{m-1}.$$

(*) Cette méthode a été publiée par M. Cauchy dans ses anciens *Exercices de Mathématiques* (4[e] année).

Mais, puisque V est une fonction symétrique, on peut remplacer a par b, par c, etc.; et comme, par ces changements, q_0, q_1, etc., conservent leurs valeurs, il s'ensuit qu'en écrivant x au lieu de a, dans le second membre de la dernière équation ci-dessus, cette équation, du degré $m-1$, sera satisfaite par m valeurs différentes de x; ce qui est impossible, à moins que les coefficients des puissances de x ne soient tous nuls. Donc le reste R est q_{m-1}, et

$$V = q_{m-1}.$$

568. Cette démonstration suppose que les m racines sont inégales; mais les conclusions qui s'en déduisent subsistent encore quand l'équation $X = 0$ a des racines égales. Pour le prouver, il suffit de considérer, au lieu de l'équation $X = 0$ qui a des racines égales, une autre équation $U = 0$ dont toutes les racines soient inégales, et qu'on obtiendrait en faisant subir des modifications insensibles aux coefficients de X. Par exemple, si $X = 0$ a trois racines égales à a, et que toutes les autres racines soient différentes, on prendra

$$U = \frac{X(x-a-h)(x-a-h')}{(x-a)^2}.$$

Le polynôme U ne diffère de X qu'en ce que deux des trois racines égales à a sont remplacées par $a+h$ et $a+h'$; et l'on modifierait d'une manière semblable le polynôme X, si, outre les trois racines égales à a, l'équation proposée avait plusieurs racines égales à b, d'autres égales à c, etc. Cela posé, en substituant l'équation $U = 0$ à $X = 0$ et conservant les notations précédentes, on aura $V = q_{m-1}$; mais puisque cette égalité aura lieu quelque petites que soient les quantités h, h', etc., elle aura lieu aussi à la limite, quand on fera $h = 0$, $h' = 0$, etc.

569. Voici maintenant quelle est la méthode que M. Cauchy déduit de la proposition précédente, pour calculer la valeur de la fonction symétrique V.

Divisons X par $x-a$, et soit X_1 le quotient; divisons de même X_1 par $x-b$, et soit X_2 le quotient; divisons encore X_2 par $x-c$, et soit X_3 le quotient; continuons d'enlever

ainsi de X tous les facteurs du premier degré jusqu'à $x-k$; de sorte que X_{m-1} ne contiendra plus que le seul facteur $x-l$. Cela posé, considérons les m équations

$$X=0,\quad X_1=0,\quad X_2=0,\ldots,\quad X_{m-1}=0.$$

La première est la proposée, et elle a pour racines $a, b, c, \ldots, k, l$; la deuxième a pour racines $b, c, \ldots, k, l$, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière, au moyen de a et des coefficients de la proposée; la troisième a pour racines $c, \ldots, k, l$, et ses coefficients sont exprimés sous forme entière, au moyen de b et des coefficients de la précédente, c'est-à-dire par a, b et les coefficients de la proposée. En général, les coefficients de l'une quelconque de ces équations sont exprimés sous forme entière, par les coefficients de la proposée et les racines qui n'appartiennent pas à l'équation que l'on considère. Enfin, désignons par A la valeur de X pour $x=a$, par B la valeur de X_1 pour $x=b$, par C celle de X_2 pour $x=c$, et ainsi de suite : en sorte que I sera la valeur de X_{m-3} pour $x=i$, K celle de X_{m-2} pour $x=k$, et L celle de X_{m-1} pour $x=l$. On aura

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\ldots,\quad I=0,\quad K=0,\quad L=0.$$

Cela posé, V est une fonction symétrique, non-seulement des racines de l'équation $X=0$, mais aussi de celles de l'une quelconque des équations

$$X_1=0,\quad X_2=0,\ldots,\quad X_{m-1}=0.$$

Nous allons faire voir qu'en s'appuyant sur cette remarque, on peut, à l'aide du théorème fondamental qui a été démontré en premier lieu, éliminer successivement chaque racine de l'expression de V.

D'abord l'équation $L=0$, où l entre au premier degré, permet de chasser immédiatement l de l'expression de V. Considérant alors V comme une fonction symétrique des deux racines k et l de l'équation $X_{m-2}=0$, dont l'une est déjà éliminée, on l'ordonnera par rapport à k, et on la divisera par K; suivant ce qui a été dit ci-dessus (567), le reste de la division ne contiendra plus k et sera la valeur de la fonction V débar-

rassée des racines k et l. On considérera cette valeur de V comme une fonction symétrique des trois racines i, k, l de l'équation $X_{m-3} = o$, dont les deux dernières ont été éliminées; et après l'avoir ordonnée par rapport à i, on la divisera par I, afin d'éliminer i; le reste de la division ne contiendra pas i et sera la valeur de V débarrassée des trois racines i, k, l. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait éliminé de V chacune des racines $a, b, c, \ldots, i, k, l$; on aura alors la valeur de cette fonction exprimée par les coefficients de l'équation proposée.

570. L'expression définitive de V s'obtient par de simples divisions, et comme les premiers termes des polynômes A, B, C, ..., I, K, L, qui servent successivement de diviseurs, ont tous l'unité pour coefficient, ces divisions n'introduiront aucun dénominateur; par conséquent, si l'expression de V est entière non-seulement par rapport aux racines $a, b, c, \ldots, i, k, l$, qui y entrent symétriquement, mais encore par rapport aux coefficients p_1, p_2, p_3, etc., qui peuvent aussi y entrer, l'expression définitive de V sera aussi entière par rapport à ces coefficients; et enfin, si ces coefficients sont des nombres entiers, la valeur de V sera elle-même un nombre entier. Cette proposition, qu'on aurait peine à démontrer complétement au moyen de la méthode qui a été exposée dans les n[os] 560 et 562, se déduit immédiatement de celle de M. de Cauchy.

CHAPITRE DIX-HUITIÈME.

DE L'ABAISSEMENT DES ÉQUATIONS. DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES. RECHERCHE DES DIVISEURS DU SECOND DEGRÉ. ÉQUATIONS BINOMES ET TRINOMES. ÉQUATIONS IRRATIONNELLES. RÉSOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ. ÉVALUATION DES RACINES IMAGINAIRES.

De l'abaissement des équations.

571. Lorsque l'on connaît des relations particulières entre quelques-unes des racines d'une équation, on peut ramener la résolution de l'équation à celle d'une ou de plusieurs autres de degrés moindres; on dit alors que l'équation est susceptible d'*abaissement*. La décomposition d'une équation qui a des racines égales est un des principaux cas d'abaissement. Nous allons en examiner plusieurs autres.

572. Supposons que l'on sache que deux racines a et b d'une équation $f(x) = 0$ doivent vérifier la condition

$$(1) \qquad pa + qb = r,$$

p, q, r étant des quantités connues.

Puisque a et b sont des racines de l'équation $f(x) = 0$, on devra avoir $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Or, en substituant dans $f(b) = 0$ la valeur de b tirée de l'équation (1), on obtient $f\left(\frac{r-pa}{q}\right) = 0$. La quantité a doit donc vérifier à la fois les deux équations $f(x) = 0$ et $f\left(\frac{r-px}{q}\right) = 0$. Par conséquent, si l'on cherche le plus grand commun diviseur D des premiers membres de ces équations, l'équation $D = 0$ admettra la racine a.

Si l'équation $f(x) = 0$ a une racine a qui satisfasse à la condition $pa + qa = r$, ou $a = \frac{r}{p+q}$, cette racine vérifiera

aussi l'équation $f\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$; par conséquent elle sera donnée par l'équation $D=0$.

Réciproquement, toute racine a de l'équation $D=0$ sera une racine de l'équation proposée, par laquelle on en aura une autre b au moyen de la relation $pa+qb=r$, ou qui satisfera à la condition $pa+qa=r$; car cette racine vérifiera l'équation $f\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$, par conséquent $\frac{r-pa}{q}$ sera une racine de $f(x)=0$.

573. Si l'on a $p=q$, la relation (1) devient $a+b=s$, en posant, pour abréger, $\frac{r}{p}=s$. Il faut alors chercher le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x)$ et $f(s-x)$. Soit D ce plus grand commun diviseur. Les deux racines a et b entrant de la même manière dans la relation $a+b=s$, l'équation $D=0$ ne doit pas donner l'une d'elles plutôt que l'autre; elle doit donc les donner toutes deux. Cette équation doit donner, en outre, toutes les racines de l'équation proposée qui satisfont à la condition $a+a=s$, ou $a=\frac{1}{2}s$.

Si toutes les racines peuvent être groupées deux à deux, de manière que la somme des racines de chaque groupe soit égale à s, l'équation $f(s-x)=0$ sera la même que $f(x)=0$, et il faudra recourir à un autre procédé pour opérer l'abaissement. On pourra diminuer les racines de $\frac{1}{2}s$; la somme des racines de chaque groupe sera alors diminuée de s; il résultera de là que les racines de l'équation transformée seront égales deux à deux en valeur absolue, et de signes contraires; par conséquent cette équation sera réductible à un degré sous-double.

Si l'équation $f(x)=0$ est de degré impair et ne change pas quand on y remplace x par $s-x$, elle a au moins une racine égale à $\frac{1}{2}s$; et quand on a diminué toutes les racines de $\frac{1}{2}s$, la racine correspondante de la transformée est égale à zéro.

574. Quand on connaît le produit p de deux racines, en représentant l'une de ces racines par a, l'autre est $\frac{p}{a}$; et comme a ne désigne pas une des deux racines plutôt que l'autre, chacune d'elles doit vérifier l'équation $f\left(\frac{p}{x}\right)=0$. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur D des polynômes $f(x)$ et $f\left(\frac{p}{x}\right)$; l'équation $D=0$ devra admettre les deux racines a et $\frac{p}{a}$. Si la proposée $f(x)=0$ a des racines dont le carré soit égal à p, elles seront aussi comprises dans l'équation $D=0$; car, en supposant $a=\pm\sqrt{p}$, on a $\frac{p}{a}=\pm\sqrt{p}$. Mais, puisque p est une quantité connue, on peut supprimer toutes les racines de l'équation proposée égales à $\pm\sqrt{p}$. Alors l'équation $D=0$ ne donnera que des racines qui pourront être groupées deux à deux, de manière que le produit des racines de chaque groupe soit égal à p.

575. Lorsque chaque racine a est liée à une autre b de telle sorte que l'on ait $ab=p$, les équations $f(x)=0$ et $f\left(\frac{p}{x}\right)=0$ sont identiques, et l'abaissement ne peut plus être opéré de la même manière.

Dans ce cas, si l'on représente par z la somme de deux racines d'un même couple, le nombre des valeurs de z sera la moitié du nombre des racines; par conséquent ces valeurs dépendront d'une équation dont le degré sera sous-double de celui de la proposée.

z désignant la somme de deux racines dont le produit est p, le polynôme $f(x)$ devra être divisible par x^2-zx+p. On effectuera la division, et on exprimera que le reste du premier degré par rapport à x doit être nul indépendamment de la valeur de x. On obtiendra ainsi deux équations $M=0$, $N=0$; on calculera le plus grand commun diviseur D des polynômes M et N; l'équation cherchée sera $D=0$.

576. On peut former autrement l'équation en z. Considérons, par exemple, une équation du sixième degré,

$$(2)\qquad x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F=0.$$

Cherchons d'abord quelles sont les conditions nécessaires pour que les racines présentent le cas dont nous nous occupons. En remplaçant x par $\frac{p}{x}$, on obtient l'équation

$$(3)\qquad x^6+\frac{Ep}{F}x^5+\frac{Dp^2}{F}x^4+\frac{Cp^3}{F}x^3+\frac{Bp^4}{F}x^2+\frac{Ap^5}{F}x+\frac{p^6}{F}=0.$$

Pour que cette équation soit identique avec la première, il faut que l'on ait

$$A=\frac{Ep}{F},\quad B=\frac{Dp^2}{F},\quad C=\frac{Cp^3}{F},$$
$$D=\frac{Bp^4}{F},\quad E=\frac{Ap^5}{F},\quad F=\frac{p^6}{F}.$$

La dernière condition donne $F^2=p^6$, d'où $F=\pm p^3$; mais puisque les racines doivent se grouper deux à deux de manière que le produit des racines de chaque groupe soit égal à p, le produit de toutes les racines doit être égal à p^3; par conséquent on doit rejeter la condition $F=-p^3$. Les conditions ci-dessus se réduisent ainsi aux suivantes :

$$F=p^3,\quad E=Ap^2,\quad D=Bp;$$

de sorte que l'équation est

$$(4)\qquad x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Bpx^2+Ap^2x+p^3=0.$$

Si l'on considérait une équation d'un degré plus élevé, on obtiendrait des conditions analogues.

En divisant tous les termes de l'équation (4) par x^3, et réunissant les termes également éloignés des extrêmes, on a

$$(5)\qquad x^3+\frac{p^3}{x^3}+A\left(x^2+\frac{p^2}{x^2}\right)+B\left(x+\frac{p}{x}\right)+C=0.$$

Soit

$$(6)\qquad x+\frac{p}{x}=z;$$

on trouve, en élevant les deux membres au carré,

$$(7) \qquad x^2 + \frac{p^2}{x^2} = z^2 - 2p.$$

En multipliant $x^2 + \frac{p^2}{x^2}$ par $x + \frac{p}{x}$, on obtient

$$x^3 + \frac{p^2}{x} + px + \frac{p^3}{x^3}, \quad \text{ou} \quad x^3 + \frac{p^3}{x^3} + p\left(x + \frac{p}{x}\right);$$

donc

$$(8) \qquad x^3 + \frac{p^3}{x^3} = z^3 - 3pz.$$

En substituant dans l'équation (4) les valeurs des binômes $x + \frac{p}{x}$, $x^2 + \frac{p^2}{x^2}$, $x^3 + \frac{p^3}{x^3}$, on aura, pour déterminer z, une équation du troisième degré. Les valeurs de z étant connues, on obtiendra celles de x au moyen de l'équation (6), ou

$$x^2 - zx + p = 0.$$

577. Lorsqu'on rend les équations (2) et (3) identiques en adoptant la condition $F = -p^3$, les autres conditions sont $E = -Ap^2$, $D = -Bp$, et $C = -C$, d'où $C = 0$. D'après ces conditions, les racines de l'équation (2) sont telles qu'on les reproduit toutes en divisant successivement p par chacune d'elles; ainsi, à chaque racine a, il en correspond une autre $\frac{p}{a}$, à moins que l'on n'ait $a = \frac{p}{a}$, d'où $a = \pm\sqrt{p}$. Le produit de toutes les racines qui forment des groupes tels que a et $\frac{p}{a}$ est une puissance de p; donc, puisque le produit de toutes les racines est $-p^3$, il faut qu'une des racines soit égale à $-\sqrt{p}$; et, puisque le nombre des racines est pair, il faut qu'il y ait aussi une racine égale à $+\sqrt{p}$. S'il y a plusieurs racines égales à $-\sqrt{p}$, elles sont en nombre impair, et il en est de même des racines égales à $+\sqrt{p}$. On supprimera ces racines, et on obtiendra ensuite les autres de la même manière que dans le numéro précédent.

578. Considérons encore le cas où l'on connaît une rela-

tion entre trois racines, et supposons qu'elle soit exprimée par l'équation

$$(9) \qquad pa + qb + rc = s,$$

p, q, r, s étant des quantités connues. On devra joindre à cette relation les trois équations

$$(10) \qquad f(a) = 0, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 0.$$

En éliminant b et c entre les deux dernières équations et l'équation (9), on en obtiendra une qui ne contiendra que l'inconnue a, et qui devra être vérifiée en même temps que $f(a) = 0$; par conséquent ces deux équations admettront un commun diviseur D, au moyen duquel on trouvera la valeur de a. Si l'on a $p = q$, l'équation $D = 0$ devra donner les deux racines a et b; si l'on a $p = q = r$, l'équation $D = 0$ donnera les trois racines a, b, c. Si, outre les racines qui satisfont à l'équation (9), il y a une racine a qui soit liée à une autre b par la condition $pa + qb + rb = s$, ou qui satisfasse à la condition $pa + qa + ra = s$, elle sera aussi comprise dans l'équation $D = 0$; puisqu'elle fera partie d'un système de valeurs de a, b et c qui vérifiera l'équation (9) et les trois équations (10).

579. Supposons que la relation connue soit $a + c = 2b$. En cherchant une des trois racines a, b, c, par la méthode qui vient d'être indiquée, on trouvera aussi les racines qui satisferont à la condition $a + a = 2a$; et comme cette relation est une identité, on devra trouver toutes les racines; de sorte que l'équation $D = 0$ sera la même que $f(x) = 0$.

On parvient à la même conclusion par une autre considération, qui montre en même temps comment la méthode doit être modifiée, dans le cas qui nous occupe et dans les autres cas analogues. Supposons qu'on veuille trouver la racine b, qui est moyenne arithmétique entre deux autres. De la relation $a + c = 2b$ jointe à $f(c) = 0$, on conclut $f(2b - a) = 0$; il faut donc éliminer a entre $f(2b - a) = 0$ et $f(a) = 0$. Afin de reconnaître quelles seront les solutions de ces deux équations, exprimons-les par $f(2y - x) = 0$ et $f(x) = 0$; et concevons que l'on substitue successivement dans la pre-

mière, à la place de x, les racines a, b, c, etc., de la seconde. Par la substitution de a à la place de x, on aura l'équation $f(2y-a)=0$, et on satisfera à cette équation, en posant $2y-a=a$, $=b$, $=c$, etc.; donc

$$y=a,\quad =\frac{1}{2}(a+b),\quad =\frac{1}{2}(a+c)\ldots.$$

De même, en remplaçant x par b, on obtiendra

$$y=b,\quad =\frac{1}{2}(b+a),\quad =\frac{1}{2}(b+c)\ldots.$$

Il suit de là qu'en éliminant x entre les deux équations, on parviendra à une équation dont les racines seront toutes celles de la proposée, et les demi-sommes de ces racines prises deux à deux. Soit $F(y)=0$ cette équation; on pourra supprimer les racines égales à celles de la proposée, en divisant $F(y)$ par $f(y)$; il en résultera une équation qui ne comprendra plus que les demi-sommes des racines a, b, c, etc.; et, d'après la relation $b=\frac{1}{2}(a+c)$, cette équation aura une racine commune avec la proposée, qui sera la racine b.

Au lieu du système des deux équations

$$f(x)=0 \quad\text{et}\quad f(2y-x)=0,$$

on peut considérer le système équivalent

$$f(x)=0 \quad\text{et}\quad f(2y-x)-f(x)=0.$$

La dernière équation admet le facteur $y-x$; car le premier membre devient nul quand on suppose $y=x$. En supprimant le facteur $y-x$, avant de faire l'élimination, on supprimera les solutions du système $f(x)=0$, $y-x=0$, par lesquelles on a les valeurs de y égales aux racines de la proposée. En effectuant ensuite l'élimination, on obtiendra l'équation qui devra donner les demi-sommes des racines considérées deux à deux.

580. Ce que nous venons de dire par rapport à des relations exprimées par des équations du premier degré, s'applique à des relations quelconques; et les difficultés que l'on peut ren-

contrer dans les questions de cette nature, ne consistent que dans les éliminations qu'il faut effectuer.

« En général, dit Lacroix, l'abaissement a lieu lorsqu'on » obtient, entre les inconnues d'un problème possible, plus » d'équations qu'il ne renferme d'inconnues; ce à quoi on par» vient souvent en considérant le problème proposé sous plu» sieurs faces. On trouve alors entre une même inconnue deux » équations finales qui, devant s'accorder entre elles, ont un » diviseur commun, duquel on tire la solution la plus simple » dont le problème soit susceptible. »

581. Lorsque l'on veut déterminer des coefficients d'une équation de manière qu'elle admette des racines qui satisfassent à de certaines conditions; on déduit de ces conditions un système d'équations qui doivent être vérifiées simultanément; et on en conclut les relations qui doivent exister entre les coefficients, en éliminant toutes les autres inconnues.

Supposons, par exemple, que l'on ait à trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients d'une équation, pour qu'elle ait deux racines qui ne diffèrent que par leur signe. Soit l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Celle qui a les mêmes racines prises en signes contraires est

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0;$$

il faudra donc que cette équation et la précédente aient deux racines communes.

On peut substituer à ces deux équations celles qui s'en déduisent en les ajoutant et en les retranchant, ce qui donne

$$x^4 + qx^2 + s = 0, \quad px^3 + rx = 0.$$

La dernière équation est vérifiée par $x = 0$; mais cette solution ne remplit pas la condition proposée. On vérifie aussi cette équation par $x^2 = -\frac{r}{p}$; et en substituant cette valeur de x^2 dans l'autre équation, on obtient la condition cherchée

$$r^2 - pqr + p^2 s = 0.$$

582. Considérons aussi le cas où l'on veut exprimer qu'une équation $f(x)=0$ doit avoir une racine répétée n fois. Cette racine doit vérifier les équations

$$f'(x)=0,\quad f''(x)=0,\ldots,\quad f^{(n-1)}(x)=0;$$

de sorte qu'il faut que ces équations et la proposée aient une racine commune. Cette racine commune ne devant se trouver qu'une fois dans $f^{(n-1)}(x)$, on cherchera d'abord la condition nécessaire pour que les deux polynômes $f^{(n-2)}(x)$ et $f^{(n-1)}(x)$ aient un commun diviseur du premier degré; et il faudra que la valeur de x qui annulera ce commun diviseur, annule aussi tous les autres polynômes $f(x), f'(x)\ldots$, $f^{(n-3)}x$. On obtiendra ainsi $n-1$ conditions.

Supposons que l'équation proposée soit celle de l'exemple précédent, et qu'elle doive avoir une racine triple. En divisant $f'(x)$ par $f''(x)$, on aura un reste du premier degré; il faudra que la valeur de x pour laquelle ce reste sera zéro annule aussi $f''(x)$, puisque ce reste devra être diviseur de $f''(x)$. Si cette condition est remplie, la même valeur de x annulera aussi $f'(x)$, et il faudra de plus qu'elle annule $f(x)$.

Des équations réciproques.

583. On nomme équations *réciproques* celles dont on reproduit toutes les racines, quand on divise successivement l'unité par chacune d'elles. Ces équations sont comprises parmi celles dont les racines satisfont aux conditions que nous avons examinées dans les n^{os} 576 et 577; on a alors $p=1$. On conclut de là, par des calculs semblables à ceux du n° 576, que, pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux; ou qu'ils soient égaux en valeur absolue et de signes contraires, et que l'équation, dans ce cas, manque du terme du milieu. On trouve, de même, que, pour qu'une équation de degré impair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux, ou qu'ils soient égaux en valeur absolue et de signes contraires. On reconnaît, en outre, par un raisonnement

semblable à celui qui a été employé dans le n° 577, qu'une équation réciproque de degré impair a une racine égale à -1, quand les coefficients des termes équidistants des extrêmes ont les mêmes signes; à $+1$, quand ces coefficients ont des signes contraires; et lorsque l'équation est de degré pair, si les coefficients des termes équidistants des extrêmes ont des signes contraires, elle a les racines $+1$ et -1. On parvient d'ailleurs aux mêmes conclusions par l'inspection des équations. Quand on a supprimé les racines égales à ± 1, la détermination des autres racines dépend de la résolution de l'équation qu'on obtient en prenant pour inconnue la somme $x+\frac{1}{x}$ de deux racines réciproques, et en opérant de la même manière que dans le n° 576.

584. Les valeurs des binômes $x+\frac{p}{x}$, $x^2+\frac{p^2}{x^2}$, $x^3+\frac{p^3}{x^3}$, ..., peuvent se déduire les unes des autres au moyen d'une formule générale. On a par la multiplication

$$\left(x^n+\frac{p^n}{x^n}\right)\left(x+\frac{p}{x}\right)=x^{n+1}+\frac{p^n}{x^{n-1}}+px^{n-1}+\frac{p^{n+1}}{x^{n+1}}.$$

Donc

$$x^{n+1}+\frac{p^{n+1}}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{p^n}{x^n}\right)\left(x+\frac{p}{x}\right)-p\left(x^{n-1}+\frac{p^{n-1}}{x^{n-1}}\right).$$

Cette formule démontre qu'en posant $x+\frac{p}{x}=z$, on obtient pour le binôme $x^n+\frac{p^n}{x^n}$ une fonction de z du degré n.

Recherche des diviseurs du second degré.

585. Lorsqu'on veut trouver les diviseurs du second degré d'une équation, on effectue la division du premier membre par le trinôme x^2+px+q; cette opération conduit à un reste du premier degré $Px+Q$, P et Q désignant des quantités qui contiennent les coefficients inconnus p et q. La division devant se faire exactement, il faut que ce reste soit nul indépendamment de la valeur de x, ce qui exige qu'on ait $P=0$, $Q=0$. On obtient les diviseurs cherchés en pre-

nant pour p et q les couples de valeurs qui vérifient ces deux équations.

Le nombre des diviseurs du second degré étant $\frac{1}{2}m(m-1)$ (n° 429), si l'on élimine p ou q entre les deux équations $P=0$, $Q=0$, l'équation finale devra être du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$; et comme ce nombre est plus grand que m, toutes les fois que m surpasse 3, il s'ensuit que la détermination des diviseurs du second degré offrira généralement plus de difficulté que la résolution de l'équation proposée. Mais, s'il existe des couples de valeurs commensurables de p et de q qui satisfassent aux équations $P=0$, $Q=0$, il sera facile de les déterminer; on connaîtra par là tous les diviseurs commensurables du second degré de l'équation proposée, et la résolution de l'équation sera ramenée à celle d'une équation de degré moindre et de plusieurs équations de second degré.

586. Considérons l'équation

(1) $$x^3+ax+b=0.$$

En divisant le premier membre par x^2+px+q, on parvient au reste

$$(p^2-q+a)x+pq+b.$$

Il faut poser les deux équations

$$p^2-q+a=0,\quad pq+b=0.$$

En éliminant q entre ces deux équations, on obtient

(2) $$p^3+ap+b=0.$$

Celle-ci n'étant autre que l'équation (1), dans laquelle x est remplacé par p, les valeurs de p sont les racines de l'équation proposée.

On s'explique cette particularité comme il suit : si l'on représente les racines de l'équation (1) par α, 6, γ, les diviseurs cherchés sont

$$(x-\alpha)(x-6),\quad (x-\alpha)(x-\gamma),\quad (x-6)(x-\gamma);$$

les diverses valeurs de p sont donc

$$-(\alpha+6),\quad -(\alpha+\gamma),\quad -(6+\gamma);$$

mais, puisque le coefficient de x^2 dans l'équation proposée est zéro, on a

$$\alpha+\beta+\gamma=0,$$

d'où l'on conclut

$$-(\alpha+\beta)=\gamma,\quad -(\alpha+\gamma)=\beta,\quad -(\beta+\gamma)=\alpha.$$

587. Considérons encore l'équation

$$(3)\qquad x^4+ax^2+bx+c=0.$$

En divisant le premier membre par x^2+px+q, on parvient au reste

$$(b-ap+2pq-p^3)x+c-aq+q^2-p^2q.$$

Il faut donc poser les deux équations

$$(4)\quad p^3-2pq+ap-b=0,\qquad (5)\quad q^2-(a+p^2)q+c=0.$$

On conclut de la première

$$(6)\qquad q=\frac{p^3+ap-b}{2p};$$

et en substituant cette valeur de q dans la seconde équation, on obtient

$$(7)\qquad p^6+2ap^4+(a^2-4c)p^2-b^2=0.$$

Cette équation est du sixième degré; mais, comme elle ne contient que des puissances paires de l'inconnue p, on la ramènera à une équation du troisième degré, en posant $p^2=z$.

On pouvait prévoir cette réduction; car les six valeurs de p doivent être les sommes deux à deux des quatre racines de l'équation proposée; or, la somme de ces quatre racines étant nulle, la somme de deux quelconques d'entre elles est égale à la somme des deux autres prise en signe contraire; l'équation qui détermine p ne doit donc contenir que des puissances paires de l'inconnue.

Si l'on considérait l'équation complète

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

le coefficient p dépendrait d'une équation complète du sixième degré; mais cette équation serait susceptible d'abaissement. En effet, si l'on nomme α, β, γ, δ les quatre racines de l'équa-

tion proposée, on aura

$$\alpha + 6 + \gamma + \delta = -a;$$

il suit de là que les valeurs de p se groupent deux à deux de manière que la somme des racines de chaque groupe est égale à a; par conséquent, si l'on fait disparaître le second terme de l'équation en p, les autres puissances impaires de cette inconnue disparaîtront aussi (n° 573).

L'élimination de p entre les équations (4) et (5) conduirait également à une équation susceptible d'abaissement; car les valeurs de q sont $\alpha 6$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, 6γ, 6δ, $\gamma\delta$; or $\alpha 6\gamma\delta = c$; les valeurs de q se groupent donc deux à deux de manière que le produit des racines de chaque groupe est égal à c.

588. Le dernier terme de l'équation (7) étant négatif, cette équation a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative (n° **421**); et, pour chaque valeur réelle de p, on obtient une valeur réelle de q. Il est démontré par là, en dehors des théorèmes généraux sur les équations de degré quelconque, qu'un polynôme du quatrième degré dont les coefficients sont réels est décomposable en deux facteurs réels du second degré.

Quand on a $b = 0$, l'équation (4) devient

$$p^3 - 2pq + ap = 0;$$

on satisfait donc aux deux équations (4) et (5), en posant

$$p = 0, \quad q^2 - (a + p^2)q + c = 0,$$

ou

$$p^2 - 2q + a = 0, \quad q^2 - (a + p^2)q + c = 0.$$

Le premier système donne

$$q = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - c}.$$

Dans l'autre système, la première équation donne $q = \frac{a + p^2}{2}$, et la substitution de cette valeur dans la seconde équation conduit à

$$p^4 + 2ap^2 + a^2 - 4c = 0.$$

Lorsque l'on a $a^2 - 4c > 0$, la formule $q = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - c}$

détermine deux valeurs réelles de q. Quand on a, au contraire, $a^2 - 4c < 0$, ces valeurs sont imaginaires ; mais, dans ce cas, l'équation $p^4 + 2ap^2 + a^2 - 4c = 0$ détermine deux valeurs réelles de p, et pour chacune de ces valeurs on obtient une valeur réelle de q.

589. On peut se proposer de déterminer les facteurs du troisième degré d'une équation, ceux du quatrième degré, etc.; mais la recherche de ces diviseurs n'a pas d'utilité, et elle dépend de la résolution d'un système d'équations dans lequel le nombre des inconnues est égal au degré des diviseurs que l'on veut obtenir.

Des équations binômes et des équations trinômes réductibles au second degré.

590. Les équations binômes peuvent être ramenées à la forme

$$(1) \qquad x^m - A = 0.$$

Les racines de l'équation (1) sont les diverses valeurs algébriques de l'expression $\sqrt[m]{A}$; or, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de A, l'équation (1) admet m racines (nº **427**); de plus, toutes ces racines sont inégales, car il n'existe aucun facteur commun entre le binôme $x^m - A$ et sa fonction dérivée du premier ordre, qui est mx^{m-1}. Le radical $\sqrt[m]{A}$, considéré algébriquement, admet donc m valeurs différentes; ce qui est la proposition qui a été énoncée dans le nº **215**.

Soit a une des valeurs du radical $\sqrt[m]{A}$, c'est-à-dire une des racines de l'équation (1); on aura $a^m = A$; et si l'on pose $x = ay$, en substituant cette valeur de x dans l'équation et divisant chaque terme par a^m, il en résultera

$$(2) \qquad y^m - 1 = 0.$$

On obtiendra donc toutes les valeurs de $\sqrt[m]{A}$ en multipliant l'une d'elles par les m valeurs de $\sqrt[m]{1}$.

591. Supposons la quantité A réelle, et distinguons les deux cas de A positif et de A négatif, en considérant les deux

équations

(3) $\qquad x^m - A = 0, \qquad\qquad$ (4) $\qquad x^m + A = 0.$

Soit alors a la valeur arithmétique de $\sqrt[m]{A}$; en posant $x = ay$, on ramènera les équations (3) et (4) à celles-ci :

(5) $\qquad y^m - 1 = 0, \qquad\qquad$ (6) $\qquad y^m + 1 = 0.$

Les équations (5) et (6) sont réciproques, et on les résoudra au moyen de ce qui a été dit dans les n° 583.

Examinons successivement le cas où m est impair, et celui où m est pair.

L'équation $y^{2n+1} - 1 = 0$ a une racine égale à 1. Elle n'a pas d'autre racine réelle ; car elle ne peut être vérifiée par une valeur négative de y ; et si l'on donne à y une valeur positive différente de 1, y^{2n+1} ne sera pas égal à 1. En divisant le premier membre par $y - 1$, on obtient l'équation

(7) $\qquad y^{2n} + y^{2n-1} + y^{2n-2} \ldots + y^2 + y + 1 = 0.$

La résolution de cette équation dépendra de celle d'une équation de degré sous-double.

L'équation $y^{2n+1} + 1 = 0$ a la racine réelle -1 ; les autres racines sont imaginaires ; en divisant l'équation par le facteur $y + 1$, on aura une équation réciproque du degré $2n$. On peut aussi remarquer que les racines de $y^{2n+1} + 1 = 0$ sont celles de $y^{2n+1} - 1 = 0$, changées de signes.

L'équation $y^{2n} - 1 = 0$ a les deux racines réelles $+1$ et -1 ; les autres racines sont imaginaires. On pourrait diviser l'équation par $y^2 - 1$; on obtiendrait ainsi une équation réciproque du degré $2n - 2$, qui ne contiendrait que les puissances paires de y. Mais, de ce que

$$y^{2n} - 1 = (y^n - 1)(y^n + 1),$$

on aura toutes les racines de $y^{2n} - 1 = 0$ en résolvant séparément les deux équations

$$y^n - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y^n + 1 = 0.$$

L'équation $y^{2n} + 1 = 0$ n'a que des racines imaginaires ; on la réduira à une autre de degré sous-double en divisant par

y^n et faisant $y+\frac{1}{y}=z$. On peut aussi ramener la résolution de l'équation $y^{2n}+1=0$ à celle d'une équation binôme de degré impair, en suivant la marche qui a été indiquée dans les nos **212** et **213** (*).

592. Après la suppression des racines réelles de l'équation $y^m \mp 1=0$, la transformée en z qui résulte de la relation $y+\frac{1}{y}=z$, a toutes ses racines réelles. Pour le démontrer, représentons par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ une des valeurs imaginaires de y, l'inverse de cette valeur sera

$$\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha-\beta\sqrt{-1})}=\frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Mais $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ étant une racine de l'équation $y^m=\pm 1$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ est aussi une racine de cette équation ; de sorte

---

(*) Lorsque $m=2^k.n$, on peut faire dépendre la résolution de l'équation $y^m+1=0$ de celle d'une équation du degré n, sans avoir à extraire des racines carrées de quantités imaginaires. Considérons, par exemple, l'équation

$$y^{80}+1=0, \quad \text{ou} \quad y^{40}+\frac{1}{y^{40}}=0.$$

En faisant $y+\frac{1}{y}=z$, on a

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2.$$

Soit $z^2-2=v$, il en résultera

$$y^4+\frac{1}{y^4}=v^2-2.$$

Faisant de même $v^2-2=u$, on aura

$$y^8+\frac{1}{y^8}=u^2-2.$$

Faisant encore $u^2-2=t$, on conclura de la relation précédente, d'après les formules du no **584**,

$$y^{40}+\frac{1}{y^{40}}=t^5-5t^3+5t.$$

Il suit de là que l'on aura toutes les racines de l'équation proposée en résolvant successivement les cinq équations

$$t^5-5t^3+5t=0, \quad u^2-2=t, \quad v^2-2=u, \quad z^2-2=v, \quad y^2-zy+1=0.$$

Toutes les valeurs de z devant être réelles (no **592**), les valeurs de v, u et t seront aussi réelles.

qu'on a

$$(\alpha+6\sqrt{-1})^m=\pm 1,\quad (\alpha-6\sqrt{-1})^m=\pm 1,$$

d'où l'on conclut

$$[(\alpha+6\sqrt{-1})(\alpha-6\sqrt{-1})]^m=1,\quad \text{ou}\quad (\alpha^2+6^2)^m=1;$$

et puisque α^2+6^2 est une quantité positive, il faut que l'on ait $\alpha^2+6^2=1$. Donc

$$\frac{1}{\alpha+6\sqrt{-1}}=\alpha-6\sqrt{-1}.$$

Cette dernière égalité fait voir que toutes les valeurs de $y+\frac{1}{y}$ sont réelles.

593. Considérons les deux équations $y^m-1=0$ et $y^n-1=0$. Si l'on veut reconnaître dans quel cas elles ont des racines communes, autres que 1, il faudra chercher le plus grand commun diviseur des binômes y^m-1 et y^n-1. Or, en supposant $n<m$, et en effectuant la division de y^m-1 par y^n-1, on trouve les restes successifs $y^{m-n}-1$, $y^{m-2n}-1$, etc.; de sorte que, si $m=nq+r$ (r étant moindre que n), la division pourra être continuée jusqu'à ce que le reste soit y^r-1. De même, si $n=rq'+r'$, la division de y^n-1 par y^r-1 conduira au reste $y^{r'}-1$. Ainsi de suite. Donc, si s est le plus grand commun diviseur des exposants m et n, le dernier diviseur sera y^s-1, et le reste correspondant sera $y^0-1=0$. Dans ce cas, les deux équations auront s racines communes. Si m et n sont premiers entre eux, les deux équations n'auront pas d'autre racine commune que l'unité.

594. Désignons par α l'une des racines imaginaires de $y^m-1=0$. Toutes les puissances entières, positives ou négatives, de α, seront des racines de la même équation; car, puisque $\alpha^m=1$, si n est un nombre entier, positif ou négatif, en élevant à la puissance $n^{ième}$, on aura

$$(\alpha^m)^n=1,\quad \text{ou}\quad (\alpha^n)^m=1.$$

Les puissances de α ne peuvent pas donner plus de m ra-

cines différentes, et on obtiendra toutes ces racines en ne considérant que les puissances dont les exposants seront les nombres positifs de 1 à m. Car, de $\alpha^m = 1$ on conclut

$$\alpha^{m+1} = \alpha, \quad \alpha^{m+2} = \alpha^2, \ldots;$$

et pour les puissances négatives,

$$\alpha^{-1} = \alpha^m \times \alpha^{-1} = \alpha^{m-1}, \quad \alpha^{-2} = \alpha^m \times \alpha^{-2} = \alpha^{m-2}, \ldots.$$

Lorsque le nombre m est premier, les puissances de α dont les exposants sont les nombres de 1 à m sont toutes différentes. Car soit, s'il est possible, $\alpha^n = \alpha^{n'}$, n et n' étant moindres que m. On conclurait de cette égalité $\alpha^{n-n'} = 1$; donc α serait une racine commune aux deux équations

$$y^m - 1 = 0, \quad y^{n-n'} - 1 = 0.$$

Or cela est impossible, puisque, m étant premier, il est premier avec $n - n'$. Il suit de là que, *Lorsque* m *est un nombre premier, on obtient toutes les racines de* $y^m - 1 = 0$ *en formant les puissances de l'une quelconque d'entre elles, autre que l'unité, depuis la première puissance jusqu'à la* m^ième^; on peut d'ailleurs remplacer α^m par α^0.

Quand m n'est pas premier, cette propriété n'a plus lieu qu'en choisissant une racine α qui ne soit pas comprise parmi celles des équations dont les degrés sont les diviseurs de m.

595. Soit $m = pq$, p et q étant premiers entre eux; et soient 6 une racine de $y^p - 1 = 0$ et γ une racine de $y^q - 1 = 0$. On aura

$$6^p = 1, \quad \text{et} \quad \gamma^q = 1,$$

d'où

$$6^{pq} = 1 \quad \text{et} \quad \gamma^{pq} = 1;$$

donc 6 et γ seront des racines de $y^m - 1 = 0$. Le produit 6γ sera aussi une racine de la même équation; car on conclut des égalités précédentes $(6\gamma)^{pq} = 1$. La racine β ayant p valeurs et la racine γ en ayant q, le produit 6γ en a pq. Toutes ces valeurs sont différentes. En effet, supposons qu'en nommant $6'$ et γ' une racine de $y^p - 1 = 0$ différente de 6, et une racine de $y^q - 1 = 0$ différente de γ, on ait $\beta\gamma = 6'\gamma'$; il en résulterait $6^p \gamma^p = 6'^p \gamma'^p$, par suite $\gamma^p = \gamma'^p$, puisque $6^p = 6'^p$; donc

$\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^p = 1$. Or, $\gamma^q = \gamma'^q$, d'où $\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^q = 1$. Il faudrait donc que le rapport $\frac{\gamma}{\gamma'}$ fût une racine des équations $y^p - 1 = 0, y^q - 1 = 0$; et puisque p et q sont premiers entre eux, on devrait avoir $\gamma = \gamma'$ (n° 593); ce qui est contraire à l'hypothèse.

On conclut de là que, *Si* p *et* q *sont premiers entre eux, on obtiendra toutes les racines de* $y^{pq} - 1 = 0$ *en multipliant toutes celles de* $y^p - 1 = 0$ *par toutes celles de* $y^q - 1 = 0$.

596. Les méthodes qui viennent d'être exposées font connaître les expressions exactes des racines de l'équation $y^m \mp 1 = 0$, lorsque m est une puissance de 2, ou le produit de l'un des nombres 3, 5 et 15 par une puissance de 2. On peut exprimer, dans tous les cas, ces racines, au moyen des lignes trigonométriques; mais, pour cette théorie, nous renverrons aux *Leçons de Géométrie analytique* de M. Lefébure de Fourcy, ou aux *Traités de Trigonométrie*.

597. On donne particulièrement le nom d'équations trinômes aux équations qui peuvent être ramenées à cette forme :

$$x^{2m} + px^m + q = 0. \tag{8}$$

Si l'on pose $x^m = y$, il vient

$$y^2 + py + q = 0.$$

Soient α et 6 les deux valeurs de y; les valeurs de x dépendront des deux équations binômes

$$x^m = \alpha, \quad x^m = 6.$$

Quand les quantités α et β sont réelles, la résolution de ces équations se ramène à celle de l'équation $x^m = \pm 1$. Quand α et 6 sont imaginaires, on ne peut obtenir les expressions exactes des racines de l'équation (8) par les procédés algébriques, que dans les cas où le degré m est une puissance de 2.

Des équations irrationnelles.

598. Lorqu'on veut faire disparaître des radicaux contenus dans une équation, on égale chaque radical à une inconnue;

on obtient ainsi des équations qu'on peut immédiatement débarrasser des radicaux, en élevant les deux membres de chaque équation à la puissance marquée par l'indice du radical. Ces nouvelles équations, jointes à celles qu'on obtient en remplaçant dans l'équation primitive chaque radical par l'inconnue à laquelle on l'a égalé, forment un système d'équations rationnelles, au moyen duquel on parvient à l'équation cherchée, en éliminant toutes les inconnues auxiliaires.

Soit, par exemple, l'équation

$$\sqrt[3]{4x+7}+2\sqrt{x-4}=1;$$

on pose

$$\sqrt[3]{4x+7}=y,\quad \sqrt{x-4}=z,$$

ce qui donne

$$4x+7=y^3,\quad x-4=z^2.$$

Il faut éliminer y et z entre les deux dernières équations et

$$y+2z=1.$$

Celle-ci donne $y=1-2z$, et en substituant $1-2z$ à la place de y dans $4x+7=y^3$, il vient

$$4x+7=1-6z+12z^2-8z^3.$$

En éliminant z entre cette équation et $x-4=z^2$, on obtient

$$16x^3-184x^2+801x-1405=0.$$

On peut déduire directement la dernière équation de l'équation proposée. On conclut d'abord de celle-ci, en isolant le radical cubique,

$$\sqrt[3]{4x+7}=1-2\sqrt{x-4}.$$

En élevant les deux membres au cube, et transposant les termes, on obtient

$$(4x-13)\sqrt{x-4}=4x-27.$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré, on parvient à l'équation ci-dessus $16x^3-184x^2+\ldots=0$.

Cette équation admet une racine commensurable qui est 5. Les deux autres racines dépendent de l'équation $16x^2-104x+281=0$; elles sont imaginaires.

La racine réelle $x=5$ ne convient pas à l'équation proposée quand on considère seulement les valeurs arithmétiques des radicaux; mais elle vérifierait cette équation si l'on y changeait le signe du radical $\sqrt{x-4}$.

En général, lorsqu'on a fait disparaître les radicaux contenus dans une équation, l'équation rationnelle à laquelle on parvient doit donner toutes les valeurs de l'inconnue qui conviennent à l'équation proposée, et à toutes les équations qu'on peut en déduire en ayant égard aux différentes déterminations des radicaux; car, en égalant chaque radical à une inconnue, et en élevant ensuite les deux membres à la puissance marquée par le degré du radical, on obtient des équations qui restent les mêmes pour toutes les déterminations des radicaux.

Il peut arriver qu'aucune des racines de l'équation finale produite par l'élimination des inconnues auxiliaires ne satisfasse à l'équation donnée, en considérant seulement les valeurs arithmétiques des radicaux; dans ce cas, l'équation, envisagée de cette manière, est impossible.

599. Les procédés que nous venons d'exposer peuvent aussi servir à former une équation rationnelle qui admette pour racine une expression irrationnelle donnée. On parvient alors à une équation dont les racines sont les diverses valeurs que prend l'expression proposée, quand on a égard à toutes les déterminations de chacun des radicaux qui y sont contenus.

Supposons, par exemple, que l'on demande de former une équation délivrée de radicaux, qui admette pour racine l'expression

$$x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}.$$

On pourra poser

$$\sqrt[3]{a}=y,\quad \sqrt[3]{b}=z,$$

d'où

$$a=y^3,\quad b=z^3\quad \text{et}\quad x=y+z;$$

on obtiendra l'équation demandée par l'élimination de y et de z entre les trois dernières équations.

On peut aussi éviter, pour cet exemple, de recourir à des inconnues auxiliaires. On conclut de l'équation $x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$,

en élevant les deux membres au cube,

$$x^3 = a + 3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2} + b,$$

ce qui peut s'écrire ainsi

$$x^3 - a - b = 3\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}).$$

En remplaçant $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ par x, et en élevant ensuite les deux membres au cube, on obtient une équation du neuvième degré délivrée des radicaux.

On peut encore former l'équation cherchée d'après cette considération, que les racines de cette équation sont les diverses valeurs de l'expression $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, lorsque l'on combine de toutes les manières possibles les trois racines cubiques de a et les trois racines cubiques de b. Si l'on représente l'une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité par α, l'autre est α^2 (n° 213), et les combinaisons dont nous venons de parler fournissent neuf valeurs de x auxquelles correspondent les facteurs ci-après :

$$\begin{array}{lll}
x - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}, & x - \sqrt[3]{a} - \alpha\sqrt[3]{b}, & x - \sqrt[3]{a} - \alpha^2\sqrt[3]{b}, \\
x - \alpha\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}, & x - \alpha\sqrt[3]{a} - \alpha\sqrt[3]{b}, & x - \alpha\sqrt[3]{a} - \alpha^2\sqrt[3]{b}, \\
x - \alpha^2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}, & x - \alpha^2\sqrt[3]{a} - \alpha\sqrt[3]{b}, & x - \alpha^2\sqrt[3]{a} - \alpha^2\sqrt[3]{b}.
\end{array}$$

Pour former le produit de ces facteurs, on remarquera que l'on a $\alpha^3 = 1$, et $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, puisque 1, α et α^2 sont les trois racines de l'équation $y^3 - 1 = 0$. En faisant, après chaque multiplication partielle, les réductions qui pourront être effectuées en vertu de ces deux égalités, on obtiendra une équation du neuvième degré en x, qui ne contiendra aucun terme irrationnel.

Résolution générale de l'équation du quatrième degré.

600. Les calculs que nous avons développés dans le n° 587 conduisent à la résolution générale de l'équation du quatrième degré.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Si l'on fait $p^2 = z$, dans l'équation (7) du n° 587, il vient

$$(2) \qquad z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0.$$

Cette équation étant du troisième degré, on pourra obtenir les expressions générales de ses racines (n° 216). En les désignant par $4z'$, $4z''$, $4z'''$, les valeurs de p seront $\pm 2\sqrt{z'}$, $\pm 2\sqrt{z''}$, $\pm 2\sqrt{z'''}$. Mais les valeurs de p peuvent aussi être exprimées au moyen des quatre racines de l'équation (1) : et si l'on représente celles-ci par α, β, γ, δ, en observant que leur somme doit être nulle, on trouve, pour les six valeurs de p, $\pm(\alpha+\beta)$, $\pm(\alpha+\gamma)$, $\pm(\alpha+\delta)$. On a donc

$$\alpha+\beta = \pm 2\sqrt{z'}, \quad \alpha+\gamma = \pm 2\sqrt{z''}, \quad \alpha+\delta = \pm 2\sqrt{z'''}.$$

On déduit de là, en ayant toujours égard à la relation $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$,

$$(3) \qquad \alpha = \pm\sqrt{z'} \pm \sqrt{z''} \pm \sqrt{z'''}.$$

Comme α désigne l'une quelconque des quatre racines de l'équation (1), la formule (3) doit donner à la fois ces quatre racines. D'un autre côté, l'équation (2) ne renfermant que le carré de b, elle reste la même quand on considère, au lieu de l'équation (1), l'équation $x^4 + ax^2 - bx + c = 0$. La formule (3) doit donc donner aussi les racines de cette dernière équation. On voit, en effet, qu'en raison du double signe de chaque radical, l'expression de α admet huit déterminations. Pour exclure les racines de l'équation $x^4 + ax^2 - bx + c = 0$, on remarquera qu'en multipliant entre elles les trois quantités $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\alpha+\delta$, on obtient un produit qui se compose de la somme des produits trois à trois des racines α, β, γ, δ, augmentée de la quantité $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha^2\delta$; cette dernière quantité étant nulle, puisqu'elle revient à $\alpha^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, il en résulte que le produit $(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)$ est égal à la somme des produits trois à trois des racines α, β, γ, δ. Or cette somme est égale à $-b$; par conséquent, on ne doit admettre dans la formule (3) que les combinaisons des signes des radicaux qui satisfont à la condition que le produit de ces trois radicaux ait le signe contraire à celui de b.

Supposons que les déterminations des trois radicaux représentées par $+\sqrt{z'}$, $+\sqrt{z''}$ et $+\sqrt{z'''}$ soient telles que leur produit ait le même signe que b; alors les quatre racines de l'équation (1) seront exprimées comme il suit :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} +\sqrt{z'}+\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}, \\ +\sqrt{z'}-\sqrt{z''}+\sqrt{z'''}, \\ -\sqrt{z'}+\sqrt{z''}+\sqrt{z'''}, \\ -\sqrt{z'}-\sqrt{z''}-\sqrt{z'''}. \end{array}\right.$$

601. L'équation (2) a nécessairement une racine positive, puisque son dernier terme est négatif. Les deux autres racines doivent avoir le même signe; car le produit des trois racines est positif. Ces deux racines peuvent aussi être imaginaires.

La formule (3) montre que, lorsque les trois racines de l'équation (2) sont positives, l'équation (1) a toutes ses racines réelles. Réciproquement, l'équation (1) ne peut avoir toutes ses racines réelles à moins que l'équation (2) n'ait ses trois racines positives; car les racines de l'équation (2) sont les carrés des sommes deux à deux des racines de l'équation (1); or, si les racines de l'équation (1) sont toutes réelles, les sommes deux à deux de ces racines seront aussi réelles; par conséquent les carrés de ces sommes seront positifs.

Si les racines z', z'', z''' sont positives, le produit $(+\sqrt{z'})\times(+\sqrt{z''})\times(+\sqrt{z'''})$ sera positif; par conséquent, les expressions (4) conviendront seulement au cas où b sera positif. Si b est négatif, on devra changer dans ces expressions le signe de l'un des radicaux.

Supposons maintenant que les racines z'' et z''' soient négatives. Dans ce cas les radicaux $+\sqrt{z''}$ et $+\sqrt{z'''}$ peuvent être remplacés par $h\sqrt{-1}$ et $k\sqrt{-1}$, h et k désignant des quantités positives; le produit $(+\sqrt{z'})\times(+\sqrt{z''})\times(+\sqrt{z'''})$ devient donc $-hk\sqrt{z'}$; ainsi, pour que ce produit ait le même signe que b, il faut prendre pour $+\sqrt{z'}$ la détermination dont le signe est contraire à celui de b. De cette manière,

les quatre racines sont

$$+\sqrt{z'}+(h-k)\sqrt{-1},\quad +\sqrt{z'}-(h-k)\sqrt{-1},$$
$$-\sqrt{z'}+(h+k)\sqrt{-1},\quad -\sqrt{z'}-(h+k)\sqrt{-1}.$$

Ces quatre racines sont imaginaires, à moins que l'on n'ait $h=k$; alors les deux premières expressions se réduisent à la quantité réelle $\sqrt{z'}$.

Supposons enfin que les deux racines z'' et z''' soient imaginaires: on aura $z''=h+k\sqrt{-1}$, et $z'''=h-k\sqrt{-1}$. Les deux valeurs de $\sqrt{z''}$ pourront être exprimées par $\pm(m+n\sqrt{-1})$ (n° 209), et celles de $\sqrt{z'''}$ seront $\pm(m-n\sqrt{-1})$. Si l'on prend pour $+\sqrt{z''}$ et $+\sqrt{z'''}$ les deux expressions conjuguées $m+n\sqrt{-1}$ et $m-n\sqrt{-1}$, on aura $(+\sqrt{z''})\times(+\sqrt{z'''})=m^2+n^2$. Ainsi, pour que le produit $(+\sqrt{z'})\times(+\sqrt{z''})\times(+\sqrt{z'''})$ ait le même signe que b, il faudra prendre pour $+\sqrt{z'}$ la détermination dont le signe sera le même que celui de b. De cette manière les quatre racines seront

$$-\sqrt{z'}+2m,\quad -\sqrt{z'}-2m,\quad +\sqrt{z'}+2n\sqrt{-1},\quad +\sqrt{z'}-2n\sqrt{-1}.$$

Les deux premières sont réelles, les deux autres sont imaginaires.

L'équation (2) est appelée la *réduite* de l'équation (1).

Calcul des racines imaginaires.

602. Lorsque l'on veut trouver les racines imaginaires d'une équation $f(x)=0$, on représente ces racines par $y+z\sqrt{-1}$, y et z devant être des quantités réelles. En remplaçant x par $y+z\sqrt{-1}$, dans le polynôme $f(x)$, on a un résultat de la forme $P+Qz\sqrt{-1}$. Ce résultat devant être nul, il faut que l'on ait $P=0$ et $z=0$, ou $P=0$ et $Q=0$; mais, pour les racines imaginaires, y étant réelle, z ne peut être nulle. On obtiendra donc toutes les racines imaginaires en déterminant les couples de valeurs réelles de y et de z qui vérifieront les deux dernières équations.

On a

$$f(y+z\sqrt{-1})=f(y)+f'(y)z\sqrt{-1}-f''(y)\frac{z^2}{1.2}$$
$$-f'''(y)\frac{z^3}{1.2.3}\sqrt{-1}+f^{\text{IV}}(y)\frac{z^4}{1.2.3.4}\dots$$

Donc les équations $P=0$, $Q=0$, sont

$$(1)\qquad f(y)-f''(y)\frac{z^2}{1.2}+f^{\text{IV}}(y)\frac{z^4}{1.2.3.4}=0,$$

$$(2)\qquad f'(y)-f'''(y)\frac{z^2}{1.2.3}+f^{\text{V}}(y)\frac{z^4}{1.2.3.4.5}\dots=0.$$

On devra éliminer une des inconnues y et z entre ces deux équations, afin d'obtenir une ou plusieurs autres équations qui déterminent les valeurs de l'autre inconnue. Si l'on élimine y, les équations résultantes ne contiendront que des puissances paires de z, puisque z n'entre qu'à des puissances paires dans les deux équations.

603. Le système des équations (1) et (2) admet d'autres solutions que les couples de valeurs réelles de y et de z qui déterminent les racines imaginaires de l'équation proposée, et il est facile de voir comment ces solutions dépendent des racines de la proposée. En effet, les équations (1) et (2) expriment que $y+z\sqrt{-1}$ est une racine de l'équation $f(x)=0$, et que $y-z\sqrt{-1}$ est aussi une racine de la même équation. Or, si l'on représente par a et b deux racines quelconques de $f(x)=0$, et si l'on pose

$$y+z\sqrt{-1}=a,\qquad y-z\sqrt{-1}=b,$$

on en conclut

$$y=\frac{a+b}{2},\qquad z=\frac{a-b}{2\sqrt{-1}}.$$

Il suit de là que les valeurs de y seront les demi-sommes des racines de l'équation proposée combinées deux à deux; et, si l'on fait $z^2=u$, les valeurs de u seront les carrés des différences des racines, pris en signes contraires et divisés par 4. Si l'on a calculé l'équation aux carrés des différences, elle

tiendra lieu de celle que produirait l'élimination de y entre les équations (1) et (2). On devra alors calculer les racines négatives de l'équation aux carrés des différences, les prendre en signe contraire, les diviser par 4, et extraire les racines carrées des résultats. On obtiendra ainsi toutes les valeurs de z; on trouvera ensuite les valeurs correspondantes de y, en substituant chacune des valeurs de z dans les équations (1) et (2) et cherchant le plus grand commun diviseur des équations en y produites par la substitution. Il pourra d'ailleurs arriver que toutes les valeurs de z ne déterminent pas des valeurs réelles de y; car, lorsque l'équation proposée a des racines imaginaires non conjuguées, dont la partie réelle est la même, comme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha + \gamma\sqrt{-1}$, le carré de la différence de ces racines est une quantité négative; de sorte que l'équation aux carrés des différences peut avoir plus de racines négatives que la proposée n'a de couples de racines imaginaires.

Théorème de M. CAUCHY, *sur les racines imaginaires.*

604. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle et entière par rapport à z, du degré m, qui pourra contenir des coefficients imaginaires. Représentons par

$$\alpha_1 + 6_1\sqrt{-1},\qquad \alpha_2 + 6_2\sqrt{-1},\ldots,$$

les m racines de cette équation; ces racines pourront ne pas être toutes inégales; et s'il y a des racines réelles, elles seront comprises dans les mêmes expressions, en réduisant à zéro le coefficient de $\sqrt{-1}$. Soit aussi $U + V\sqrt{-1}$ ce que devient le polynôme $f(z)$ quand on y remplace z par $x + y\sqrt{-1}$, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f(z) = f(x+y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} \\ & = [x - \alpha_1 + (y - 6_1)\sqrt{-1}][x - \alpha_2 + (y - 6_2)\sqrt{-1}]\ldots \end{aligned}\right.$$

On peut mettre l'expression $x - \alpha + (y - 6)\sqrt{-1}$ sous cette autre forme

$$r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p).$$

On a alors

$$r = \left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos p = \frac{x-\alpha}{r}, \quad \sin p = \frac{y-\beta}{r}, \quad \operatorname{tang} p = \frac{y-\beta}{x-\alpha}.$$

En faisant de même

$$\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1} = \mathrm{R}\left(\cos \mathrm{P} + \sqrt{-1}\sin \mathrm{P}\right),$$

on a

$$\operatorname{tang} \mathrm{P} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}},$$

et l'égalité (1) se change dans la suivante,

$$\mathrm{R}\left(\cos \mathrm{P} + \sqrt{-1}\sin \mathrm{P}\right) =$$
$$r_1\left(\cos p_1 + \sqrt{-1}\sin p_1\right) \times r_2\left(\cos p_2 + \sqrt{-1}\sin p_2\right) \times \ldots;$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{P} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots.$$

605. Considérons les variables x et y comme les coordonnées d'un point indéterminé M d'un plan, et α et β comme celles d'un point fixe A dans le même plan. Les quantités r et p seront alors les coordonnées polaires du point M par rapport au point fixe A.

Lorsqu'un angle varie d'une manière continue, la tangente de cet angle peut changer de signe en devenant nulle, ou en devenant infinie; et chaque fois qu'elle change de signe en devenant nulle, elle passe du négatif au positif quand l'angle est croissant, et elle passe, au contraire, du positif au négatif, quand l'angle est décroissant. Soient p' et p'' deux angles quelconques déterminés; supposons $p'' > p'$, et soient $k\pi$ et $(k+n)\pi$ les multiples de π immédiatement inférieurs à p' et à p''. Les valeurs de l'angle p comprises entre p' et p'', pour lesquelles la tangente sera zéro, seront

$$(k+1)\pi, \quad (k+2)\pi, \ldots, \quad (k+n)\pi;$$

donc, si l'angle p est constamment croissant depuis p' jusqu'à p'', sa tangente passera n fois du négatif au positif en devenant nulle. Si l'angle p varie depuis p' jusqu'à p'' sans être constamment croissant, sa tangente, en devenant nulle,

pourra passer tantôt du négatif au positif, et tantôt du positif au négatif; mais l'excès du nombre de fois qu'elle passera du négatif au positif sur le nombre de fois qu'elle passera, au contraire, du positif au négatif, sera égal à n; car, si l'angle p, en variant depuis p' jusqu'à p'', prend plusieurs fois une des valeurs intermédiaires $(k+1)\pi$, $(k+2)\pi$, ..., $(k+n)\pi$; il la prendra alternativement en croissant et en décroissant, et il devra la prendre une fois de plus en croissant qu'en décroissant.

606. Supposons maintenant un contour fermé quelconque, qui soit tel qu'en aucun de ses points on n'ait à la fois $U = 0$ et $V = 0$. Si l'on construit des points A_1, A_2, etc., qui aient pour coordonnées les différents couples α_1 et β_1, α_2 et β_2, etc., aucun de ces points ne sera situé sur le contour; et, si le point dont les coordonnées sont x et y parcourt le contour entier, lorsqu'il sera revenu à sa position initiale, l'angle p_i correspondant au point A_i, et dont ce point sera le sommet, aura augmenté de 2π ou il aura repris sa valeur primitive, suivant que le point A_i sera situé dans l'intérieur ou à l'extérieur du contour. Donc, si n est le nombre des points intérieurs au contour, l'angle P aura augmenté de $2n\pi$; par conséquent l'excès du nombre de fois que la tangente de cet angle, ou le rapport $\frac{V}{U}$, aura passé du négatif au positif en devenant nul, sur le nombre de fois que ce rapport aura passé du positif au négatif en devenant nul, sera égal à $2n$; ou, en d'autres termes :

Si $f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1}$, *en supposant que l'on prenne successivement pour* x *et* y *les coordonnées de tous les points d'un contour fermé quelconque, tel qu'en aucun point de ce contour on n'ait à la fois* $U = 0$, $V = 0$, *et en calculant l'excès du nombre de fois que le rapport* $\frac{V}{U}$, *en devenant nul, passe du négatif au positif, sur le nombre de fois que ce rapport passe, en devenant nul, du positif au négatif, pendant que le point* x, y *parcourt le contour en avançant toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'il ait repris sa position initiale; si* Δ *est cet excès, le nombre des points*

dont les coordonnées $x = \alpha$, $y = 6$, *vérifient l'équation*

$$f(z) \quad \text{ou} \quad f(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

et qui sont situés dans l'intérieur du contour fermé, *est* $\frac{1}{2}\Delta$ (*).

607. Au moyen de ce théorème, on peut connaître le nombre des racines imaginaires de l'équation

$$f(z) \quad \text{ou} \quad f(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

dont la partie réelle est comprise entre deux limites données a et a', et le coefficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites b et b'. On considérera le contour formé par les quatre droites $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$; l'excès Δ pour ce contour entier sera évidemment égal à la somme des valeurs de cet excès calculées successivement par rapport à chacun des quatre côtés, en supposant que le point mobile avance toujours dans le même sens. Or on aura

$$\frac{V}{U} = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = \chi(x, y);$$

les valeurs de ce rapport pour les quatre côtés consécutifs seront $\chi(x, b)$, $\chi(a', y)$, $\chi(x, b')$, $\chi(a, y)$, et elles devront être considérées la première entre les limites $x = a$ et $x = a'$, la deuxième entre les limites $y = b$ et $y = b'$, la troisième entre les limites $x = a'$ et $x = a$, la quatrième entre les limites $y = b'$ et $y = b$.

608. Pour obtenir les parties de la valeur de Δ correspondantes à chacune de ces quatre fonctions, entre les limites indiquées, il faudra appliquer le théorème qui a été exposé

(*) M. Cauchy, en faisant connaître ce théorème remarquable, n'en avait pas donné une démonstration élémentaire; celle qui vient d'être exposée est de Sturm; elle a paru, en 1836, dans le *Journal* de M. Liouville (tome I, p. 290). M. Liouville et Sturm en ont donné d'autres qui se trouvent dans le même volume, et par lesquelles, sans avoir établi auparavant qu'une équation a toujours une racine, on prouve qu'une équation du degré m en a m. Sturm démontre aussi l'existence d'une racine par les considérations qui ont été employées dans la démonstration ci-dessus. A cet effet, il prouve que, lorsqu'il n'existe aucun point dans l'intérieur d'un contour fermé et sur ce contour même, pour lequel on ait $U = 0$ et $V = 0$, l'excès Δ pour ce contour est nul; et que, pour un contour circulaire d'un rayon suffisamment grand, qui a son centre à l'origine, l'excès Δ ne peut être nul, et il est égal à $2m$, m étant le degré de l'équation.

dans le nº 545. Si, au lieu d'avoir à considérer, comme on l'a supposé pour la démonstration de ce théorème, une expression fractionnaire dont le numérateur soit d'un degré supérieur à celui du dénominateur, on a, au contraire, une fraction $\frac{V}{V_1}$, dont le dénominateur V_1 ait un degré supérieur à celui du numérateur V, en nommant R le reste de la division de V_1 par V, on aura $V_1 = VQ + R$. D'après cette égalité, lorsque V est zéro, V_1 et R ont la même valeur; donc les rapports $\frac{V}{V_1}$ et $\frac{V}{R}$ passent en même temps, en devenant nuls, du négatif au positif ou du positif au négatif. On est ainsi ramené au cas qui a été examiné dans le nº 545.

On peut aussi prouver, par des considérations semblables à celles du nº 544, que le théorème du nº 545 ne cesse pas de subsister quand les deux termes de la fraction $\frac{V}{V_1}$ ont un facteur commun algébrique; pourvu que les deux nombres α et 6, qu'on doit substituer dans les fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_r$, soient différents de toutes les valeurs de x qui annulent le facteur commun.

609. Quand on prend un contour tel que l'équation $f(x+y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} = 0$ soit vérifiée par les coordonnées d'un de ses points, le théorème de M. Cauchy est soumis à des modifications pour lesquelles il faut avoir égard à la forme du contour. Mais, en considérant un contour rectangulaire, si le point correspondant à l'une des racines de l'équation est situé, par exemple, sur le côté $y = b$, les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x, b)}{\psi(x, b)}$, ou $\chi(x, b)$, ont un facteur commun qui est rendu nul par les valeurs de x correspondantes à $y = b$, ce qui fait connaître ces valeurs de x. On trouve les limites des autres racines en modifiant la valeur $y = b$.

610. Sturm a fait voir qu'on peut considérer, au lieu d'un contour fermé, une droite indéfinie, parallèle à l'un des axes des coordonnées. On détermine alors le nombre des racines auxquelles correspondent des points situés d'un même côté de cette droite.

Soit la droite $y = b$, parallèle à l'axe des x. On fera $y = b$

dans le rapport $\frac{U}{V}$; l'excès du nombre de fois que ce rapport passera en s'évanouissant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il passera en s'évanouissant du négatif au positif, pour les valeurs de x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, seral égal à l'excès du nombre des racines pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera plus grand que b, ou auxquelles correspondront des points situés au-dessus de la droite $y = b$, sur le nombre des racines pour lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera plus petit que b, et auxquelles correspondront des points situés au-dessous de la droite.

Pour une droite $x = a$, parallèle à l'axe des y, si le degré m de l'équation est pair, on fera $x = a$ dans le rapport $\frac{U}{V}$; l'excès du nombre de fois que ce rapport passera en s'évanouissant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il passera en s'évanouissant du négatif au positif, depuis $y = -\infty$ jusqu'à $y = +\infty$, sera égal à l'excès dn nombre des racines qui auront une partie réelle plus petite que a, sur le nombre des racines qui auront une partie réelle plus grande que a.

Si le degré m de l'équation est impair, on appliquera la même règle en prenant au lieu du rapport $\frac{U}{V}$ le rapport $-\frac{V}{U}$, dans lequel on fera $y = a$, et on fera ensuite croître y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Cette proposition se démontre de la même manière que celle qui est relative à un contour fermé; il faut seulement considérer pour les deux premières règles, au lieu de la tangente de l'angle P exprimée par le rapport $\frac{V}{U}$ et qui serait nulle aux deux limites, la cotangente de cet angle exprimée par le rapport inverse $\frac{U}{V}$, qui devient nulle toutes les fois que l'angle P devient égal à un multiple impair de l'arc $\frac{\pi}{2}$, et qui passe toujours en s'évanouissant, du positif au négatif quand l'angle P est croissant, et du négatif au positif quand l'angle P est décroissant.

aucun autre terme de ce produit; or le terme $abx^{\alpha+\beta}$ n'est pas divisible par P, puisque, d'après les suppositions, P ne divise ni a ni b. Il est donc impossible d'admettre que P divise AB et ne divise ni A ni B.

Troisième cas. A *contient* x, B *est numérique, et* P *contient* x.

Représentons par Q le quotient de AB par P, qui, par hypothèse, est une quantité entière, et nommons F, F′, F″, etc., les facteurs premiers du nombre B; on aura

$$AFF'F''\ldots = PQ.$$

Le premier membre de cette égalité étant divisible par F, le produit PQ doit l'être aussi; mais P est une quantité première qui contient x; donc elle n'est divisible par aucun nombre; donc Q est divisible par F, sans quoi le produit PQ ne pourrait pas être divisible par F (2e cas). Soit Q′ le quotient de Q par F, on aura

$$AF'F''\ldots = PQ'.$$

On prouvera de la même manière que Q′ doit être divisible par F′; et, en nommant Q″ le quotient, on aura

$$AF''\ldots = PQ''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que A, on arrivera à une égalité telle que

$$A = PQ_1;$$

et, comme Q_1 sera encore une quantité entière, on conclut de cette dernière égalité que P divise A.

Quatrième cas. A, B *et* P *contiennent* x.

Supposons que P ne divise pas A. Si le degré de P ne surpasse pas celui de A, effectuons la division de A par P, afin de parvenir à un reste de degré moindre que P. Le quotient pourra contenir des coefficients fractionnaires, mais il sera entier par rapport à x. Représentons par M le nombre par lequel il faudra multiplier ce quotient pour que tous les dénominateurs disparaissent, par Q le polynôme entier qui résultera de cette multiplication, et par A′ le polynôme qu'on obtiendra en multipliant aussi par M le reste de la division; il

est clair que Q et A′ seront le quotient et le reste qu'on trouverait si l'on divisait MA par P, de sorte que l'on aura

$$MA = PQ + A'.$$

A′ ne sera pas nul ; autrement le produit MA serait divisible par le polynôme premier P, ce qui est impossible (3e cas) ; de plus A′ sera une quantité entière, puisque MA et PQ sont des quantités entières.

En multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par B, et les divisant ensuite par P, il vient

$$M\frac{AB}{P} = BQ + \frac{A'B}{P}.$$

On conclut de cette dernière égalité que P, qui divise AB, doit diviser aussi A′B.

Supposons que A′ soit algébrique ; en divisant P par A′, on parviendra à un reste de degré moindre que A′, et en représentant par M′ le nombre par lequel il faudra multiplier le quotient pour que les dénominateurs disparaissent, par Q′ le polynôme entier qui résultera de cette multiplication, et par A″ le produit qu'on obtiendra en multipliant aussi par M′ le reste de la division, on aura

$$M'P = A'Q' + A''.$$

A″ ne sera pas nul ; car, si cela était, il faudrait que M′P fût divisible par chaque facteur premier algébrique de A′, ce qui est impossible ; de plus, A″ sera une quantité entière, puisque M′P et A′Q′ seront des quantités entières.

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par B, et les divisant ensuite par P, on aura

$$M'B = \frac{A'B}{P}Q' + \frac{A''B}{P}.$$

On conclut de celle-ci que P, qui divise A′B, doit diviser aussi A″B.

Si A″ est encore algébrique, on divisera P par A″ ; il en résultera une nouvelle égalité semblable aux précédentes, savoir :

$$M''P = A''Q'' + A'''; \quad \text{d'où} \quad M''B = \frac{A''B}{P}Q'' + \frac{A'''B}{P}.$$

La dernière égalité montre que P, qui divise $A''B$, doit diviser aussi $A'''B$.

En continuant ainsi, on parviendra nécessairement à un reste numérique A_1, puisque l'on ne saurait avoir un reste nul immédiatement après un reste fonction de x; et comme on voit par les raisonnements ci-dessus, que le produit $A_1 B$ devra encore être divisible par P, il s'ensuit que P doit diviser B (3ᵉ cas).

Si le degré de P surpassait celui de A, la démonstration se ferait de la même manière; seulement on diviserait d'abord P par A, au lieu de diviser A par P.

Si, au lieu de supposer que les quantités A, B et P ne contiennent pas plus d'une lettre, on suppose qu'il peut y avoir, dans ces quantités, deux lettres x et y, on aura encore quatre cas à examiner, savoir :

Lorsqu'un seul des facteurs A *et* B *contient la lettre* x, *et que* P *ne la contient point;*

Lorsque les deux facteurs A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *ne la contient point;*

Lorsqu'un seul des facteurs A *et* B *contient la lettre* x, *et que* P *la contient aussi;*

Enfin, lorsque les deux facteurs A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *la contient aussi.*

Les démonstrations sont semblables à celles qui viennent d'être exposées; la seule différence consiste en ce que les quantités qui, précédemment, étaient supposées numériques, peuvent être ici des quantités algébriques dépendantes de la lettre y.

De même que les cas où les quantités A, B, P ne renferment pas plus d'une seule lettre, servent à démontrer la proposition pour les cas où ces quantités peuvent contenir deux lettres, de même ceux-ci serviront à passer aux cas où ces quantités pourraient contenir trois lettres; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres. Le théorème général doit donc être regardé comme démontré.

613. Théorème II. — *Une quantité littérale ne peut pas être décomposée en facteurs premiers de plusieurs manières.*

Soit ABCD... un produit de facteurs premiers, et supposons qu'il soit égal à un autre produit *abcd*..., les facteurs *a*, *b*, *c*, *d*, etc., étant aussi premiers. Le facteur *a* divisant *abcd*..., il faudra qu'il divise aussi ABCD.... Or, si la quantité première *a* est différente de chacune des quantités premières A, B, C, D, etc., elle ne pourra diviser aucune d'elles; ne divisant ni A ni B, d'après le théorème précédent, elle ne divisera pas le produit AB; ne divisant ni AB ni C, elle ne divisera pas ABC; ainsi de suite. Il faut donc que le facteur *a* soit égal à l'un des facteurs A, B, C, D, etc. Supposons $a = A$. En divisant les deux produits par A, les produits restants BCD... et *bcd*... sont encore égaux, et, en leur appliquant le raisonnement précédent, on conclura que *b* doit être égal à l'un des facteurs du produit BCD...; ainsi de suite. Il faut donc que les deux produits ABCD... et *abcd*... soient composés des mêmes facteurs premiers ; ce qui démontre le théorème énoncé.

On doit remarquer que cette démonstration ne diffère pas de celle que nous avons donnée pour les nombres (nº 220).

Corollaire. — Au moyen du théorème ci-dessus, il est facile de prouver la proposition que nous avons admise dans les nºs 163 et 356 : que *la racine d'un degré quelconque d'une quantité entière ne peut être une quantité fractionnaire*. La démonstration est tout à fait semblable à celle qui a été donnée pour les nombres (nº 223).

Du plus grand commun diviseur des quantités algébriques entières.

614. On nomme *plus grand commun diviseur* de plusieurs quantités algébriques entières, le produit de tous les facteurs premiers, numériques ou littéraux, communs à ces quantités.

615. Il résulte de cette définition, que l'on obtiendra le plus grand commun diviseur de plusieurs monômes en cherchant le plus grand commun diviseur des coefficients numériques, et en écrivant à la suite de ce nombre chaque lettre commune à tous les monômes, avec le plus petit exposant dont elle est affectée.

616. Pour obtenir le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers M et N, on déterminera d'abord les facteurs monômes de chaque polynôme, en cherchant, comme il vient d'être dit, le plus grand commun diviseur des termes de chacun d'eux. Soit a le plus grand commun diviseur des termes de M, et b le plus grand commun diviseur des termes de N. En divisant M par a et N par b, on aura des quotients A et B. Les facteurs monômes communs à M et N devront être communs à a et b, et les facteurs polynômes communs à M et N devront être communs à A et B; par conséquent, le plus grand commun diviseur des polynômes M et N sera le produit de la multiplication du plus grand commun diviseur des polynômes A et B par celui des monômes a et b.

617. La question étant ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers A et B qui ne contiennent plus de facteurs monômes, supposons que ces polynômes soient ordonnés par rapport à une lettre x, et que le degré de B ne surpasse pas celui de A. Si B divisait exactement A, le polynôme B serait lui-même le plus grand commun diviseur; on est donc conduit à diviser A par B. Supposons que la division ne se fasse pas exactement; si l'on obtient un quotient entier Q, et un reste R d'un degré moindre que B par rapport à x, on aura l'égalité

$$A = BQ + R.$$

D'après cette égalité, tous les facteurs communs à A et à B doivent se trouver dans R, et tous les facteurs communs à B et à R doivent se trouver dans A; le plus grand commun diviseur de A et de B est donc le même que celui de B et de R.

Cette conclusion n'aurait plus lieu si le quotient Q contenait des dénominateurs. Or, dans le plus grand nombre de cas, on ne pourra pas effectuer la division de A par B jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste de degré moindre que A, sans que les multiplicateurs des puissances de x dans le quotient soient fractionnaires.

On évitera de mettre des fractions au quotient, si, chaque fois qu'il s'en présenterait, on multiplie le dividende par le coefficient de la plus haute puissance de x dans le diviseur, ou par

les facteurs premiers de ce coefficient qui ne se trouvent pas dans celui de la plus haute puissance de x du dividende; mais, pour que cette préparation n'altère pas le plus grand commun diviseur, il faudra que la quantité par laquelle on multipliera le dividende ne soit point un des facteurs du diviseur.

Quand les polynômes A et B ne contiennent qu'une seule lettre x, les coefficients des puissances de cette lettre dans chaque polynôme sont premiers entre eux; puisque, par hypothèse, on a supprimé, dans chacun des polynômes, tous les facteurs monômes. Il résulte de là que le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, qui est le produit des facteurs premiers communs à ces polynômes, ne changera pas, si l'on multiplie le dividende A par le coefficient du premier terme de B ou par un facteur quelconque de ce coefficient. De cette manière, la première division partielle pourra toujours s'effectuer sans fraction; et en recourant à une préparation semblable, chaque fois que, dans le cours de la division de A par B, on parviendra à un dividende partiel dans lequel le coefficient du premier terme ne sera pas exactement divisible par le coefficient du premier terme du diviseur, on pourra pousser les calculs jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste R de degré moindre que B. Il ne s'agira plus alors que de trouver le plus grand commun diviseur des polynômes B et R. A cet effet, on divisera B par R; en observant d'abord que, s'il y a dans R des facteurs monômes, on pourra les supprimer, puisqu'il n'en existe plus de tels dans B. En continuant ces opérations, comme les degrés des restes iront toujours en diminuant, on parviendra nécessairement à un reste indépendant de x. Quand ce reste sera zéro, le reste précédent sera le plus grand commun diviseur des polynômes A et B. Quand le dernier reste ne sera pas nul, les polynômes A et B n'auront aucun diviseur commun; car tout diviseur commun à ces polynômes devrait diviser le dernier reste, par conséquent il ne pourrait être qu'une quantité indépendante de x, c'est-à-dire un nombre, et par hypothèse, A et B n'ont plus de facteurs numériques.

Voici un exemple de ces opérations :

$$A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8,$$
$$B = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6.$$

Première division.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5 \quad -10x^3 \quad +15x+8 & x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6 \\
\cline{2-2}
-3x^5+6x^4+18x^3-12x^2-39x-18 & 3 \\
\cline{1-1}
+6x^4+8x^3-12x^2-24x-10 & \\
3x^4+4x^3-6x^2-12x-5. &
\end{array}
$$

Avant de passer à la seconde division, on supprime, dans le reste de la première, le facteur 2, et l'on multiplie le polynôme B par 3.

Deuxième division.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5-6x^4-18x^3+12x^2+39x+18 & 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 \\
\cline{2-2}
-3x^5-4x^4+6x^3+12x^2+5x & x,\ -5 \\
\cline{1-1}
-10x^4-12x^3+24x^2+44x+18 & \\
-5x^4-6x^3+12x^2+22x+9 & \\
-15x^4-18x^3+36x^2+66x+27 & \\
+15x^4+20x^3-30x^2-60x-25 & \\
\cline{1-1}
+2x^3+6x^2+6x+2 & \\
x^3+3x^2+3x+1. &
\end{array}
$$

On a divisé le premier reste de cette deuxième division par 2; on a multiplié le résultat par 3, afin d'obtenir un quotient entier; et on a supprimé, dans le second reste, le facteur 2.

Troisième division.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 & x^3+3x^2+3x+1 \\
\cline{2-2}
-3x^4-9x^3-9x^2-3x & 3x-5 \\
\cline{1-1}
-5x^3-15x^2-15x-5 & \\
+5x^3+15x^2+15x+5 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Le plus grand commun diviseur est x^3+3x^2+3x+1.

618. Avant de passer aux cas où les polynômes contiennent plusieurs lettres, il faut montrer comment on peut trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités, quand on sait trouver celui de deux quantités.

Supposons que l'on demande le plus grand commun diviseur de quatre quantités A, B, C, D. Soient d le plus grand com-

mun diviseur de A et de B, d' celui de d et de C, et d'' celui de d' et de D. Le plus grand commun diviseur des quatre quantités A, B, C, D, sera d''. Car d contenant tous les facteurs premiers communs à A et à B, et d' contenant tous les facteurs communs à d et à C, d' est le produit des facteurs premiers communs à A, B et C; et puisque d'' contient tous les facteurs premiers communs à d' et à D, il est le produit de tous les facteurs premiers communs aux quatre quantités A, B, C, D.

619. Considérons actuellement deux polynômes M et N qui contiennent deux lettres x et y; et supposons, conformément à ce qui a été dit dans le n° 616, qu'ils aient été d'abord débarrassés de leurs facteurs monômes. Si l'on ordonne ces polynômes par rapport aux puissances décroissantes d'une des deux lettres, x par exemple, les coefficients de cette lettre pourront être des polynômes, mais ils ne contiendront que la seule lettre y; et tout diviseur indépendant de x de l'un des polynômes M et N devra nécessairement diviser les coefficients de toutes les puissances de x dans ce polynôme (n° 48).

Nommons a le plus grand commun diviseur des coefficients des diverses puissances de x dans M, et b celui des coefficients des puissances de x dans N. En divisant M par a, et N par b, on obtiendra des quotients entiers A et B, et le plus grand commun diviseur demandé sera égal au plus grand commun diviseur des quantités a et b multiplié par celui des polynômes A et B. Or on pourra appliquer aux polynômes A et B tout ce que nous avons dit relativement à deux polynômes qui ne contiennent qu'une seule lettre; seulement les observations qui se rapportaient aux coefficients numériques et aux facteurs numériques que l'on devait introduire dans les dividendes, ou supprimer dans les restes successifs, s'appliqueront à des facteurs algébriques qui pourront être des polynômes en y.

620. De même qu'on passe du cas où les polynômes ne contiennent qu'une lettre, à celui où ils en contiennent deux, de même on s'élèvera, de ce second cas, à celui des polynômes qui renferment trois lettres; et ainsi de suite. Par conséquent, on pourra toujours déterminer le plus grand commun diviseur

de plusieurs polynômes renfermant un nombre quelconque de lettres.

Sur la forme générale des équations à deux inconnues. — Observations préliminaires sur la résolution du système de deux équations entre deux inconnues.

621. Lorsqu'une équation algébrique entre deux inconnues a été ramenée à ne contenir que des termes rationnels et entiers par rapport à ces inconnues, si on l'ordonne suivant les puissances de l'une d'elles, elle se présente sous cette forme :

$$(1) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Hx + K = 0.$$

Pour que le degré de l'équation ne surpasse pas m, il faut que le coefficient A soit indépendant de y; que B ne contienne aucune puissance de y supérieure à la première ; que C ne contienne aucune puissance de y supérieure à la seconde ; ainsi de suite, jusqu'au dernier coefficient K, qui devra ne contenir aucune puissance de y dont l'exposant soit supérieur à m. Il suit de là que l'on aura tous les termes que l'équation pourra contenir, en supposant

$$\begin{aligned} B &= b_0 + b_1 y, \\ C &= c_0 + c_1 y + c_2 y^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K &= k_0 + k_1 y + k_2 y^2 \ldots + k_m y^m. \end{aligned}$$

Si l'on prend $m = 2$, ces conditions donneront l'équation générale du second degré

$$Ax^2 + (b_0 + b_1 y)x + c_0 + c_1 y + c_2 y^2 = 0.$$

Comme une équation n'est pas altérée quand on divise tous les termes par un même nombre, on peut toujours faire en sorte que le coefficient de l'un des termes soit l'unité. Mais, pour une équation générale, il faut laisser à chaque terme un coefficient indéterminé. Car, si l'on supposait, par exemple, $A = 1$, la dernière équation ci-dessus ne comprendrait pas les équations du second degré qui seraient privées de la seconde puissance de x.

622. Lorsque l'on a à résoudre un système de deux équations à deux inconnues x et y, si l'une d'elles est du premier degré par rapport à une des inconnues x, il faut tirer de cette équation la valeur de x exprimée en fonction de y; la substitution de cette valeur dans l'autre équation en fournit une qui ne contient plus que y. On en déduit les valeurs de cette inconnue, et en les mettant successivement dans la valeur de x exprimée en fonction de y, on obtient les valeurs correspondantes de x.

Ce procédé peut encore être appliqué lorsque l'une des équations n'est que du second degré par rapport à x. On conclut de cette équation deux valeurs de x qui peuvent être représentées par $p+\sqrt{q}$ et $p-\sqrt{q}$, p et q désignant des fonctions rationnelles de y. En substituant successivement chacune de ces valeurs à la place de x dans l'autre équation, on obtient deux équations en y; la résolution de ces deux équations donne toutes les valeurs de y qui conviennent au système proposé.

L'équation qui résulte de la substitution de $p+\sqrt{q}$ à la place de x, dans la seconde équation du système proposé, est de la forme

$$(3) \qquad \mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{q}=0,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de y.

L'équation qui résulte de la substitution de $p-\sqrt{q}$ ne diffère de la précédente que par le signe de la partie irrationnelle, de sorte qu'elle est

$$(4) \qquad \mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{q}=0.$$

En multipliant ces équations membre à membre, on obtient une équation délivrée de radicaux,

$$(\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{q})(\mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{q})=0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}^2-\mathrm{Q}^2q=0.$$

Pour avoir toutes les valeurs de y qui vérifient les deux premières équations, il suffit de résoudre la troisième. Cette dernière équation peut d'ailleurs se déduire immédiatement de l'une ou de l'autre des équations (3) et (4) ; car, si dans chacune de ces équations on fait passer la partie irrationnelle dans

le second membre, en élevant ensuite les deux membres au carré, on a

$$P^2 = Q^2 q, \quad \text{d'où} \quad P^2 - Q^2 q = 0.$$

Quand on connaît les valeurs de y, on obtient les valeurs de x au moyen d'un principe qui sera exposé ci-après.

623. Lorsque les premiers membres des équations proposées peuvent être décomposés en facteurs rationnels par rapport aux inconnues, la résolution du système des deux équations se ramène à la résolution de plusieurs systèmes plus simples. Représentons, par exemple, les deux équations par $M = 0$, $N = 0$, et supposons que l'on ait $M = UU'U''$, $N = VV'$, en désignant par U, U', U'', V, V', des facteurs rationnels par rapport aux inconnues x et y. Il est clair qu'on obtiendra toutes les solutions du système $M = 0$, $N = 0$, en cherchant celles des différents systèmes,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} U=0 & U=0 & U'=0 & U'=0 & U''=0 & U''=0 \\ V=0 & V'=0 & V=0 & V'=0 & V=0 & V'=0. \end{array}$$

Les facteurs qui ne dépendent que d'une seule inconnue sont déterminés par la recherche du plus grand commun diviseur entre les coefficients de toutes les puissances de l'autre inconnue. On pourra effectuer cette recherche pour chacun des polynômes M et N, en les ordonnant par rapport à x; on obtiendra ainsi les facteurs qui ne contiendront que y. On divisera les deux polynômes par ces facteurs, et on ordonnera les quotients par rapport à y, pour trouver les facteurs qui ne contiendront que x.

Si les premiers membres des deux équations ont un facteur commun, le système proposé est vérifié par tous les couples de valeurs des inconnues qui réduisent ce facteur à zéro, ce qui fournit un nombre illimité de solutions. Quand le facteur commun ne dépend que d'une seule des inconnues, il détermine un nombre limité de valeurs de cette inconnue, auxquelles on peut joindre des valeurs quelconques de l'autre. Quand ce facteur est dépendant à la fois de x et de y, il en résulte une équation dans laquelle une des inconnues peut recevoir des valeurs arbitraires qui déterminent celles de l'autre.

Méthode générale pour la résolution de deux équations numériques à deux inconnues.

624. Soit $x = \alpha$, $y = \beta$, une solution commune à deux équations entre les deux inconnues x et y. Si, au lieu de substituer simultanément α à la place de x, et β à la place de y, on substitue seulement β à la place de y, il en résultera deux équations qui ne contiendront plus que l'inconnue x, et qui devront être vérifiées par la valeur $x = \alpha$; or, pour cela, il sera nécessaire et il suffira que les premiers membres aient un commun diviseur contenant le facteur $x - \alpha$. Ainsi :

Deux équations à deux inconnues étant données, pour qu'une valeur attribuée à l'une des inconnues y *convienne à ces équations, il faut que, si l'on substitue cette valeur dans les équations, les premiers membres acquièrent, par cette substitution, un commun diviseur fonction de l'autre inconnue* x. *Réciproquement, si, après la substitution d'une valeur de* y, *les premiers membres des deux équations ont un commun diviseur fonction de* x, *cette valeur de* y *convient aux équations; et en égalant le commun diviseur à zéro, on obtient une équation dont les racines sont les valeurs correspondantes de l'autre inconnue* x.

625. Cette proposition donne lieu de penser qu'on pourra trouver les solutions communes de deux équations, en appliquant aux premiers membres les mêmes calculs que si l'on voulait obtenir leur plus grand commun diviseur.

Représentons les deux équations par $A = 0$, $B = 0$. Supposons que le degré de B, par rapport à x, ne surpasse pas celui de A. Soit Q le quotient de la division de A par B, en continuant l'opération jusqu'à ce que l'on ait un reste de degré moindre que B par rapport à x; nommons R ce reste, et considérons d'abord le cas où la division peut être effectuée sans que le quotient contienne des dénominateurs en y, et sans qu'on soit forcé de recourir à aucune préparation pour que cette condition soit remplie. On aura

$$A = BQ + R.$$

D'après cette égalité, toutes les valeurs des inconnues qui donneront $A = 0$, $B = 0$, devront donner aussi $R = 0$, puisque le quotient Q ne peut pas devenir infini pour des valeurs finies de x et de y. Par la même raison, toutes les valeurs qui donneront $B = 0$ et $R = 0$ donneront aussi $A = 0$. On pourra donc remplacer le système des équations $A = 0$, $B = 0$, par le système $B = 0$, $R = 0$, lequel est plus simple que le précédent, en ce que R est d'un degré moins élevé que B par rapport à x.

La même conclusion n'aurait plus lieu si le quotient Q contenait des dénominateurs en y, car alors il pourrait se faire que A et B étant réduits à zéro, Q devînt infini; dans ce cas le terme $B \times Q$ pourrait avoir une valeur différente de zéro; par conséquent, R pourrait ne pas être nul.

Supposons que, pour effectuer la division de A par B sans que y entre en dénominateur dans le quotient, il soit nécessaire de multiplier d'abord le polynôme A par un facteur contenant y. Nommons c ce facteur, et représentons encore par Q le quotient qu'on obtiendra après cette préparation, et par R le reste, on aura

$$cA = BQ + R.$$

Cette égalité prouve que les solutions des équations $B = 0$, $R = 0$, sont les mêmes que celles des équations $cA = 0$, $B = 0$. Or ce dernier système est vérifié lorsqu'on a en même temps $A = 0$ et $B = 0$, ou $c = 0$ et $B = 0$. Quand les solutions de chacun de ces deux systèmes diffèrent toutes de celles de l'autre système, elles doivent être toutes données par les équations $B = 0$, $R = 0$. Quand les deux systèmes ont des solutions communes, on ne peut plus affirmer qu'il en sera de même, parce qu'il faudrait pouvoir juger si les solutions communes seront données plusieurs fois par les équations $B = 0$, $R = 0$. Mais, dans tous les cas, si l'on calcule toutes les solutions distinctes du dernier système, et si l'on en retranche toutes les solutions de $c = 0$, $B = 0$, qui ne satisferont pas à $A = 0$, on sera assuré d'avoir toutes les solutions distinctes de $A = 0$ et $B = 0$, et de ne pas avoir de solutions étrangères.

On opérera sur les équations $B = 0$ et $R = 0$ de la même manière que sur les équations $A = 0$ et $B = 0$. On obtiendra ainsi un nouveau système formé de l'équation $R = 0$, et d'une

autre équation de degré moindre par rapport à x. Ce système admettra toutes les solutions du système $B = 0$, $R = 0$, et il pourra en admettre d'autres.

En continuant ainsi, on parviendra toujours à un système de deux équations dont l'une ne contiendra plus x; et en déterminant toutes les solutions de ce dernier système, on aura toutes les solutions du système proposé, et, en outre, celles qui auront été introduites par les préparations qu'on aura fait subir aux dividendes successifs.

626. Si les premiers membres des équations proposées ont des facteurs qui ne dépendent que de y, on devra les supprimer, afin de simplifier les calculs; et parce que ceux qui se trouveraient dans le diviseur et qu'il serait nécessaire d'introduire dans le dividende, donneraient lieu à des solutions étrangères qui comprendraient des valeurs indéterminées de x. On supprimera ainsi des solutions; mais on pourra en tenir compte suivant ce qui a été dit dans le n° 623. On devra supprimer pareillement, dans les restes successifs, les facteurs qui ne dépendront que de y, en tenant compte des solutions qui en résulteront.

627. M. Labatie, et, après lui, M. Sarrus, professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg, ont démontré qu'on peut écarter les solutions étrangères, sans résoudre les systèmes dans lesquels elles sont contenues, et sans avoir à soumettre ces solutions à des vérifications qui seraient le plus souvent impraticables. La démonstration que nous allons faire connaître est celle de M. Sarrus; mais la proposition qui en résulte n'est pas différente de celle de M. Labatie.

628. Supposons que A et B représentent les quotients que l'on obtient en divisant les premiers membres des équations proposées par tous ceux de leurs facteurs qui ne dépendent que de y.

Soit c le facteur par lequel il faut multiplier A pour effectuer la division par B; représentons par q le quotient, et par Rr le reste, r désignant le produit des facteurs de ce reste qui ne dépendent que de y. Soit c_1 le facteur par lequel il faut

multiplier B pour effectuer la division par R; représentons par q_1 le quotient et par $R_1 r_1$ le reste, r_1 désignant le produit des facteurs de ce reste qui ne dépendent que de y. Ainsi de suite. Enfin supposons, pour fixer les idées, qu'à la quatrième division on ait un reste indépendant de x, et désignons ce reste par r_3. On aura les égalités

$$(1)\qquad \begin{cases} c\,A = Bq + Rr, \\ c_1 B = Rq_1 + R_1 r_1, \\ c_2 R = R_1 q_2 + R_2 r_2, \\ c_3 R_1 = R_2 q_2 + r_3. \end{cases}$$

Soient d le plus grand commun diviseur de c et de r, d_1 celui de $\frac{cc_1}{d}$ et de r_1, d_2 celui de $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$ et de r_2, d_3 celui de $\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}$ et de r_3. Nous allons prouver qu'on obtiendra toutes les solutions du système $A = 0$, $B = 0$, sans aucune solution étrangère, en résolvant les systèmes ci-après :

$$(2)\qquad \begin{bmatrix} \frac{r}{d} = 0 \\ B = 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{r_1}{d_1} = 0 \\ R = 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{r_2}{d_2} = 0 \\ R_1 = 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{r_3}{d_3} = 0 \\ R_2 = 0 \end{bmatrix}.$$

Pour établir cette proposition, nous prouverons d'abord que les solutious des systèmes (2) conviennent toutes aux équations $A = 0$, $B = 0$; nous ferons voir ensuite que les solutions du système $A = 0$, $B = 0$, sont toutes comprises parmi celles des systèmes (2).

En divisant par d les deux membres de la première égalité (1), on obtient

$$(3)\qquad \frac{c}{d}A = \frac{q}{d}B + \frac{r}{d}R.$$

$\frac{q}{d}$ est entier; car c et r sont divisibles par d, donc qB est divisible par d; mais B, par hypothèse, est premier avec d; donc d divise q.

D'après l'égalité (3), les couples de valeurs de x et de y qui satisfont aux équations $B = 0$, $\frac{r}{d} = 0$, annulent $\frac{c}{d}A$; or $\frac{c}{d}$ et $\frac{r}{d}$ sont premiers entre eux; donc ces valeurs satisfont à l'équa-

tion $A=0$. Par conséquent, 1° *toutes les solutions du système* $B=0$, $\frac{r}{d}=0$, *conviennent au système* $A=0$, $B=0$.

Pour avoir une relation entre A, R et $\frac{r_1}{d_1}$, on multiplie l'égalité (3) par c_1, et l'on remplace, dans celle qui en résulte, $c_1 B$ par le second membre de la deuxième égalité (1); ce qui donne

$$\frac{cc_1}{d}A = \left(\frac{c_1 r + qq_1}{d}\right)R + \frac{q}{d}r_1 R_1.$$

La quantité $\frac{c_1 r + qq_1}{d}$ est entière, puisque r et q sont divisibles par d; de plus, cette quantité est divisible par d_1; car d_1 divise $\frac{cc_1}{d}$ et r_1, et il est premier avec R. Divisant les deux membres de l'égalité ci-dessus par d_1, et posant, pour abréger, $\frac{q}{d}=M$ et $\frac{c_1 r + qq_1}{dd_1}=M_1$, il vient

$$(4) \qquad \frac{cc_1}{dd_1}A = M_1 R + MR_1\frac{r_1}{d_1}.$$

Pour avoir une relation entre B, R et $\frac{r_1}{d_1}$, on multiplie d'abord la deuxième égalité (1) par $\frac{c}{d}$, ce qui donne $\frac{cc_1}{d}B = \frac{cq_1}{d}R + \frac{c}{d}R_1 r_1$. Puisque $\frac{cc_1}{d}$ et r_1 sont divisibles par d_1, il faut que d_1 divise aussi $\frac{cq_1}{d}R$; or d_1 est premier avec R, donc d_1 divise $\frac{cq_1}{d}$. Divisant tous les termes par d_1, et posant, pour abréger, $\frac{c}{d}=N$, $\frac{cq_1}{dd_1}=N_1$, il vient

$$(5) \qquad \frac{cc_1}{dd_1}B = N_1 R + NR_1\frac{r_1}{d_1}.$$

D'après les égalités (4) et (5), tous les couples de valeurs de x et de y qui réduisent à zéro les polynômes R et $\frac{r_1}{d_1}$, annulent aussi $\frac{cc_1}{dd_1}A$ et $\frac{cc_1}{dd_1}B$; or $\frac{cc_1}{dd_1}$ et $\frac{r_1}{d_1}$ sont premiers entre eux; par con-

séquent, 2° *toutes les solutions du système* $R=o, \frac{r_1}{d_1}=o$, *conviennent au système proposé* $A=o$, $B=o$.

On obtient une relation entre A, R_1 et $\frac{r_2}{d_2}$ en multipliant (4) par c_2, et remplaçant c_2R par le second membre de la troisième égalité (1). On trouve ainsi

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1}A = R_1\left(M_1q_2 + Mc_2\frac{r_1}{d_1}\right) + M_1R_2r_2.$$

Par hypothèse, d_2 divise le premier membre de cette égalité, ainsi que r_2; il doit donc diviser $R_1\left(M_1q_2 + Mc_2\frac{r_1}{d_1}\right)$; or R_1 et d_2 sont premiers entre eux : donc d_2 divise le multiplicateur de R_1. Désignant le quotient par M_2, il vient

$$(6) \qquad \frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}A = M_2R_1 + M_1R_2\frac{r_2}{d_2}.$$

En multipliant (5) par c_2, et remplaçant ensuite c_2R par le second membre de la troisième égalité (1), il vient

$$\frac{cc_1c_2}{dd_1}B = R_1\left(N_1q_2 + Nc_2\frac{r_1}{d_1}\right) + N_1R_2r_2.$$

On demontrerait comme ci-dessus que le multiplicateur de R_1 est divisible par d_2; et en représentant le quotient par N_2, on trouve

$$(7) \qquad \frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}B = N_2R_1 + N_1R_2\frac{r_2}{d_2}.$$

D'après les égalités (6) et (7), tous les couples de valeurs de x et de y qui réduisent les polynômes R_1 et $\frac{r_2}{d_2}$ à zéro, annulent aussi les premiers membres de ces deux égalités; or $\frac{cc_1c_2}{dd_1d_2}$ et $\frac{r_2}{d_2}$ sont premiers entre eux; par conséquent, 3° *toutes les solutions du système* $R_1=o$, $\frac{r_2}{d_2}=o$, *conviennent au système proposé* $A=o$, $B=o$.

On obtient une relation entre A, R_2 et $\frac{r_3}{d_3}$ en multipliant

(6) par c_3, et remplaçant c_3R_1 par le second membre de la quatrième égalité (1). On trouve ainsi

$$\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}A = R_2\left(M_2q_3 + c_3M_1\frac{r_2}{d_2}\right) + M_2r_3.$$

Divisant les deux membres par d_3, et désignant par M_3 le quotient de la division du polynôme entier $M_2q_3 + c_3M_1\frac{r_2}{d_2}$ par d_3, il vient

$$(8) \qquad \frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}A = M_3R_2 + M_2\frac{r_3}{d_3}.$$

Pour avoir une relation entre B, R_2 et $\frac{r_3}{d_3}$, on multiplie (7) par c_3, et l'on remplace c_3R_1 par le second membre de la quatrième égalité (1), ce qui donne

$$\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2}B = R_2\left(N_2q_3 + c_3N_1\frac{r_2}{d_2}\right) + N_2r_3.$$

Divisant les deux membres par d_3, et désignant par N_3 le quotient de la division du polynôme entier $N_2q_3 + c_3N_1\frac{r_2}{d_2}$ par d_3, il vient

$$(9) \qquad \frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}B = N_3R_2 + N_2\frac{r_3}{d_3}.$$

D'après les égalités (8) et (9), toutes les valeurs de x et de y qui réduisent les polynômes R_2 et $\frac{r_3}{d_3}$ à zéro, annulent aussi les premiers membres de ces équations; or $\frac{cc_1c_2c_3}{dd_1d_2d_3}$ et $\frac{r_3}{d_3}$ sont premiers entre eux; par conséquent, 4° *toutes les solutions du système* $R_2 = 0$, $\frac{r_3}{d_3} = 0$, *conviennent au système proposé* $A = 0$, $B = 0$.

Il reste encore à prouver qu'un système quelconque de valeurs qui satisfont aux équations $A = 0$, $B = 0$, fait partie des systèmes de valeurs que fournissent les équations (2).

Pour former les relations qui démontrent cette seconde partie du théorème, remplaçons d'abord dans l'égalité (3)

$\frac{e}{d}$ par N et $\frac{q}{d}$ par M; il viendra, en transposant le terme MB,

$$(10)\qquad NA - MB = R\frac{r}{d}.$$

Éliminons maintenant R entre les égalités (4) et (5). On pourrait effectuer cette élimination en retranchant les deux égalités l'une de l'autre, après avoir multiplié la première par N_1, la seconde par M_1, et en ayant égard aux valeurs ci-dessus de N_1 et de M_1; mais les calculs sont plus simples en multipliant (4) par B et (5) par A. On trouve alors, en retranchant l'une de l'autre les deux égalités résultantes, $(M_1B - N_1A)R + (MB - NA)R_1\frac{r_1}{d_1} = 0$. Remplaçant $MB - NA$ par $-R\frac{r}{d}$, et supprimant le facteur R, il vient

$$(11)\qquad N_1A - M_1B = -R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}.$$

Afin d'éliminer R_1 entre (6) et (7) on multiplie (6) par B et (7) par A, puis on retranche l'une de l'autre les égalités résultantes; ce qui donne

$$(M_2B - N_2A)R_1 + (M_1B - N_1A)R_2\frac{r_2}{d_2} = 0.$$

Remplaçant $M_1B - N_1A$ par $R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}$, et supprimant le facteur R_1, il vient

$$(12)\qquad N_2A - M_2B = R_2\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}.$$

On parvient de la même manière à l'égalité

$$(13)\qquad N_3A - M_3B = -\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1}\frac{r_2}{d_2}\frac{r_3}{d_3}.$$

D'après l'égalité (13), tout système de valeurs de x et de y qui donnera $A = 0$ et $B = 0$, devra aussi satisfaire à l'équation $\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}\cdot\frac{r_3}{d_3} = 0$, ce qui exige que l'un des facteurs $\frac{r}{d}, \frac{r_1}{d_1}$, etc., devienne nul; d'où il suit que les équa-

tions $\frac{r}{d}=0$, $\frac{r_1}{d_1}=0$, $\frac{r_2}{d_2}=0$, $\frac{r_3}{d_3}=0$, donnent toutes les bonnes valeurs de y.

Cela posé, soit $x=\alpha$, $y=6$, un système de bonnes valeurs des équations $A=0$, $B=0$.

Si la valeur $y=6$ est une racine de l'équation $\frac{r}{d}=0$, il est clair que le couple $x=\alpha$, $y=6$, sera une solution du système $B=0$, $\frac{r}{d}=0$.

Si la valeur $y=6$ ne vérifie point l'équation $\frac{r}{d}=0$, et qu'elle soit une racine de l'équation $\frac{r_1}{d_1}=0$, on voit par l'égalité (10) que le couple $x=\alpha$, $y=6$, donnera $R=0$; par conséquent, il sera une solution du système $R=0$, $\frac{r_1}{d_1}=0$.

Si la valeur $y=6$ ne vérifie ni l'équation $\frac{r}{d}=0$, ni l'équation $\frac{r_1}{d_1}=0$, et qu'elle soit une racine de l'équation $\frac{r_2}{d_2}=0$, on voit par l'égalité (11) que le couple $x=\alpha$, $y=6$, donnera $R_1=0$; par conséquent, il sera une solution du système $R_1=0$, $\frac{r_2}{d_2}=0$.

Si la valeur $y=6$ ne vérifie aucune des équations $\frac{r}{d}=0$, $\frac{r_1}{d_1}=0$, $\frac{r_2}{d_2}=0$, et qu'elle soit une racine de l'équation $\frac{r_3}{d_3}=0$, on voit par l'égalité (12) que le couple $x=\alpha$, $y=6$, donnera $R_2=0$; par conséquent, il sera une solution du système $R_2=0$, $\frac{r_3}{d_3}=0$.

Donc tous les systèmes de valeurs qui satisfont aux équations $A=0$, $B=0$, font partie des systèmes de valeurs que fournissent les équations (2).

L'équation $\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}\cdot\frac{r_3}{d_3}=0$, qui donne toutes les bonnes valeurs de y, est appelée *équation finale* en y.

629. Pour exemple de l'élimination par le plus grand commun diviseur, je considérerai le calcul d'une équation dont les racines soient les différences des racines d'une équation donnée, prises deux à deux.

Représentons généralement l'équation proposée par

$$(1) \qquad f(x)=0,$$

et soient a, b, c, d, etc., les m racines. Supposons d'abord que l'on veuille obtenir une équation dont les racines soient les différences entre une racine a et les $m-1$ autres racines. On posera

$$y=x-a, \quad \text{d'où} \quad x=a+y.$$

En substituant $a+y$ au lieu de x, dans $f(x)=0$, il vient

$$f(a+y)=0,$$

ou, en développant (n° 380),

$$(2) \qquad f(a)+f'(a)y+f''(a)\frac{y^2}{1.2}+f'''(a)\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots=0.$$

$f(a)$ est nulle, puisque, par hypothèse, a est une racine de l'équation (1). Il suit de là que l'équation (2) est divisible par y; ainsi elle admet une racine nulle. Cette racine nulle provient de la différence $a-a$; car, d'après la relation $y=x-a$, les valeurs de y sont les différences entre la racine a et toutes les racines de l'équation (1), en y comprenant la racine a. Si l'on supprime cette racine nulle, l'équation se réduit à

$$f'(a)+f''(a)\frac{y}{1.2}+f'''(a)\frac{y^2}{1.2.3}+\ldots=0;$$

cette dernière équation a pour racines les différences entre a et les $m-1$ autres racines de la proposée.

En prenant successivement pour a toutes les racines de la proposée, et en déterminant les valeurs correspondantes de y, on obtiendra toutes les différences des racines combinées deux à deux; or on aura ainsi effectué la résolution du système des deux équations $f(x)=0$ et

$$(3) \qquad f'(x)+f''(x)\frac{y}{1.2}+f'''(x)\frac{y^2}{1.2.3}+\ldots=0.$$

Par conséquent, si l'on élimine x entre ces deux équations, l'équation finale en y sera l'équation cherchée.

L'équation proposée étant du degré m, l'équation aux différences est du degré $m(m-1)$; car le nombre de ses racines est égal à celui des arrangements qu'on peut former avec m lettres a, b, c, etc., en les prenant deux à deux. Cette équation ne contient que des puissances paires de l'inconnue; car elle admet à la fois les racines $a-b$ et $b-a$; par conséquent ses racines sont deux à deux égales en valeur absolue, et de signes contraires. En faisant $y^2 = z$, on obtiendra une équation de degré sous-double, dont les racines seront les carrés des différences des racines de l'équation proposée, et qu'on nomme, par cette raison, *équation aux carrés des différences.*

Soit l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

L'équation (2) est alors

$$3x^2 + p + 3xy + y^2 = 0.$$

Pour éliminer x entre ces deux équations, on ordonne la seconde par rapport à cette lettre et on effectue les deux divisions suivantes :

Première division.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + px + q & 3x^2 + 3yx + y^2 + p \\
\cline{2-2}
3x^3 + 3px + 3q & x - y \\
-3x^3 - 3yx^2 - (y^2+p)x & \\
\hline
-3yx^2 - (y^2 - 2p)x + 3q & \\
+3yx^2 + 3y^2x + y^3 + py & \\
\hline
2(y^2+p)x + y^3 + py + 3q &
\end{array}$$

Deuxième division.

$$\begin{array}{r|l}
3x^2 + 3yx + y^2 + p & 2(y^2+p)x + y^3 + py + 3q \\
\cline{2-2}
6(y^2+p)x^2 + 6(y^2+p)yx + 2(y^2+p)^2 & 3x, + 3(y^3 + py - 3q) \\
-6(y^2+p)x^2 - 3(y^3+py+3q)x & \\
\hline
3(y^3+py-3q)x + 2(y^2+p)^2 & \\
6(y^2+p)(y^3+py-3q)x + 4(y^2+p)^3 & \\
-6(y^2+p)(y^3+py-3q)x - 3(y^3+py+3q)(y^3+py-3q) & \\
\hline
4(y^2+p)^3 - 3(y^3+py+3q)(y^3+py-3q) &
\end{array}$$

Dans la dernière division, on a multiplié deux fois par $2(y^2+p)$, afin de rendre les divisions possibles; mais, comme le facteur y^2+p est premier avec le dernier reste, l'équation finale est donnée sans aucune solution étrangère, par le dernier reste égalé à zéro, et en effectuant les opérations indiquées, elle est

$$y^6+6py^4+9p^2y^2+4p^3+27q^2=0.$$

En posant $y^2=z$, on obtient l'équation aux carrés des différences

$$z^3+6pz^2+9p^2z+4p^3+27q^2=0.$$

On s'explique pourquoi la multiplication par y^2+p n'a introduit aucune solution étrangère, en remarquant que $y^2+p=0$ réduit le diviseur à $3q$, qui est une quantité différente de zéro; de sorte qu'il n'existe aucun couple de valeurs finies de x et de y qui réduise à la fois à zéro le facteur introduit et le diviseur.

Remarques sur le théorème du n° 628.

630. Les égalités (1) du n° 628 supposent que chaque division a été effectuée en multipliant le dividende par un seul facteur fonction de y. Or, au lieu de chercher le facteur par lequel on doit multiplier un polynôme A, pour que la division du produit par B s'effectue sans fraction, jusqu'à ce que l'on ait un reste de degré moins élevé que B, il est préférable de recourir à des multiplications successives pour chacune des divisions partielles qui font trouver les différents termes du quotient, comme on l'a vu dans les calculs du numéro précédent. Supposons qu'on ait obtenu, au moyen de la multiplication de A par c, un quotient q et un reste A′ d'un degré plus élevé que B; qu'on ait multiplié A′ par c', et qu'il en soit résulté un quotient q' et un second reste A″; qu'on ait multiplié A″ par c'', et qu'on ait obtenu un quotient q'', et un reste Rr d'un degré moins élevé que B par rapport à x. On aura alors

$$cA=Bq+A',\quad c'A'=Bq'+A'',\quad c''A''=Bq''+Rr.$$

En multipliant les deux membres de la première égalité par $c'c''$, ceux de la seconde par c'', et en ajoutant ensuite les trois

égalités, on obtient celle-ci :

$$cc'c''A = B(qc'c'' + q'c'' + q'') + Rr.$$

Si on pose $cc'c'' = C$, et $qc'c'' + q'c'' + q'' = Q$, il vient

$$CA = BQ + Rr.$$

Il existe donc entre CA, B et Rr une relation semblable à celles que présentent les égalités (1).

631. Pour conserver à la démonstration du n° 628 toute sa généralité, nous avons supposé que c et r pouvaient avoir un facteur commun; mais, d'après ce qu'on a dit au sujet de l'égalité (3), si d est le plus grand commun diviseur de c et de r, la division de $\frac{c}{d}$ A par B donnera un quotient qui ne contiendra point de fractions; par conséquent, c ne sera pas le facteur le plus simple par lequel il faudra multiplier A pour effectuer la division par B. Il suit de là que les opérations peuvent être faites de telle sorte que c soit premier avec r; et que, de même, c_1 soit premier avec r_1; c_2 soit premier avec r_2; c_3 soit premier avec r_3. Alors l'équation $\frac{r}{d} = 0$ est la même que $r = 0$; on doit prendre pour d_1 le plus grand commun diviseur de c et de r_1; pour d_2 celui de $\frac{cc_1}{d_1}$ et de r_2; pour d_3 celui de $\frac{cc_1c_2}{d_1d_2}$ et de r_3.

632. Lorsque le reste indépendant de x, que nous avons désigné par r_3, est nul, le polynôme R_2 est le plus grand commun diviseur des polynômes A et B, et il divise aussi les restes R et R_1. Les équations proposées $A = 0$, $B = 0$, sont alors vérifiées par toutes les solutions de l'équation $R_2 = 0$, et les autres solutions sont données par les deux équations $\frac{A}{R_2} = 0$, $\frac{B}{R_2} = 0$. Or, en divisant les deux membres des égalités (1) par R_2, on obtient d'autres égalités qui ne diffèrent des premières qu'en ce que les quantités A, B, R, R_1, R_2 sont remplacées par les quotients $\frac{A}{R_2}$, $\frac{B}{R_2}$, $\frac{R}{R_2}$, $\frac{R_1}{R_2}$, $\frac{R_2}{R_2}$ ou 1. Par conséquent, on

aura toutes les solutions du système des équations $\frac{A}{R_2}=o$, $\frac{B}{R_2}=o$, en résolvant ceux-ci :

$$\left[\frac{r}{d}=o,\ \frac{B}{R_2}=o\right]\left[\frac{r_1}{d_1}=o,\ \frac{R}{R_2}=o\right]\left[\frac{r_2}{d_2}=o,\ \frac{R_1}{R_2}=o\right].$$

633. Quand le reste indépendant de x n'est pas nul, les polynômes A et B n'ont aucun facteur commun. Dans ce cas, les équations $A=o$, $B=o$ n'admettent que des solutions déterminées pour chaque inconnue ; car, dans chacun des systèmes (2), l'équation qui ne contient que y donne des valeurs déterminées de cette inconnue, et la substitution de chaque valeur de y dans l'autre équation donne une équation qui ne peut être identique, puisque les quantités B, R, R_1, R_2 n'admettent point de diviseurs qui ne dépendent que de y.

Sur les solutions formées par des valeurs infinies, et sur le degré de multiplicité des racines de l'équation finale.

634. La théorie qui vient d'être exposée a deux imperfections : l'une qui consiste en ce que l'on n'a point égard aux solutions communes des deux équations qui sont formées par des valeurs infinies de l'une des inconnues, ou de toutes deux ; l'autre, en ce que l'on néglige de rechercher quelle doit être la composition de l'équation finale dépendante d'une seule des inconnues, relativement aux degrés de multiplicité de ses différentes racines.

635. Soit l'équation $Gx^n+Hx^{n-1}\ldots+Px+Q=o$ dans laquelle les coefficients G, H,..., P, Q, sont des fonctions de y. Supposons que, pour $y=6$, on ait $G=o$. Si, avant de faire $y=6$, on remplace x par $\frac{1}{x'}$, on obtient $Qx'^n+Px'^{n-1}\ldots+Hx'+G=o$. Quand $G=o$, une des valeurs de x' est zéro ; donc, puisque $x=\frac{1}{x'}$, une des racines de la première équation est infinie. Si l'on a en même temps

$G = 0$ et $H = 0$, la seconde équation a deux racines nulles; par conséquent la première a deux racines infinies. En général, on doit admettre que cette équation a autant de racines infinies, correspondantes à $y = 6$, qu'il y a de coefficients consécutifs, à partir du premier coefficient G, qui sont rendus nuls par cette valeur de y.

On conclut facilement de là le moyen de trouver les solutions communes de deux équations, pour lesquelles la valeur de l'une des inconnues est infinie. Considérons par exemple les deux équations

$$(y-1)x^2 + yx + y^2 - 2y = 0,$$
$$(y-1)x + y = 0.$$

Le multiplicateur de la plus haute puissance de x dans chacune d'elles devenant nul pour $y = 1$, elles admettent la solution $y = 1$, $x = \infty$. Si l'on effectue la division du premier membre de la première équation par celui de la seconde, on obtient le reste $y^2 - 2y = 0$, en sorte que le système proposé est remplacé par le suivant :

$$(y-1)x + y = 0, \quad y^2 - 2y = 0.$$

Celui-ci donne les deux couples $y = 0$, $x = 0$; et $y = 2$, $x = -2$; mais il ne donne pas la solution $y = 1$, $x = \infty$.

Le système de deux équations peut aussi comporter des solutions formées d'une valeur infinie de chacune des deux inconnues. Cela a lieu, par exemple, quand les courbes déterminées par les deux équations sont telles, qu'une asymptote rectiligne de l'une est parallèle à une asymptote rectiligne de l'autre. Ces solutions peuvent aussi correspondre à des points de rencontre des deux courbes situés à une distance infinie, et déterminés par des branches dépourvues d'asymptotes rectilignes.

Les conclusions qui ont été obtenues dans les n^os 625 et 628 ne s'appliquent pas aux solutions infinies, parce que, si $A = 0$ et $B = 0$, pour que l'égalité $A = BQ + R$ fasse conclure $R = 0$, il faut que Q ne soit pas infini.

636. M. Labatie a donné des règles qui corrigent les deux imperfections de la méthode d'élimination par le plus grand

commun diviseur signalées dans le n° 634 (*Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur*, deuxième édition, Paris, Bachelier, 1835.) M. Ossian Bonnet s'est aussi occupé de la résolution des équations simultanées à deux inconnues. Il donne d'abord une définition précise des solutions multiples et de leur degré de multiplicité. Il prouve ensuite, au moyen de cette définition, 1° que, si $A = BQ + R$, les solutions des deux systèmes $[A = 0,\ B = 0]$ et $[B = 0,\ R = 0]$ ont, dans l'un et dans l'autre, les mêmes degrés de multiplicité; 2° que le système $[CA = 0,\ B = 0]$ équivaut toujours aux deux systèmes $[C = 0,\ B = 0]$ et $[A = 0,\ B = 0]$. Il conclut de ces deux lemmes un procédé rigoureux de résolution, indépendant du théorème de MM. Labatie et Sarrus; et ensuite, une démonstration nouvelle de ce théorème, qui n'est plus qu'une abréviation de sa méthode. Le travail de M. Bonnet a été inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (février, mars, avril et mai 1846). Le système de deux équations à deux inconnues donne lieu, comme le fait remarquer M. Bonnet, à deux questions que l'on confond ordinairement, mais qui sont cependant distinctes. On peut vouloir trouver toutes les solutions communes aux deux équations par rapport à l'une et à l'autre inconnue, ou seulement une équation à une seule inconnue, par laquelle on puisse obtenir toutes les valeurs de cette inconnue qui conviennent aux deux équations avec des valeurs correspondantes de l'autre inconnue, les mêmes pour chaque équation. La première question est celle que l'auteur a eue particulièrement en vue dans le travail que je viens de citer. Il annonçait qu'il s'occuperait aussi de l'élimination proprement dite, c'est-à-dire du cas où le procédé de l'élimination est employé seulement pour obtenir une ou plusieurs équations indépendantes de l'une des inconnues, et qui donnent toutes les valeurs de l'autre. Il a eu l'obligeance de me communiquer, en 1849, cette dernière partie de son travail, qu'il n'avait pas encore publiée, et que je vais exposer. Les résultats sont ceux auxquels M. Labatie était parvenu, mais les démonstrations sont différentes.

637. Soient $f(x,y) = 0$ et $F(x,y) = 0$ deux équations al-

gébriques à deux inconnues. Supposons qu'on ait résolu chacune d'elles par rapport à x, et soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ les racines de la première, $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ celles de la seconde. Ces quantités sont des fonctions de y, et pour qu'un couple de valeurs $x = \alpha$, $y = 6$ soit une solution des deux équations, il faut et il suffit que, lorsqu'on fera $y = 6$, une ou plusieurs des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots$, et une ou plusieurs des racines $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$, deviennent α. Il suit de là que, si l'on forme le produit P de toutes les différences $x_1 - x'_1$, $x_1 - x'_2, \ldots$; $x_2 - x'_1$, $x_2 - x'_2, \ldots$, et si $y = 6$ ne rend infinie aucune des racines $x_1, x_2, \ldots, x'_1, x'_2, \ldots$ de l'une et de l'autre des deux équations, cette valeur 6 de y devra vérifier $P = 0$; et réciproquement, toute valeur qui vérifiera l'équation $P = 0$, sera une valeur convenable de y.

Supposons d'abord que le coefficient du terme du plus haut degré par rapport à x, dans chacune des deux équations, soit numérique. Dans ce cas, les racines $x_1, x_2, \ldots, x'_1, x'_2, \ldots$ ne deviennent ni infinies ni $\frac{0}{0}$ pour aucune valeur de y. On a, en outre,

$$f(x,y) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots,$$
$$F(x,y) = x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots = (x - x'_1)(x - x'_2)(x - x'_3)\ldots;$$

donc en substituant dans la seconde équation les racines de la première,

$$F(x_1,y) = (x_1 - x'_1)(x_1 - x'_2)(x_1 - x'_3)\ldots,$$
$$F(x_2,y) = (x_2 - x'_1)(x_2 - x'_2)(x_2 - x'_3)\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

par suite,

$$P = F(x_1,y) \times F(x_2,y) \times F(x_3,y)\ldots.$$

On peut évaluer ce produit en fonction rationnelle de la seule inconnue y, au moyen des fonctions symétriques.

Écrivons le produit P sous cette autre forme :

$$P = (x_1^n + B_1 x_1^{n-1} + B_2 x_1^{n-2} + \ldots)(x_2^n + B_1 x_2^{n-1} + B_2 x_2^{n-2} + \ldots)\ldots.$$

Après la substitution des valeurs des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots$, un terme quelconque de la fonction P contiendra au plus m

coefficients de $F(x,y)$ et n coefficients de $f(x,y)$. En effet, il est d'abord évident, par l'expression ci-dessus de P, qu'un terme quelconque de ce produit, avant la substitution, ne contient pas plus de m coefficients de la suite B_1, B_2.... Il en est encore de même après la substitution des valeurs de x_1, x_2,..., puisque cette opération ne peut introduire que des coefficients de $f(x,y)$. D'un autre côté, on peut former la quantité P en substituant dans la première équation les racines de la seconde, et de cette manière un terme de P contiendra au plus n coefficients de $f(x,y)$.

638. Soient actuellement

$$f(x,y) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots,$$
$$F(x,y) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots.$$

On pourra écrire les équations $f(x,y) = 0$ et $F(x,y) = 0$ de cette manière :

$$x^m + \frac{A_1}{A_0} x^{m-1} + \frac{A_2}{A_0} x^{m-2} + \ldots = 0,$$

$$x^n + \frac{B_1}{B_0} x^{n-1} + \frac{B_2}{B_0} x^{n-2} + \ldots = 0.$$

D'après la remarque précédente, le dénominateur d'un terme du produit P ne pourra être que $A_0^n B_0^m$, ou le produit de deux puissances moins élevées de A_0 et de B_0. Donc, en multipliant P par $A_0^n B_0^m$, on aura une fonction entière de y. Soit $F = PA_0^n B_0^m$; nous allons démontrer que $F = 0$ est l'équation finale.

Cela serait évident si l'équation finale ne devait contenir que des racines pour lesquelles on n'eût ni $A_0 = 0$, ni $B_0 = 0$, et si l'équation $F = 0$ n'avait aussi que de semblables racines; car alors les racines de $F = 0$ seraient les mêmes que celles de $P = 0$; et, d'un autre côté, comme les racines qui devraient être données par l'équation finale ne rendraient infinie aucune des racines x_1, x_2, ..., x'_1, x'_2, ..., elles devraient toutes satisfaire à l'équation $P = 0$. Mais il faut prouver que la proposition énoncée subsiste aussi, en considérant les valeurs de y qui annulent un des coefficients A_0 et B_0, ou qui les annulent tous les deux.

Supposons d'abord que, pour $y = 6$, on ait $A_0 = 0$, et que B_0 ne soit pas nul; dans ce cas, une ou plusieurs des racines $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sont infinies. Supposons que les racines infinies soient x_1 et x_2; on a

$$PB_0^m = (B_0 x_1^n + B_1 x_1^{n-1} + \ldots)(B_0 x_2^n + B_1 x_2^{n-1} + \ldots)(B_0 x_3^n + B_1 x_3^{n-1} + \ldots)\ldots,$$

ou bien

$$PB_0^m = x_1^n x_2^n \left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_1} + \ldots\right)\left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_2} + \ldots\right)(B_0 x_3^n + B_1 x_3^{n-1} + \ldots)\ldots;$$

et, en multiplant les deux membres par A_0^n,

$$PA_0^n B_0^m = (A_0 x_1 x_2)^n \left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_1} + \ldots\right)\left(B_0 + B_1 \frac{1}{x_2} + \ldots\right)(B_0 x_3^n + B_1 x_3^{n-1} + \ldots)\ldots.$$

Nous allons d'abord démontrer que le produit $A_0 x_1 x_2$ a, pour $y = 6$, une valeur finie, différente de zéro. En considérant le produit de toutes les racines de l'équation $f(x, y) = 0$, dont le dernier terme est A_m, on a

$$A_0 x_1 x_2 x_3 \ldots = A_m, \quad \text{d'où} \quad A_0 x_1 x_2 = \frac{A_m}{x_3 x_4 \ldots}.$$

Or, si $y = 6$ n'annule pas A_m, aucune des racines $x_3, x_4, \ldots$ n'est zéro quand on fait $y = 6$; par conséquent, le second membre de la dernière égalité a une valeur finie, différente de zéro.

Si A_m est annulé par $y = 6$, il y a des racines nulles; mais, dans ce cas, que l'on augmente toutes les racines d'un même nombre h, tel qu'aucune des racines ne soit égale à $-h$, le dernier terme de l'équation ne sera plus zéro. On aura alors

$$A_0(x_1 + h)(x_2 + h) = \frac{A'_m}{(x_3 + h)(x_4 + h)\ldots}.$$

Il suit de là que le produit $A_0 (x_1 + h)(x_2 + h)$ aura pour $y = 6$ une valeur finie, différente de zéro; or ce produit est égal à $A_0 x_1 x_2 \left(1 + \frac{h}{x_1}\right)\left(1 + \frac{h}{x_2}\right)$, et lorsque x_1 et x_2 deviennent infinies, il a la même valeur que le produit $A_0 x_1 x_2$.

Revenons maintenant à l'expression ci-dessus du produit $PA_0^n B_0^m$. Lorsqu'on fait $y = 6$, les deux premiers facteurs po-

lynômes de cette quantité se réduisent à B_0, puisque x_1 et x_2 sont infinies. Chacun des facteurs suivants a une valeur finie qui n'est pas zéro, à moins que l'une des racines $x_3, x_4 \ldots$ ne prenne une valeur égale à celle d'une des racines de l'équation $F(x, y) = 0$, auquel cas il y aurait une valeur α de x qui vérifierait les deux équations avec $y = \beta$. Donc, puisque $A_0 x_1 x_2$ est une quantité finie, différente de zéro, si, pour $y = \beta$ qui annule A_0, les deux équations n'ont aucune solution commune, finie ou infinie, $PB_0^m A_0^n$ ou F a une valeur différente de zéro; et si les deux équations ont une solution commune $x = \alpha$, F est zéro.

Si $y = \beta$ annule A_0 et B_0, en supposant toujours que x_1 et x_2 soient les racines de $f(x, y) = 0$ qui deviennent infinies, les deux premiers facteurs polynômes de $PA_0^n B_0^m$ sont nuls quand on y fait $y = \beta$, et tous les autres facteurs ont des valeurs finies; donc $F = 0$.

Il est démontré par là que l'équation $F = 0$ donne toutes les valeurs finies de y qui vérifient les deux équations avec une valeur finie ou infinie de x.

639. L'équation $F = 0$ peut avoir des racines égales; mais, relativement aux degrés de multiplicité de ces racines, nous considérerons seulement le cas où l'une des équations ne contient pas y; de sorte que le système proposé est $f(x) = 0$, $F(x, y) = 0$. Dans ce cas, les racines $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la première équation sont des quantités numériques, et l'on peut ne pas tenir compte du coefficient A_0 qui est aussi un nombre. On a

$$F = PB_0^m = (B_0 x_1^n + B_1 x_1^{n-1} + \ldots)(B_0 x_2^n + B_1 x_2^{n-1} + \ldots)\ldots.$$

Il résulte de cette composition de la quantité F, que, si l'équation $f(x) = 0$ admet p racines égales à α, et si, par la substitution de α, $F(x, y) = 0$ admet p' racines égales à β, F admet le facteur $(y - \beta)^{pp'}$.

640. Il reste à expliquer comment on obtient l'équation $F = 0$, quand on fait usage du procédé d'élimination par le plus grand commun diviseur. Considérons pour cela les

égalités

$$c\,A = Bq + Rr,$$
$$c_1\,B = Rq_1 + R_1 r_1,$$
$$c_2\,R = R_1 q_2 + R_2 r_2,$$
$$c_3\,R_1 = R_2 q_3 + r_3.$$

Soient $F_1 = o$ l'équation finale du système $B = o$, $R = o$; $F_2 = o$ celle du système $R = o$, $R_1 = o$; $F_3 = o$ celle du système $R_1 = o$, $R_2 = o$.

Soient m, n, p, p_1, p_2 les degrés de A, B, R, R_1, R_2, par rapport à x; et α, β, ρ, ρ_1, ρ_2 les coefficients des premiers termes de ces polynômes.

En substituant dans A les racines de $B = o$, on aura une suite d'égalités

$$c\,A' = R'r, \quad c\,A'' = R''r, \quad c\,A''' = R'''r, \ldots;$$

d'où l'on conclura $\dfrac{c^n F}{\beta^m} = \dfrac{r^n F_1}{\beta^p}$, ou $c^n F = r^n F_1 \beta^{m-p}$.

On aura semblablement

$$c_1^p\,F_1 = r_1^p\,F_2 \rho^{n-p_1},$$
$$c_2^{p_1}\,F_2 = r_2^{p_1}\,F_3 \rho_1^{p-p_2},$$
$$c_3^{p_2}\,F_3 = r_3^{p_2}\,\rho_2^{p_1}.$$

Par suite, en multipliant membre à membre,

$$F = \left(\frac{r}{c}\right)^n \left(\frac{r_1}{c_1}\right)^p \left(\frac{r_2}{c_2}\right)^{p_1} \left(\frac{r_3}{c_3}\right)^{p_2} \beta^{m-p}\,\rho^{n-p_1}\,\rho_1^{p-p_2}\,\rho_2^{p_1}.$$

Il est à remarquer que c, c_1, c_2, c_3 peuvent n'être pas les facteurs les plus simples par lesquels il faut multiplier pour rendre les divisions possibles.

NOTE I.

Sur la résolution des équations numériques du premier degré.

Je donnerai seulement un exemple à trois inconnues. La disposition et la marche du calcul seraient les mêmes dans le cas d'un plus grand nombre d'équations.

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{rrrrl} +\ 10\,691\,360\,s & -\ 4\,312\,068\,y & -\ 49\,192{,}22\,x & -\ 109\,685{,}4 & =0 \\ -\ 5\,717\,249 & +\ 9\,552\,169 & -\ 287\,888{,}8 & -\ 46\,452{,}99 & =0 \\ -\ 423\,711 & -\ 1\,870\,241 & +\ 3\,251\,426{,}4 & -\ 9\,423{,}216 & =0 \end{array}\right.$$

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{rrrrl} +\ 7{,}029.0330\,s & -\ 6{,}634.6857\,y & -\ 4{,}691.8965\,x & -\ 5{,}040.1489 & =0 \\ -\ 6{,}757.1871 & & & & \\ -\ 5{,}627.0697 & & & & \end{array}\right.$$

$$(c)\quad s = +\ \bar{1}{,}605.6527\,y + \bar{3}{,}662.8635\,x + \bar{2}{,}011.1159$$

$$(d)\quad \left\{\begin{array}{rrrr} -\ 5\,717\,249\,s = & -\ 6{,}362.8398 & -\ 4{,}420.0506 & -\ 4{,}768.3030 \\ -\ 423\,711\,s = & -\ 5{,}232.7224 & -\ 3{,}289.9332 & -\ 3{,}638.1856 \end{array}\right.$$

$$(e)\quad \left\{\begin{array}{rrrr} -\ 5\,717\,249\,s = & -\ 2\,305\,896\,y & -\ 26\,305{,}7\,x & -\ 58\,654{,}7 \\ -\ 423\,711\,s = & -\ 170\,892\,y & -\ 1\,949{,}5\,x & -\ 4\,346{,}96 \end{array}\right.$$

$$(f)\quad \left\{\begin{array}{rrrl} +\ 7\,246\,273\,y & -\ 314\,194{,}5\,x & -\ 105\,107{,}69 & =0 \\ -\ 2\,041\,133\,y & +\ 3\,249\,476{,}9\,x & -\ 13\,770{,}176 & =0 \end{array}\right.$$

$$(g)\quad \left\{\begin{array}{rrrl} +\ 6{,}860.1147\,y & -\ 5{,}497.1987\,x & -\ 5{,}021.6345 & =0 \\ -\ 6{,}309.8713 & & & \end{array}\right.$$

$$(h)\quad y = +\ \bar{2}{,}637.0840\,x + \bar{2}{,}161.5198$$

$$(k)\quad -\ 2\,041\,133\,y = -\ 4{,}946.9553\,x - 4{,}471.3911$$

$$(l)\quad -\ 2\,041\,133\,y = -\ 88\,502{,}4\,x - 29\,606{,}775$$

$$(m)\quad +\ 3\,160\,974{,}5\,x - 43\,376{,}951 = 0$$

$$(n)\quad +\ 6{,}499.8212\,x - 4{,}637.2591 = 0$$

$$(p)\quad x = 0{,}013\,722\,65 \qquad x = \bar{2}{,}137.4379$$

Calcul de la valeur de y.

$$(q)\quad \begin{array}{rr} y = \bar{4}{,}774.5219 = & +\ 0{,}000\,595\,00 \\ + & +\ 0{,}014\,505\,07 \\ \hline y = \bar{2}{,}178.9789; & +\ 0{,}015\,100\,07 \end{array}$$

Calcul de la valeur de s.

$$(r)\quad \begin{array}{rr} s = +\ \bar{3}{,}784.6316 = & +\ 0{,}006\,090\,20 \\ +\ \bar{5}{,}800.3014 & +\ 0{,}000\,063\,14 \\ + & +\ 0{,}010\,259\,26 \\ \hline s = \bar{2}{,}215.1774; & +\ 0{,}016\,412\,60 \end{array}$$

Vérification.

Première équation.

$$(s)\quad \begin{array}{rr}
+\,5,244.2104 & +\,175\,473 \\
-\,4,813.6646 & -\,65\,112,53 \\
-\,2,829.3344 & -\,675,04 \\
 & -\,109\,685,4 \\ \cline{2-2}
 & -\,175\,472,97
\end{array}$$

Deuxième équation.

$$\begin{array}{rr}
+\,5,159.0810 & +\,144\,238,4 \\
-\,4,972.3645 & -\,93\,834,92 \\
-\,3,596.6627 & -\,3\,950,60 \\
 & -\,46\,452,99 \\ \cline{2-2}
 & -\,144\,238,51
\end{array}$$

Troisième équation.

$$\begin{array}{rr}
+\,4,649.5118 & +\,44\,618,17 \\
-\,4,450.8765 & -\,28\,240,76 \\
-\,3,842.2471 & -\,6\,954,20 \\
 & -\,9\,423,216 \\ \cline{2-2}
 & -\,44\,618,176
\end{array}$$

Les équations (a) sont les équations proposées.

La première ligne (b) présente une équation fictive, formée en remplaçant, dans la première équation (a), les coefficients et le terme connu par leurs logarithmes. Pour les deux autres équations (a), il suffit d'écrire le logarithme du coefficient de z.

L'équation (c) est la première équation (a) résolue par rapport à z, en exprimant la valeur de z par les logarithmes. On obtient cette équation (c) au moyen de celle de la première ligne (b), en transposant les termes, et retranchant le logarithme placé devant z de tous les autres.

Les équations (d) sont conclues de l'équation (c), en ajoutant à chacun des logarithmes contenus dans celle-ci celui du coefficient de z dans la deuxième équation (a), qui est dans la deuxième ligne (b); et en opérant ensuite de même par rapport au logarithme du coefficient de z dans la troisième équation (a), qui est dans la troisième ligne (b). On doit avoir soin de mettre devant chaque terme de ces équations fictives le signe de celui qu'il représente.

Les équations (e) sont les précédentes (d) dans lesquelles on a remplacé les logarithmes par les nombres; elles donnent les valeurs des termes en z dans la deuxième équation (a) et dans la troisième, par la substitution de la valeur de z tirée

de la première. On en conclut les équations (f) qui sont le résultat de l'élimination de z.

On effectue l'élimination de y entre les deux équations (f) par des calculs exactement semblables, qui donnent les équations (g), (h), (k), (l), et enfin l'équation (m).

L'équation (n) est la précédente dans laquelle on a remplacé les nombres par leurs logarithmes; on en conclut le logarithme de x, et, par suite, la valeur de x.

On calcule la valeur de y d'après l'équation (h). Le logarithme du premier terme, que l'on voit dans la première ligne de (q), s'obtient en ajoutant le logarithme de x à celui qui est écrit comme coefficient de x dans l'équation (h). On a dans cette équation le logarithme du second terme; on écrit seulement dans (q) le nombre correspondant, et l'on ajoute ce nombre à celui qu'on a trouvé pour le premier terme. A gauche de la somme, on voit son logarithme, qui est nécessaire pour la vérification.

La valeur de z est donnée par l'équation (c); elle est formée de trois termes qu'on calcule de la même manière qu'on a calculé ceux de la valeur de y.

Quand on a trouvé les valeurs de toutes les inconnues, il est nécessaire de les vérifier, pour s'assurer de l'exactitude de toutes les opérations, et pour juger avec quelle approximation ces valeurs ont été obtenues. Cette vérification se fait au moyen des logarithmes qui ont été employés, et de ceux des coefficients de y et de x dans la deuxième équation (a) et dans la troisième; on en conclut les logarithmes des différents termes de chaque équation et les valeurs de ces termes. Dans notre exemple, la différence entre la somme des termes positifs et celle des termes négatifs est seulement 0,03 pour la première équation; 0,11 pour la seconde; elle est au-dessous de 0,01 pour la troisième; elle ne s'élève pas, dans chaque équation, au delà d'une unité de l'ordre du septième chiffre. Or, en supposant que la première équation, par exemple, fût exactement vérifiée et qu'on altérât seulement la valeur de z de 0,00000001, le premier membre prendrait une valeur différente de zéro de plus de 0,1. On est donc en droit de conclure de la vérification relative à la première équation, qui est

celle où l'erreur de la valeur de z aurait le plus d'influence, que cette valeur n'est pas fautive de 0,00000001. Les deux autres vérifications font voir que l'approximation n'est pas moindre pour les valeurs de y et de x.

Il est très-essentiel d'observer que les éliminations successives ne doivent pas se faire indifféremment dans tel ordre que l'on veut. On doit éliminer en premier lieu l'inconnue qui est multipliée par le plus grand coefficient, et en prenant sa valeur dans l'équation qui la contient avec ce plus grand coefficient. Si l'on agissait autrement, les erreurs occasionnées par l'emploi des logarithmes pourraient devenir d'un ordre supérieur à celui des derniers chiffres des coefficients donnés, et alors elles équivaudraient à une altération de ces coefficients. Tandis qu'en faisant en sorte de n'avoir à calculer par les logarithmes que des nombres les plus petits possibles, on atténue les erreurs absolues de ces nombres et l'influence qu'elles peuvent avoir sur les résultats.

NOTE II.

Sur la convergence des séries.

Les séries présentent, sous le rapport de leur convergence, une particularité remarquable. Lorsque la convergence a lieu en réduisant les termes à leurs valeurs numériques, et indépendamment des signes dont ils sont affectés, si l'on change l'ordre des termes, de manière que chaque terme vienne occuper un rang déterminé, différent de celui qu'il occupait d'abord, on formera une nouvelle série qui sera encore convergente, et qui aura la même somme que la première. Mais, lorsque la convergence n'a lieu que par l'effet des signes des termes, dont les valeurs numériques formeraient une série divergente, il peut arriver, en changeant l'ordre des termes, que la nouvelle série soit divergente; ou que, si elle reste convergente, la somme soit différente de celle de la première série (*).

Soit une série $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$, etc. Désignons les valeurs numériques des termes par $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n$, etc. Si ces valeurs numériques forment une série convergente, le reste R_n, ou $U_n + U_{n+1} +$ etc., deviendra moindre que toute limite, quand n sera suffisamment grand. Supposons que l'on change l'ordre des termes suivant une loi quelconque, et soit $u_p, u_q, \ldots, u_m$, etc., la nouvelle série produite par le changement d'ordre. On pourra prendre un nombre i plus grand que n, et assez grand pour que les termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$, dont la somme est s_n, se trouvent tous compris dans les i premiers termes de la série u_p, u_q, etc. Représentons par s'_i la somme de ces i premiers termes; cette somme s'_i pourra contenir, outre les termes qui donnent la somme s_n, d'autres termes qui se trouvaient compris dans la suite u_n, u_{n+1}, etc.; mais la somme de ces termes, quels que soient leurs signes, sera nécessaire-

* *Journal* de M. Liouville (tome IV, page 396).

ment moindre que R_n. Ainsi, on aura $s'_i = s_n + \theta R_n$, θ étant un nombre compris entre o et 1. Or, si l'on fait croître n et i au delà de toute limite, θR_n s'approchera indéfiniment de o, et s_n, de la limite s. Donc s'_i s'approchera aussi indéfiniment de la limite s. Donc la série $u_p, u_q, \ldots, u_m$, etc., est convergente; et elle a la même somme s que la série $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$, etc.

Pour montrer que, lorsque la convergence a lieu seulement par l'effet des signes, la transposition des termes peut altérer la somme, ou rendre la série divergente, considérons la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

Prenons successivement deux termes positifs et un terme négatif, de cette manière

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

On peut former cette nouvelle série au moyen de la première, en lui ajoutant celle qui résulte de la division de tous ses termes par 2. En effet, si l'on partage les termes en groupes de quatre termes, le $n^{ième}$ groupe est

$$\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n};$$

après la division de tous les termes par 2, en groupant chaque terme avec le suivant, le $n^{ième}$ groupe est

$$\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n};$$

la somme de ces deux groupes est

$$\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n},$$

et si l'on fait successivement $n = 1, = 2, = 3$, etc., on obtient les groupes successifs de trois termes de la série $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} +$ etc. Soient s_{2n} et s_{4n} les sommes des $2n$ et des $4n$ premiers termes de la première série; celle des $2n$ premiers

termes de la série $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+$ etc. sera $\frac{1}{2}s_{2n}$, et la somme des $3n$ premiers termes de la série obtenue par la transposition des termes sera $s_{4n}+\frac{1}{2}s_{2n}$. Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre n, les sommes s_{4n} et s_{2n} convergeront vers une même limite, qui est $l\,2$ (n° 402). Donc $s_{4n}+\frac{1}{2}s_{2n}$ convergera vers $\frac{3}{2}l\,2$. Ainsi la série

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

a pour somme $\frac{3}{2}l\,2$.

Par un autre changement dans l'ordre des termes de la même série, on pourra obtenir une série divergente; cela aurait lieu si l'on prenait alternativement des groupes de termes positifs, puis de termes négatifs, dans lesquels le nombre des termes croîtrait par degrés et indéfiniment; de manière que la valeur de chaque groupe fût toujours plus grande qu'un nombre donné; comme le groupe ci-dessous par exemple,

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{3n-2},$$

dont la valeur est plus grande que $\frac{n}{3n-2}$ et par conséquent plus grande que $\frac{1}{3}$.

En considérant la série convergente

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots,$$

on en tire encore plus facilement une série divergente; il suffit de prendre alternativement deux termes positifs, puis un terme négatif, comme il suit :

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots.$$

En effet, si l'on pose

$$f(n)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n-2}}+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},$$

$$F(n)=1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{2n-2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},$$

il viendra

$$F(n)-f(n)=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}.$$

Le second membre de cette égalité est plus grand que $\frac{n}{\sqrt{4n-1}}$, et par conséquent plus grand que $\frac{1}{2}\sqrt{n}$; il tend donc vers l'infini en même temps que n. Donc il en est de même de $F(n)-f(n)$, et, par suite, de $F(n)$: puisque $f(n)$ est une quantité finie.

FIN.